



UNITÉ DÉCOUVERTE : HISTOIRE DES SCIENCES
LMD - ST & SM - 2^{ème} SEMESTRE 2008/2009
Département de Physique
Faculté des Sciences
Université AbouBekr Belkaïd de Tlemcen

Cours 4 : Petite Histoire des Mathématiques : Quelques Conjectures - Théorèmes et Paradoxes

1 Paradoxe de Zénon d'Elée

- Cinq cent ans avant Jésus-Christ, **Zénon d'Elée** a énoncé divers paradoxes qui tendent à prouver que le mouvement est impossible. Donnons ici une version de l'un de ses paradoxes : Achille ne rattrape jamais la tortue après laquelle il court. Pour fixer les idées, supposons qu'Achille et la tortue courent le long d'une ligne droite, Achille avançant à $10m.s^{-1}$, la tortue à $1m.s^{-1}$ (ce qui fait beaucoup pour une tortue!). On supposera encore que la tortue a initialement $100m$ d'avance.
- Pour qu'Achille rattrape la tortue, il faut d'abord qu'il atteigne le point de départ de celle-ci. Il lui faut $10s$, et la tortue a progressé de $10m$. Pour rattraper la tortue, il doit encore parcourir $10m$. Mais la tortue a encore avancé de $1m$. Achille doit parcourir ce mètre, mais la tortue avance toujours ! Et Achille ne pourra jamais rattraper la tortue puisqu'il doit toujours parvenir d'abord au point que la tortue vient de quitter, et celle-ci aura pris un peu d'avance.
- Pour éclaircir ce paradoxe, calculons le temps nécessaire à Achille pour rejoindre la tortue. Il lui faut $10s$ pour parcourir les $100m$ qui le sépare initialement de la tortue, puis $1s$ pour parcourir les $10m$ d'avance qu'elle avait encore, puis $1/10s$; mais la tortue a toujours $1/10m$ d'avance, et ainsi de suite... Par conséquent, le nombre de secondes qui s'écoulent avant qu'Achille ne rattrape la tortue est : $10 + 1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \frac{1}{1000} + \dots$
- On obtient une somme comportant une infinité de termes. Ce que Zénon d'Elée n'avait pas prévu, c'est que cette **somme infinie** possède une **valeur finie**. Les règles sur les séries géométriques montrent en effet sans peine que la somme précédente fait $11s$ et $1/9$.
- La manipulation des sommes infinies (on parle de séries) a très longtemps posé des problèmes conceptuels et philosophiques aux mathématiciens. Le cours de **Cauchy** à l'Ecole Polytechnique en 1820, pourtant un modèle pour l'époque, comporte encore des erreurs à ce sujet. Il faudra attendre la fin du XIX^e s., et les travaux de **Karl Weierstrass**, pour que les règles soient clairement établies.

2 Grand théorème de Fermat

- Au XVII^e siècle, alors que les mathématiques ont un regain d'intérêt en Europe, le juge toulousain **Pierre de Fermat** consacrait beaucoup de son temps libre à étudier l'Arithmetica de Diophante. Dans un passage consacré au théorème de Pythagore, Fermat étudia la variante décrite ci-dessus. En marge de son exemplaire de l'Arithmetica, à la suite du problème 8, il nota ainsi l'observation suivante :
- **Cubem autem in duos cubos, aut quadratoquadratum in duos quadratoquadratos, et generaliter nullam in infinitum ultra quadratum potestatem in duos eiusdem nominis fas est dividere.**
- *Il est impossible pour un cube d'être écrit comme la somme de deux cubes ou pour une quatrième puissance d'être écrite comme la somme de deux quatrièmes puissances ou, en général, pour n'importe quel nombre égal à une puissance supérieure à deux d'être écrit comme la somme de deux puissances semblables.*
- Quelques lignes plus bas, il inscrivit :
- **Cuius rei demonstrationem mirabilem sane detexi hanc marginis exiguitas non caperet**
- *J'ai une démonstration véritablement merveilleuse de cette proposition, que cette marge est trop étroite pour contenir.*

- On ne retrouva jamais la "preuve" de Fermat (tout indique qu'il n'en avait d'ailleurs pas), et cette énigme, montrer que $x^n + y^n = z^n$ n'a pas de solutions entières pour $n > 2$, fut la plus grande énigme qui agita le monde des mathématiciens pendant 4 siècles.
- Le cas $n = 4$ fut rapidement résolu (par Fermat lui-même, en utilisant la méthode de la descente infinie). Le premier progrès important fut ensuite réalisé par Euler, près d'un siècle plus tard, qui en utilisant les nombres complexes vint à bout du cas $n = 3$.
- Il fallut attendre encore 75 ans pour que Sophie Germain, Dirichlet et Legendre prouvent le cas $n = 5$.
- Quatorze ans plus tard, Lamé enrichit encore la méthode pour traiter le cas $n = 7$. De nombreux travaux continuèrent sur ce problème, permettant des avancées considérables en mathématiques.
- Mais il fallut attendre 1996, et le mathématicien anglais Andrew Wiles, pour trouver une réponse définitive. Au fait, Fermat avait raison ! Il n'y pas de solutions à cette fameuse équation. Ce qui fut longtemps appelée la conjecture de Fermat, ou le dernier théorème de Fermat, s'appelle désormais théorème de Fermat-Wiles.

3 La conjecture de Goldbach

- Prenons les premiers nombres entiers pair (exceptés 2 et 4), et décomposons les comme suit :
- $6 = 3 + 3$, $8 = 5 + 3$, $10 = 7 + 3$, $12 = 7 + 5$, $14 = 7 + 7$, $16 = 11 + 5$, $18 = 11 + 7$, $20 = 13 + 7$
- Il semble apparaître le fait que tout nombre pair supérieur ou égal à 4 s'écrit comme la somme de 2 nombres premiers. Cette assertion est ce qu'on appelle la conjecture de Goldbach. C'est un énoncé très simple, et pourtant on ne sait toujours pas s'il est vrai ou s'il est faux !
- La conjecture de Goldbach a inspiré de nombreux romanciers. Voir Théorème du perroquet, un roman mathématico-policier de Denis Guedj, aux Editions du Seuil, ainsi que lecture de Oncle Petros et la conjecture de Goldbach, d'Apostolos Doxiadis.

4 Conjecture de Catalan

- Tout le monde sait que $8 = 2^3$, et que $9 = 3^2$. Autrement dit, 8 est un cube, et 9 un carré.
- La conjecture de Catalan, énoncée par le mathématicien belge Eugène Catalan, est qu'il n'existe pas deux entiers consécutifs qui sont des puissances d'entiers, à part 8 et 9. Ou encore, l'équation $x^m - y^n = 1$, avec x, y, n, m des entiers supérieurs stricts à 1, n'admet qu'une seule solution.
- Ce problème, à l'énoncé très simple, n'a eu une réponse positive que très récemment. Ce n'est en effet que le 18 avril 2002 que Mihailescu rendait public la première preuve de cette conjecture.

5 Empilements de Képler

- En 1609, l'astronome allemand Johannes Kepler s'est attaqué au problème de l'empilement de sphères le plus dense possible.
- Autrement dit, comment ranger des oranges dans un carton afin d'en disposer le plus possible.
- Kepler propose de commencer par répartir les oranges au fond du carton de sorte que chaque orange soit entourée de 6 autres formant un hexagone régulier. Il répète l'opération sur la couche supérieure, mais avec un décalage (on dispose les oranges dans les "trous" laissés par les oranges du rang précédent), et ainsi de suite... On obtient deux formes possibles, suivant que la 3ème couche est superposée à la première ou non.
- En cristallographie, on parle d'empilement hexagonal compact et d'empilement cubique à faces centrées. La densité de ces empilements est alors $\pi/\sqrt{18}$.
- Selon Kepler, ces solutions sont les meilleures possibles : on ne peut pas ranger les oranges de façon plus dense ! Ceci semble intuitivement vrai, d'autant que cette conjecture est confirmée par la nature, puisque c'est ainsi que se disposent les atomes de zinc, de cuivre ou d'aluminium.
- Mais, avant 1998, on n'avait jamais trouvé de preuve mathématique à cela. Thomas Hales en propose une en cette année 1998, et sa démonstration est aussi longue que difficile. Surtout elle fait appel à l'outil informatique de manière nouvelle et impressionnante : plus de 3 gigaoctets de programmes et de données sont nécessaires dans sa preuve !
- Une équipe de 12 chercheurs mandatée par la prestigieuse revue Annals of Mathematics se charge de vérifier la véracité de la preuve. Après plus de 4 ans de travail, elle a rendu le verdict suivant : selon elle, la preuve est valide à 99%, mais elle se déclare incompétente pour vérifier certains détails et calculs.

6 Conjecture de Syracuse

- Prenons un entier n . S'il est **pair**, nous le divisons par **2**. S'il est **impair**, on le multiplie par **3** et on ajoute **1**. Puis on recommence avec le nombre ainsi obtenu. Prenons un exemple, l'entier **10**.
- **10** est pair. $10/2$: on obtient **5**.
- **5** est impair. $3 \times 5 + 1$: on obtient **16**.
- **16** est pair. $16/2$: on obtient **8**.
- **8** est pair. $8/2$: on obtient **4**.
- **4** est pair. $4/2$: on obtient **2**.
- **2** est pair. $2/2$: on obtient **1**.
- Puis à partir de 1, on reproduit une infinité de fois le cycle **4, 2, 1, 4, 2, 1, ...**. On a essayé tous les entiers jusqu'à $3, 2 \times 10^{16}$: on finit toujours par tomber sur 1 ! La conjecture de Syracuse est le fait que ceci est vrai pour tout entier. Très facile à comprendre, aucun mathématicien n'a jamais réussi à le prouver, ni à l'infirmier.