Olympiades-information n°4

Quelques solutions

Exercice précédent 1.
$\sqrt{1234567891} \approx 35136$. Pas trente-six solutions ! Il faut prendre la calculatrice. Ma calculatrice peut mémoriser un nombre de dix chiffres, c'est donc bon ! J'ai utilisé le programme suivant, absolument pas économique mais rapide à écrire. ma calculatrice a mouliné au moins 25 minutes !

```
:PROGRAM :PRIME
:PROMPT A
:2->N
:While N< √A
:If A/N=int(A/N)
:Then :Disp 0
:Disp N
:√A + 1 -> N
:Else
:N+1-> N
:End
:End
:Disp N
```

Ma calculatrice m'a indiqué qu'elle avait tourné 35137 fois, ce qui prouve bien que ce nombre de dix chiffres est premier...

Exercice nouveau 1.
Je me donne n nombres entiers au hasard. En choisissant un certain nombre d'entre eux et en les ajoutant, parviendrais-je à trouver un multiple de n ?

Voilà une solution possible.
Soient $a_1, a_2, \ldots, a_n$ les n nombres entiers. je calcule les n nombres entiers $S_1, S_2, \ldots, S_n$ définis comme suit :

$$S_1 = a_1 \quad S_2 = a_1 + a_2 \quad \ldots \quad S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$$

Soient parmi ces nombres il y en un qui est divisible par n et c'est fini ! Soit aucun d'entre eux n'est divisible par n, c'est-à-dire qu'aucun n' a un reste nul dans la division euclidienne par n. Les n restes des n divisions des n nombres différents S_n doivent donc être choisis parmi les entiers $1, 2, \ldots, n-1$. Il y en a forcément 2 qui sont égaux. Si S_i et S_j $(i < j)$ ont le même reste dans la division par n, on a :

$$S_i = qn + r \quad \text{et} \quad S_j = q'n + r \quad \text{d'où} \quad S_j - S_i = (q' - q)n$$

n divise donc $S_j - S_i$. Or $S_j - S_i = a_{i+1} + a_{1+2} + \cdots + a_j$. La réponse au problème est donc positive !

Exercice nouveau 2.

Prouver que, quels que soient les nombres a, b, c, on a l'inégalité :

$$(a+b+c)\sqrt{2} \leq \sqrt{b^2+c^2} + \sqrt{c^2+d^2} + \sqrt{a^2+b^2}$$

Je ne donne que la figure (elle "parle" d'elle même) :

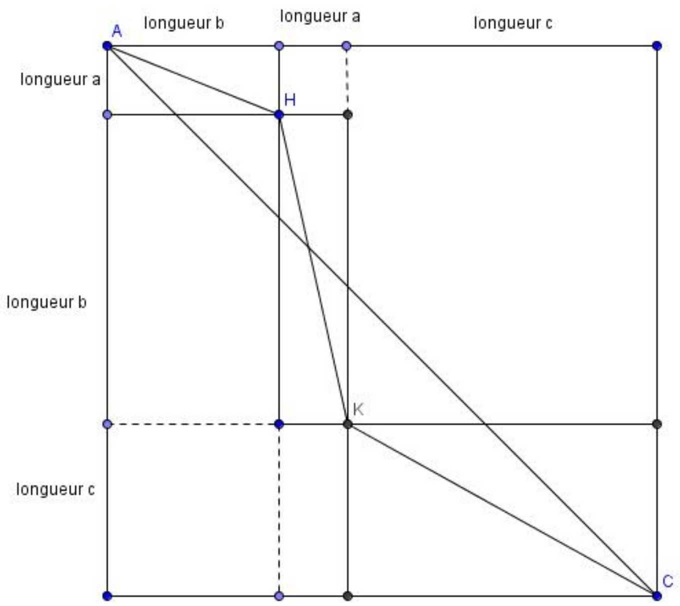

Fig. 1 –