

Des nombres...pas réels...

1 Les Impossibles ne sont pas mathématiques !

Les paradoxes ou les impossibilités font souvent progresser les mathématiques.

Vous savez tous qu'il n'est pas possible de sortir 200 euros du porte-monnaie lorsqu'il ne contient que 100 euros. En langage des mathématiques, il n'est pas possible de soustraire 200 à 100. C'est pour dépasser cette impossibilité que des mathématiciens de la Renaissance ont inventé les nombres négatifs ! Avec ces *nouveaux* nombres vous pouvez écrire $100 - 200 = -100$ et ces nombres pourront, dans l'exemple choisi plus haut, représenter d'éventuelles pertes ou dettes.

De même vous savez tous qu'une équation du premier degré à coefficients rationnels (fractions), aura une solution qui sera elle-même un rationnel (une fraction). Par exemple, l'équation $\frac{2}{5}x - \frac{8}{3} = \frac{15}{29}$ aura pour solution une fraction. Ce n'est pas la peine de calculer effectivement la solution pour le savoir : vous savez qu'en combinant des fractions par addition-soustraction et multiplication-division, vous trouverez toujours une fraction.

Mais vous savez aussi qu'il existe des équations du second degré à coefficients rationnels qui n'admettent pas de solution rationnelle. Le premier exemple du genre apparu dans l'histoire est l'équation :

$$X^2 = 2$$

qui donne la longueur de la diagonale d'un carré de côté une unité. Il a fallu du temps, depuis les pythagoriciens qui ont levé ce lièvre, pour accepter et bien comprendre ce qu'étaient les nombres *irrationnels*. Pour bien accepter ce fatal $\sqrt{2}$ qui n'est pas une fraction !

Dans chacun de ces deux cas, à partir de nombres qui sont connus, les mathématiciens fabriquent (ou découvrent) de *nouveaux* nombres. Les négatifs comme images dans un miroir des positifs. Les irrationnels comme limites de fractions¹.

Vous remarquerez que dans chacun de ces exemples, les *anciens* nombres deviennent des cas particuliers des *nouveaux*. Négatifs et positifs se retrouvent tous ensemble sous la dénomination *nombres relatifs*. Rationnels et irrationnels se retrouvent tous ensemble sous la dénomination *nombres réels*.

C'est une impossibilité que vous connaissez bien qui a amené des mathématiciens à concevoir des nombres *non réels*. Vous savez tous qu'il est impossible d'extraire la racine carrée d'un négatif. $\sqrt{-1}$ est une écriture mathématique qui n'a pas de sens. C'est en s'attaquant

¹Et le plus souvent comme limites de décimaux. Par exemple $\sqrt{2}$ peut être considérée comme la limite des valeurs approchées 1,4 ; 1,41 ; 1,414 ; etc...

à cette impossibilité que les mathématiciens italiens de la Renaissance, et en particulier Raffaele Bombelli (1526–1573), ont initié le développement des *nombres imaginaires* . . . qui ne sont pas des réels. . . Les nombres réels et les imaginaires seront rassemblés tous ensemble sous la dénomination *nombres complexes*.

Je vais essayer de donner une petite idée de comment cela s'est passé. . . et de quelques conséquences. . .

2 Jérôme Cardan (1501–1576) et l'équation du 3^{ième} degré.

Résolvons à la manière de ce mathématicien l'équation :

$$x^3 - 9x - 28 = 0$$

Partons de l'identité remarquable suivante, que vous connaissez :

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

et ré-écrivons la sous la forme suivante :

$$(a + b)^3 - 3ab(a + b) - (a^3 + b^3) = 0$$

En comparant avec l'équation étudiée, Jérôme s'est dit que, s'il trouvait deux nombres a et b vérifiant :

$$\begin{cases} -3ab & = -9 \\ -(a^3 + b^3) & = -28 \end{cases}$$

une solution serait facile à déterminer : ce serait alors tout simplement $a + b$.

Génial ! Non ?

D'autant plus que ces relations deviennent :

$$\begin{cases} -27a^3b^3 & = -9^3 \\ -(a^3 + b^3) & = -28 \end{cases}$$

ou encore :

$$\begin{cases} a^3b^3 & = 27 \\ a^3 + b^3 & = 28 \end{cases}$$

Or vous savez parfaitement résoudre ce système si on considère que les inconnues sont a^3 et b^3 . On trouvera a^3 et b^3 en résolvant l'équation du second degré :

$$Y^2 - 28Y + 27 = 0$$

Ensuite, on trouvera a et b en extrayant les racines cubiques² des deux nombres trouvés.

²En observant la représentation graphique de $x \mapsto x^3$, vous verrez facilement qu'à un réel donné α correspond un seul β tel que $\beta^3 = \alpha$. C'est ce nombre β qu'on nomme racine cubique de α , noté $\sqrt[3]{\alpha}$

Je vous laisse la résolution de l'équation du second degré. Comme son discriminant est positif (il vaut 26^2), on trouve deux solutions, ce qui donne :

$$\begin{cases} a^3 = 1 \\ b^3 = 27 \end{cases}$$

et donc :

$$\begin{cases} a = 1 \\ b = 3 \end{cases}$$

C'est ainsi que, grâce à la méthode de Cardan, nous avons trouvé une solution de l'équation de départ : $1 + 3 = 4$.

En fait l'équation n'est pas encore résolue : nous ne savons pas si la solution trouvée est la seule ou s'il y en a d'autres. Il n'est pas difficile (faites le en exercice) de prouver³ que :

$$x^3 - 9x - 28 = (x - 4)(x^2 + 4x + 7)$$

L'équation se ramène donc à une équation produit, et vous voyez que le trinôme $x^2 + 4x + 7$ possède un discriminant négatif. 4 est la seule solution de l'équation du troisième degré étudiée. Cette fois-ci, la tâche est terminée (en tout cas pour ce qui est de notre équation!).

3 Le dilemme de Rafaele Bombelli...

Les choses ne se sont pas passées aussi limpidelement que je vais le décrire, mais ça vous donnera une idée pas si fausse que ça! Rafaele veut résoudre l'équation du troisième degré suivante :

$$x^3 - 15x - 4 = 0$$

Elle n'a pas une allure plus méchante que celle de Jérôme. Rafaele lui applique donc la même méthode. Je vous conseille de vérifier par vous mêmes qu'on arrive au système :

$$\begin{cases} a^3 b^3 = 125 \\ a^3 + b^3 = 4 \end{cases}$$

ce qui amène à résoudre l'équation du second degré suivante :

$$Y^2 - 4Y + 125 = 0$$

Cette équation, comme dans le cas précédent, est censée nous donner a^3 et b^3 , d'où nous déduirons a et b et finalement une solution de l'équation : $a + b$.

Sauf que cette équation possède un discriminant négatif (-22^2)! Elle n'a donc pas de solution...

³Nous savons que 4 est solution, on doit donc pouvoir *diviser* $x^3 - 9x - 28$ par $x - 4$. Nous l'avons fait en exercice, ne vous rappelez vous pas?

Après tout, cela peut signifier que l'équation du troisième degré n'a pas elle-même de solution. Or elle en possède trois ! Ce que Rafaele savait, car ce n'était pas la moitié d'un bon calculateur ! 4 est une solution évidente pour un mathématicien exercé ($4^3 - 15 \times 4 - 4 = 0$, évidemment !). Et de là, en employant la factorisation :

$$x^3 - 15x - 4 = (x - 4)(x^2 + 4x + 1)$$

vous voyez que les deux autres solutions sont celles de l'équation

$$x^2 - 4x + 1 = 0$$

ce qui pour vous est un jeu d'enfant :

$$\text{solution 1 : } -2 + \sqrt{3} \quad \text{solution 2 : } -2 - \sqrt{3}$$

4 L'audace de Rafaele Bombelli.

C'est à ce moment qu'advient une rupture dans les mathématiques connues jusque là ! Rafaele sait qu'un négatif ne possède pas de racine carré, mais il passe outre et écrit ainsi les deux *solutions imaginaires* de l'équation à discriminant négatif :

$$a^3 = \frac{4 + \sqrt{-22^2}}{2} = \frac{4 + 22\sqrt{-1}}{2} = 2 + 11\sqrt{-1} \quad \text{et} \quad b^3 = 2 - 11\sqrt{-1}$$

et il écrit que l'équation du troisième degré admet une solution qui est :

$$a + b = \sqrt[3]{2 + 11\sqrt{-1}} + \sqrt[3]{2 - 11\sqrt{-1}}$$

S'il en était resté là, Rafaele aurait simplement été considéré comme un doux dingue. Mais il va plus loin ! Il sort de son chapeau (les historiens des mathématiques ne savent pas trop comment il a fait) les *nombres imaginaires* suivants :

$$2 + \sqrt{-1} \quad \text{et} \quad 2 - \sqrt{-1}$$

et il les élève au cube en appliquant les règles du calcul algébrique classique :

$$\begin{aligned} (2 + \sqrt{-1})^3 &= 2^3 + 3 \times 2^2 \times \sqrt{-1} + 3 \times 2 \times (\sqrt{-1})^2 + (\sqrt{-1})^3 \\ &= 8 + 12\sqrt{-1} - 6 - \sqrt{-1} \\ &= 2 + 11\sqrt{-1} \\ (2 - \sqrt{-1})^3 &= 2^3 - 3 \times 2^2 \times \sqrt{-1} + 3 \times 2 \times (\sqrt{-1})^2 - (\sqrt{-1})^3 \\ &= 8 - 12\sqrt{-1} - 6 + \sqrt{-1} \\ &= 2 - 11\sqrt{-1} \end{aligned}$$

Pour comprendre ce calcul, il faut se rendre compte que

$$(\sqrt{-1})^2 = -1$$

puisque la bizarrerie $\sqrt{-1}$ est vue comme le *nombre imaginaire* qui élevé au carré donne -1 . En continuant à appliquer les règles classiques, on aura donc bien :

$$(\sqrt{-1})^3 = (\sqrt{-1})^2 \times \sqrt{-1} = -1 \times \sqrt{-1}$$

Et là est le génie de Rafaele Bombelli ! De ces élévations au cube, il déduit (toujours en faisant confiance à l'algèbre classique) :

$$\sqrt[3]{2 + 11\sqrt{-1}} = 2 + \sqrt{-1} \quad \text{et} \quad \sqrt[3]{2 - 11\sqrt{-1}} = 2 - \sqrt{-1}$$

Et il retrouve la solution évidente de l'équation de départ :

$$\sqrt[3]{2 + 11\sqrt{-1}} + \sqrt[3]{2 - 11\sqrt{-1}} = (2 + \sqrt{-1}) + (2 - \sqrt{-1}) = 4$$

Le *nombre imaginaire* $\sqrt{-1}$ disparaît, il était un artifice de calcul qui a tout juste permis de trouver la *vraie* ou *réelle* solution, ce bon vieux 4 ! A son époque, les nombres négatifs n'étaient pas non plus acceptés comme de *vrais* nombres et certains mathématiciens ne voulaient pas s'en servir. D'autres les acceptaient seulement comme des intermédiaires dans les calculs. A la fin, il fallait retomber sur de solides positifs ! Rafaele Bombelli s'est dit que, puisqu'il était possible d'utiliser les négatifs comme intermédiaires dans les calculs, il n'était pas impossible de se permettre d'utiliser les *imaginaires*, pour peu qu'à la fin, on retombe sur de solides nombres *réels*...

Les nombres imaginaires étaient nés !

5 C'est peut-être un peu plus complexe que ça !...

Si on reprend l'équation de Rafaele, quelques questions gênantes apparaissent. La formule audacieuse finit par nous donner la solution 4, mais qu'en est-il des autres solutions ($-2 + \sqrt{3}$ et $-2 - \sqrt{3}$). Comment se fait-il que le tour de passe-passe de Rafaele nous donne l'une des trois solutions et pas les autres ? Dans le cas de l'équation de Jérôme, la méthode nous donnait sans coup férir la solution, d'ailleurs unique. Mais là, il y a quelque chose d'un peu magique qui ne plaît pas beaucoup au mathématicien. Il faut donc aller y voir de plus près.

Admettons qu'il existe un nombre dont le carré soit -1 et notons le, comme le fit Leonhard Euler (1707-1783), \mathbf{i} . On a donc

$$\mathbf{i}^2 = -1$$

On remarque alors que :

$$(-\mathbf{i})^2 = \mathbf{i}^2 = -1$$

Il existe donc deux nombres imaginaires qui, élevés au carré donne -1 . C'est la même chose que pour un positif.

En s'en tenant aux règles habituelles, on aura donc, par exemple :

$$(\sqrt{7} \times \mathbf{i})^2 = (-\sqrt{7} \times \mathbf{i})^2 = -7$$

On peut donc multiplier \mathbf{i} par un réel, et cela donne un imaginaire, dont le carré sera un négatif.

Rien n'empêche d'imaginer l'addition d'un imaginaire et d'un réel, ce qui donnera des *nombres* du type :

$$2 + \mathbf{i}, \quad 2 + 11\mathbf{i}, \quad \sqrt{2} - \sqrt{3}\mathbf{i} \quad \text{etc...}$$

Et rallions nous au grand Carl-Friedrich Gauss (1777–1855) qui écrivait :

« Par quantité imaginaire, j'entends toujours ici une quantité exprimée sous la forme $a + b\sqrt{-1}$ où b n'est pas égal à 0. Si les quantités imaginaires sont à retenir (...) il faudrait qu'on puisse les considérer comme aussi possibles que les quantités réelles, et dans ces calculs je préfère renfermer les quantités réelles et imaginaires toutes les deux sous la dénomination commune de quantités possibles... »

Au lieu de $a + b\sqrt{-1}$ nous écrirons comme Euler, en utilisant la notation actuelle : $a + bi$.

Aujourd'hui, on appelle les nombres de type $a + bi$, a et b étant des réels, les *nombres complexes*. Lorsque $b = 0$ on trouve un nombre réel que nous considérons donc comme un complexe particulier. Lorsque $a = 0$, on trouve un nombre *imaginaire pur* (dont le carré est un négatif!).

Et nous appliquerons les règles de calculs habituelles, comme nous l'avons fait plus haut.

6 Deux calculs.

Les puissances de i On a déjà calculé $i^2 = -1$ et $i^3 = -i$. Vous en déduirez sans peine :

$$i^4 = i^3 \times i = -i \times i = -i^2 = -(-1) = 1$$

Voilà une propriété tout à fait nouvelle pour un nombre ! En l'élevant à la puissance 5 on retrouvera donc sa puissance première, à la puissance 6 sa puissance seconde et ainsi de suite... On tourne en rond !

Les racines cubiques de i ! Recherchons un complexe $a + bi$ qui vérifie

$$(a + bi)^3 = i$$

On pourra légitimement le nommer *racine cubique* de i , n'est-ce-pas ? En développant le membre de gauche, vous trouverez :

$$a^3 + 3a^2bi + 3ab^2i^2 + b^3i^3 = i$$

ou encore, en réduisant le membre de gauche :

$$(a^3 - 3ab^2) + (3a^2b - b^3)i = i$$

Cette égalité aura bien lieu lorsque le système suivant sera vérifié :

$$\begin{cases} a^3 - 3ab^2 = 0 \\ 3a^2b - b^3 = 1 \end{cases}$$

La première équation est vérifiée lorsque $a = 0$ ou lorsque $a^2 = 3b^2$. Dans le premier cas, en reportant dans la deuxième équation, vous trouvez $b^3 = -1$, soit $b = -1$ et nous trouvons le nombre $-i$ qui, élevé au cube (vérifiez le), donne bien i .

Dans le deuxième cas, en reportant dans la deuxième équation, vous trouvez $8b^3 = 1$, soit $b = \frac{1}{2}$.

D'où $a = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$. Nous trouvons donc deux nombres complexes :

$$\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \quad \text{et} \quad -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$$

Et vous pouvez vérifier que ces deux nombres complexes élevés au cube donnent bien l'imaginaire pur i .

Le nombre complexe \mathbf{i} possède donc **trois** racines cubiques $(-\mathbf{i}, \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\mathbf{i}, -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\mathbf{i})$, et ça, c'est riche ! Un réel ne possède en effet qu'une seule racine cubique !

7 Résumé et travaux pratiques

7.1 Où en sommes nous ?

Nous sommes en présence de nouveaux nombres, les nombres complexes, sur lesquels nous pouvons calculer comme sur les anciens, même si les résultats sont parfois surprenants. Ces nombres peuvent être écrits sous la forme suivante :

$$a + b\mathbf{i} \quad \text{avec } a, b \text{ des nombres réels}$$

Les calculs se font comme sur des nombres réels, en ajoutant une règle supplémentaire :

$$\mathbf{i}^2 = -1$$

Les réels se retrouvent être des cas particuliers de nombres complexes.

7.2 Travaux pratiques.

T.P. 1 Calculer la somme et le produit des complexes $a + b\mathbf{i}$ et $c + d\mathbf{i}$ (a, b, c, d des réels).

T.P. 2 Montrer que l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ (a, b, c des réels) possède **toujours** une ou deux solutions complexes.

T.P. 3 Calculer les deux nombres complexes qui élevés au carré donnent tous les deux \mathbf{i}

T.P. 4 Montrer que, quels que soient a et b réels, le produit de $a + b\mathbf{i}$ et $a - b\mathbf{i}$ est toujours un réel positif.

T.P. 5 Résoudre à la *Cardan* l'équation $x^3 - 3x + 3 = 0$.

T.P. 6 Résoudre à la *Bombelli* l'équation $x^3 - 3\sqrt[3]{2}x + 2 = 0$. Je vous donne l'indication nécessaire suivante :

$$\left(\frac{1 + \mathbf{i}}{\sqrt[3]{2}}\right)^3 = -1 + \mathbf{i} \quad \text{et} \quad \left(\frac{1 - \mathbf{i}}{\sqrt[3]{2}}\right)^3 = -1 - \mathbf{i}$$