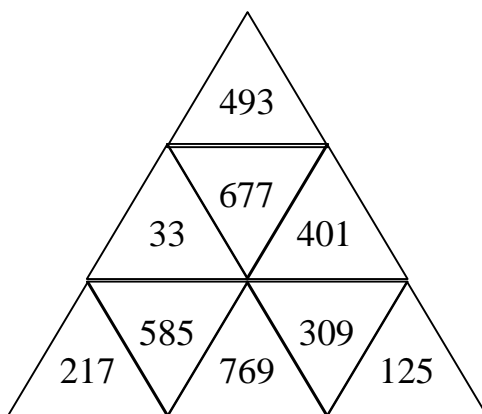


## Les triangles magiques.

Pour l'anniversaire des 92 ans de Mémé en 2005, un ami magicien lui a envoyé ce cadeau :

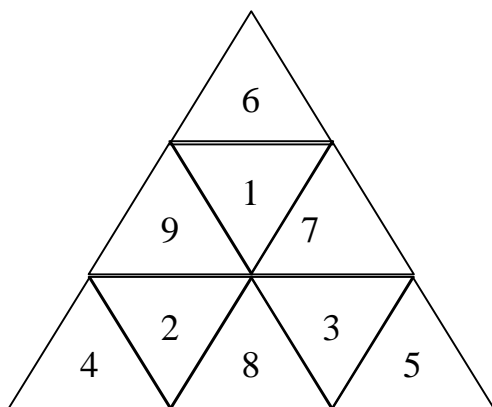


Il s'agit d'un triangle magique :

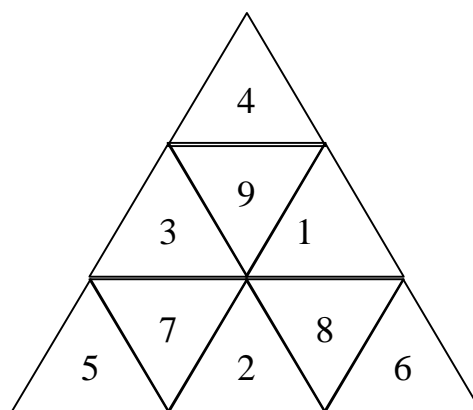
- sur les bordures de chacun des trois côtés, la somme des cinq nombres est 2005
- les nombres utilisés vont de 92 en 92.
- les cinq nombres soulignés formant une couronne ont aussi pour somme 2005  
( $585+33+677+401+309 = 2005$ ).

1°) Prenons les nombres de 1 à 9 (donc de 1 en 1) à répartir dans les neuf cases de triangles magiques. Quelles sommes magiques différentes peut-on obtenir, en respectant la règle des trois totaux identiques de cinq nombres, ainsi que la règle du même total en couronne ?

Voici deux triangles possibles, l'un de somme 22, l'autre de somme 28.

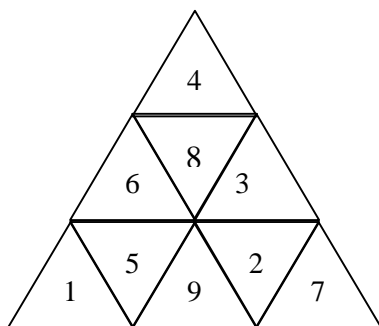


Somme 22

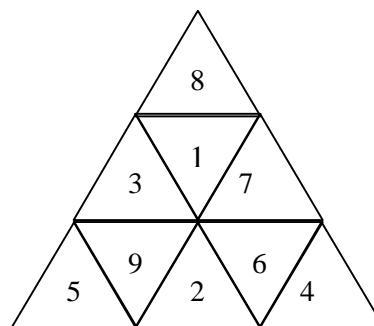


Somme 28

- a) Pourquoi ne peut-on obtenir de somme inférieure à 22 ou supérieure à 28 ?  
 b) Les sommes magiques possibles avec les nombres de 1 à 9 sont 22, 24, 25, 26, 28.  
 On admet qu'on ne peut obtenir les sommes 23 ou 27. Voici les triangles 24 et 26 :



Somme 24



Somme 26

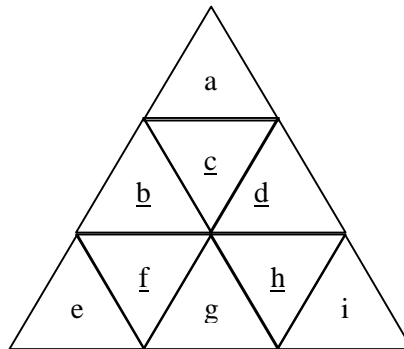
Donner un triangle magique de somme 25.

2°) En vous aidant des exemples précédents, construisez un triangle magique de somme 2006 utilisant des nombres allant de 93 en 93 pour le prochain anniversaire de Mémé.

3°) Aurait-on pu souhaiter l'anniversaire des 90 ans en 2003 ?

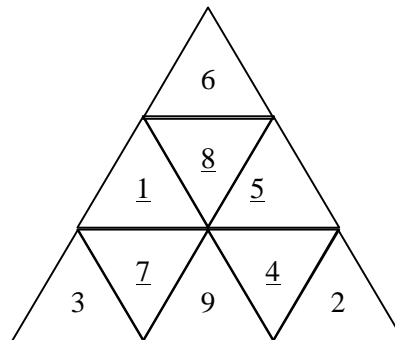
**Solution :**

1°) Donnons un nom aux neuf nombres à placer.



En tournant autour du triangle on peut obtenir trois fois la somme magique, en utilisant les notations ci-dessus on obtient alors  $2a+2c+2e+2f+2h+2i + b+d+g$ , soit deux fois la somme des neuf nombres de 1 à 9 (soit  $2 \times 45$ ) diminuée du total des nombres ( $b+d+g$ ). La somme magique vaut donc  $30 - (b+d+g)/3$ .

Comme  $b, d, g$  sont des nombres différents leur minimum est  $1+2+3 = 6$ , et leur maximum est  $7+8+9 = 24$ . On obtient une somme magique minimum de  $30-8 = 22$  et une somme magique maximum de  $30-2 = 28$ .

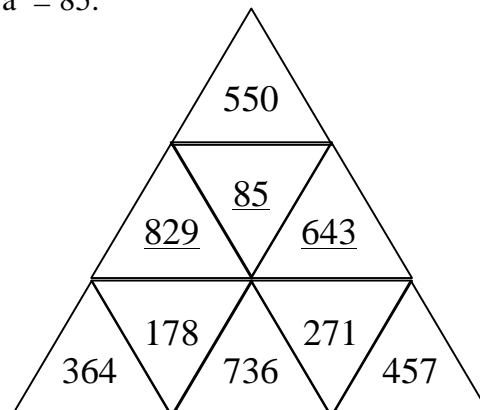


somme 25

2°) Pour 2006, comment construire un triangle avec des nombres allant de 93 en 93 ? Soit  $a$  le plus petit des neuf nombres à utiliser.

En copiant le triangle magique de somme 22 =  $1+2+4+6+9$  où les nombres vont de 1 en 1 à partir de 1, on peut imaginer un triangle où les nombres vont de 93 en 93 à partir de  $a$ , dont la somme est :  $a+(a+93)+(a+3 \times 93)+(a+5 \times 93)+(a+8 \times 93) = 5a + 17 \times 93 = 5a + 1581$ .

On obtient  $5a + 1581 = 2006$ ,  $5a = 425$  d'où  $a = 85$ .



3°) Comment construire un triangle de somme 2003 avec des nombres allant de 90 en 90 ?  
Soit  $a$  le plus petit des neuf nombres à utiliser.

En copiant le triangle magique de somme  $22 = 1+2+4+6+9$  où les nombres vont de 1 en 1 à partir de 1, on peut imaginer un triangle où les nombres vont de 90 en 90 à partir de  $a$ , dont la somme est :  $a+(a+90)+(a+3 \times 90)+(a+5 \times 90)+(a+8 \times 90) = 5a + 17 \times 90 = 5a + 1530$ .

On obtient  $5a + 1530 = 2003$ ,  $5a = 473$  ce qui est impossible avec  $a$  entier.

En copiant le triangle magique de somme  $24 = 1+4+5+6+8$ , on imagine une somme de  $2003 = a+(a+3 \times 90)+(a+4 \times 90)+(a+5 \times 90)+(a+7 \times 90) = 5a + 19 \times 90 = 5a + 1710$  d'où  $5a = 293$  qui n'a pas de solution. On peut continuer sur les modèles 25, 26, ou 28, on échoue.

La somme de cinq nombres formant la somme magique est de la forme  $(5a + 90k)$ .

Si la somme magique cherchée est 2003, il n'y a pas de solution car  $5a$  ne peut finir par 3.

Il n'y a pas eu de souhait d'anniversaire en 2003...