Equation de l'ellipse.

Comme nous l'avons signalé, on peut dessiner une ellipse en attachant une ficelle de longueur donnée (disons $2a$, a étant un nombre positif) à deux piquets F et F'et en faisant tourner un crayon M, la ficelle restant toujours tendue. Ceci doit permettre de trouver une relation

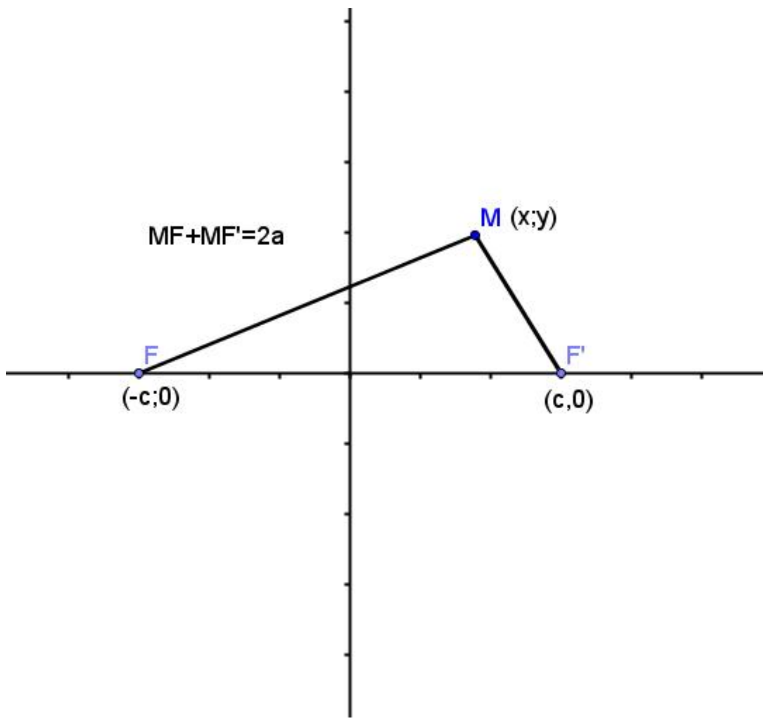

FIG. 1 –

caractérisant les coordonnées du point M dans un repère que l'on choisit comme sur la figure. Les coordonnées de F et F' sont donc de type $(-c;0)$ et $(+c;0)$, c étant un nombre positif. La propriété qui définit l'ellipse peut donc être écrite comme suit :

$$MF + MF' = 2a$$

Cela donnera avec les coordonnées :

$$\sqrt{(x-c)^2+y^2} + \sqrt{(x+c)^2+y^2} = 2a$$

C'est, si on veut l'équation de l'ellipse, mais cette expression n'est guère pratique ! Elevons au carré :

$$(x-c)^2 + y^2 + (x+c)^2 + y^2 + 2\sqrt{(x-c)^2+y^2} \times \sqrt{(x+c)^2+y^2} = 4a^2$$

En développant le début, on trouve :$(x-c)^2+y^2+(x+c)^2+y^2 = 2x^2+2y^2+2c^2$. En reportant et en gardant les racines carrées dans le terme de gauche :

$$2\sqrt{(x-c)^2+y^2} \times \sqrt{(x+c)^2+y^2} = 4a^2 - (2x^2+2y^2+2c^2)$$

ou, en simplifiant par 2 :

$$\sqrt{(x-c)^2+y^2} \times \sqrt{(x+c)^2+y^2} = 2a^2 - (x^2+y^2+c^2)$$

On élève de nouveau au carré :

$$((x-c)^2+y^2)((x+c)^2+y^2) = (2a^2 - (x^2+y^2+c^2))^2$$

En développant les facteurs du terme de gauche :
$((x-c)^2+y^2)((x+c)^2+y^2) = (x^2+y^2+c^2-2cx)(x^2+y^2+c^2-2cx)$
On reconnaît une identité remarquable :
$(x^2+y^2+c^2-2cx)(x^2+y^2+c^2-2cx) = (x^2+y^2+c^2)^2 - 4c^2x^2$
Finalement en reportant :

$$(x^2+y^2+c^2)^2 - 4c^2x^2 = (2a^2 - (x^2+y^2+c^2))^2$$

Si on développe le terme de droite :
$(2a^2 - (x^2+y^2+c^2))^2 = 4a^4 + (x^2+y^2+c^2)^2 - 4a^2(x^2+y^2+c^2)$
En reportant et en simplifiant à droite et à gauche par $(x^2+y^2+c^2)^2$, on se retrouve avec :

$$-4c^2x^2 = 4a^4 - 4a^2(x^2+y^2+c^2)$$

ce qui donne en regrooupant comme il faut :

$$(a^2-c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2-c^2)$$

Si on pose, pour simplifier : $b^2 = a^2 - c^2$, on trouve une équation du type :

$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$$

et, pour faire encore plus joli,en divisant par a^2b^2 :

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1}$$

ce qui est ce qu'on appelle habituellement l'équation cartésienne d'une ellipse.

Il resterait encore bien des choses à dire ...!