OLYMPIADES ACADEMIQUES DE PREMIERE 2004

ACADEMIE de CORSE

Exercice 1

Soit ABC un triangle.
On définit les trois points P, Q et R (figure 1) par :

$\overrightarrow{AP} = \frac{5}{2}\overrightarrow{AB}$ $\quad\overrightarrow{BQ} = \frac{5}{2}\overrightarrow{BC}$ $\quad\overrightarrow{CR} = \frac{5}{2}\overrightarrow{CA}$

Reconstruire le triangle ABC, en partant d'un triangle PQR donné, comme dans la figure 2.

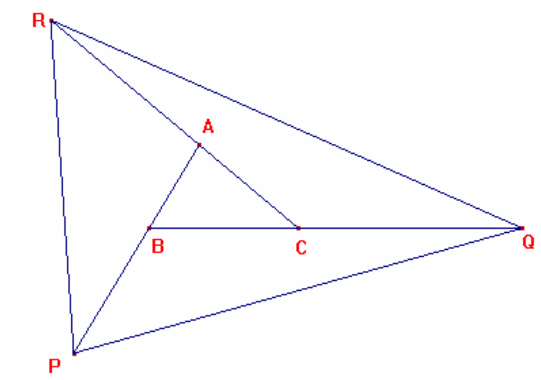


Figure 1

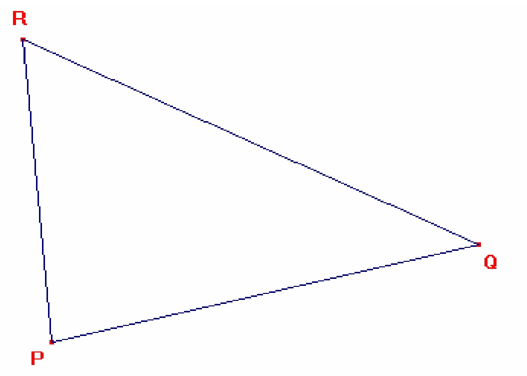


Figure 2

Exercice 2

Soit $A_1A_2\ldots A_n$ un polygone convexe à n côtés. Soit $B_1B_2\ldots B_n$ le polygone dont les sommets sont les milieux des côtés du polygone $A_1A_2\ldots A_n$. On cherche à étudier le rapport de l'aire de $A_1A_2\ldots A_n$ par l'aire de $B_1B_2\ldots B_n$

1) Etude du cas des polygones réguliers.

Démontrer que si $A_1A_2\ldots A_n$ est un polygone régulier, alors $B_1B_2\ldots B_n$ est un polygone régulier, et calculer le rapport des aires de $A_1A_2\ldots A_n$ et de $B_1B_2\ldots B_n$ en fonction de n.

2) Etude des polygones convexes quelconques.

a) Etude du cas n = 3. Démonter que le rapport des aires de $A_1A_2A_3$ et $B_1B_2B_3$ est constant et calculer ce rapport.

b) Etude du cas n = 4. Démonter que le rapport des aires de $A_1A_2A_3A_4$ et $B_1B_2B_3B_4$ est constant et calculer ce rapport.

c) Ce rapport est-il constant pour tous les polygones convexes à 5 côtés ?

…/…

Exercice 3

On définit pour chaque couple de réels (a,b) la fonction f par :

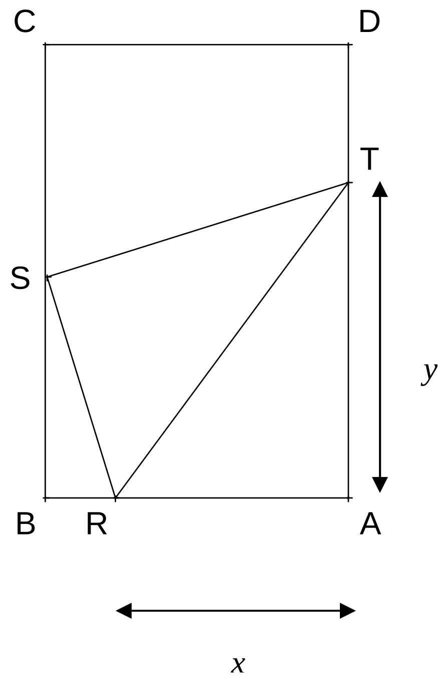
$$f(x) = a - \sqrt{x+b}$$

Deux nombres réels u et v sont dits *échangeables* s'il existe au moins un couple de réels (a,b) tel que la fonction f vérifie à la fois $f(u) = v$ et $f(v) = u$

1) Montrer que 2 et 3 sont échangeables.
2) Peut-on en dire autant de 4 et 7 ?
3) A quelle condition deux <u>entiers</u> u et v sont-ils échangeables ?

Exercice 4

Soit ABCD une feuille de papier rectangulaire de largeur AB = 4 et de longueur BC = 6. Soit R un point de [AB] (bord inférieur de la feuille). On replie la feuille suivant le segment [RT] et on appelle S la nouvelle position du point A (coin inférieur droit de la feuille). Voir figure ci contre.



Dans tout l'exercice on s'intéresse au cas où S est sur le segment [BC] (bord gauche de la feuille).

On pose $AR = x$, $AT = y$.

1) Trouver les valeurs minimale et maximale de x.
2) Trouver une relation entre x et y lorsque S se déplace sur $[BC]$.
3) Trouver la valeur de x pour laquelle l'aire de la partie repliée (triangle SRT) est minimale. Quelle est alors la nature du triangle AST ?