

CALCUL DES RACINES CARRÉES À LA MAIN.

1 Première version de l'algorithme.

1.1 Description de l'algorithme.

Soit un nombre entier positif A que je suppose pour le moment à *quatre chiffres* (par exemple 5763). Je cherche ce qu'on appelle la **racine carrée entière** de A (en abrégé RCE de A), c'est-à-dire le plus grand entier a dont le carré est inférieur ou égal à A . Je peux donc écrire :

$$a^2 \leq A < (a + 1)^2$$

La différence entre A et a^2 est appelée le *reste*.

Dans un premier temps je vais décrire l'algorithme sans le justifier, en l'appliquant au nombre $A = 5763$.

1. La RCE cherchée est un nombre à deux chiffres, c'est-à-dire que $a = 10d + u$, d et u étant deux nombres compris entre 0 et 9. Je dois donc déterminer ces deux nombres.
2. d est la RCE du nombre de dizaines de A (dans l'exemple $d = 7$). Remarquez que l'exécution de cet algorithme vous oblige à connaître par coeur les RCE des entiers inférieurs à 100. Ce n'est pas une énorme performance !
3. Je calcule $A - (10d)^2$ (ici $5763 - 4900 = 863$).
4. Je double d (ici cela donne 14).
5. Je détermine le quotient entier q du nombre de dizaines de $A - (10d)^2$ par $2d$ (dans l'exemple il faut déterminer le quotient entier de 86 par 14, ce qui donne $q = 6$). Le nombre u cherché est inférieur ou égal à ce quotient q (ici, u inférieur ou égal à 6).
6. Je calcule $(2d \times 10 + q) \times q$.
7. (a) Si $A - (10d)^2 \geq (2d \times 10 + q) \times q$, alors le nombre u cherché est q . Ce n'est pas le cas dans notre exemple, car $146 \times 6 = 876$.
(b) Dans le cas contraire, j'essaye $q - 1$ de la même manière et j'enlève si nécessaire encore une unité ($q - 2$) jusqu'à ce que la condition $A - (10d)^2 \geq (2d \times 10 + q) \times q$ soit remplie. Dans mon exemple, si je baisse à 5, j'obtiens $145 \times 5 = 725$ et ça convient, donc $u = 5$
8. Dans notre exemple, la RCE de 5763 est donc 75, le reste est $863 - 725 = 138$.

1.2 Présentation pratique de l'algorithme.

57 63	75	chiffre des dizaines :7
- 49	14 6	86 divisé par 14 \longrightarrow 6
<hr style="width: 100%;"/> 8 6*3	× 6	
	<hr style="width: 100%;"/> 87 6	trop fort
	14 5	chiffre des unités : 5
	× 5	
<hr style="width: 100%;"/> - 7 25	<hr style="width: 100%;"/> 72 5	
<hr style="width: 100%;"/> 1 38		\longleftarrow le reste

1.3 Exercice à faire pour vérifier que vous savez faire.

Déterminez à la main la RCE de 8927 et le reste.

Ne regardez pas tout de suite la solution (qui est au dessous)!

Vous pouvez vous donner autant d'exercices que vous voulez et vérifier ensuite à la calculatrice!

89 27	94	chiffre des dizaines :9
- 81	18 4	82 divisé par 18 \longrightarrow 4
<hr style="width: 100%;"/> 8 2*7	× 4	
	<hr style="width: 100%;"/> 73 6	chiffre des unités : 4
- 7 36		
<hr style="width: 100%;"/> 91		\longleftarrow le reste

2 Généralisation de l'algorithme à des nombres plus grands.

Il n'est pas nécessaire d'avoir beaucoup d'imagination pour obtenir la généralisation de l'algorithme. La voilà sur un exemple :

2 3 4 5 8 5 6	1 5 3 1 \longleftarrow	chiffre des 10^3 :1
- 1 0 0	2 6	2 : double de 1
<hr style="width: 100%;"/> 1 3 4	× 6	quotient entier de 13 par 2 = 6
- 1 2 5	<hr style="width: 100%;"/> 1 3 6 \longleftarrow	trop fort
<hr style="width: 100%;"/> 9 5 8	2 5	
- 9 0 9	× 5	
<hr style="width: 100%;"/> 4 9 5 6	<hr style="width: 100%;"/> 1 2 5 \longleftarrow	le chiffre des 10^2 :5
- 3 0 6 1	3 0 3	30 : double de 15
<hr style="width: 100%;"/> 1 8 9 5	× 3	quotient entier de 95 par 30 = 3
	<hr style="width: 100%;"/> 9 0 9 \longleftarrow	le chiffre des 10^1 :3
	3 0 6 1	306 double de 153
	× 1	quotient entier de 495 par 306 = 1
	<hr style="width: 100%;"/> 3 0 6 1 \longleftarrow	le chiffre des unités :1

La racine carrée entière de 2345856 est donc 1531 et le reste est 1895.

3 Démonstration de l'algorithme.

Je vais faire la démonstration dans le cas d'un nombre à quatre chiffres. Cette démonstration se généralise au prix de notations compliquées qui n'ajoutent rien au fond ! On peut sans honte (à mon humbe avis) se contenter de la démonstration qui suit.

3.1 Etape 1

Je montre en premier que la RCE de A (4 chiffres) est un nombre de 2 chiffres. Soit a la RCE de A . je peux écrire $a \leq \sqrt{A} < a + 1$. Je peux écrire aussi $10 < \sqrt{A} < 100$. J'ai donc :

$$10 < \sqrt{A} < a + 1 \quad \text{ce qui entraîne} \quad 10 \leq a$$

Je peux écrire aussi :

$$a \leq \sqrt{A} < 100 \quad \text{ce qui entraîne} \quad a < 100$$

J'ai bien ce que je disais : $10 \leq a < 100$, c-a-d a est un nombre à deux chiffres !

3.2 Etape 2.

Je montre en deuxième que le chiffre des dizaines de la RCE de A est la RCE du nombre de centaines de A .

Notations. J'appelle $a = 10d + u$ la RCE de A ($0 < d \leq 9$ et $0 \leq u \leq 9$).

Je pose $A = 100x + y$ avec $0 < x \leq 9$ et $0 \leq y < 100$. x est donc le nombre des centaines de A .

Je note δ la RCE de x (j'ai donc $\delta^2 \leq x < (\delta + 1)^2$ relation (*))

Il faut donc montrer que $d = \delta$.

Un premier résultat. Je montre en premier que $100\delta^2 \leq A < 100(\delta + 1)^2$ (relation(i)).

1. L'inégalité large est facile. D'après la relation (*) : $100\delta^2 \leq 100x$.
De plus $100x \leq 100x + y$ c'est-à-dire $100x \leq A$. Il en résulte $100\delta^2 \leq A$.
2. L'inégalité stricte de droite est un peu plus délicate.
D'après la relation (*) : $(\delta + 1)^2 - x > 0$ ce qui revient à écrire, puisque tous les nombres en jeu sont des entiers : $(\delta + 1)^2 - x \geq 1$. En multipliant par 100 :

$$100(\delta + 1)^2 - 100x \geq 100$$

En enlevant des deux côtés de l'inégalité le nombre y :

$$100(\delta + 1)^2 - 100x - y \geq 100 - y$$

En tenant compte de $y < 100$ et $A = 100x + y$ on obtient bien :

$$100(\delta + 1)^2 - A \geq 100 - y > 0 \quad \text{d'où} \quad 100(\delta + 1)^2 - A > 0 \quad \text{d'où} \quad A < 100(\delta + 1)^2$$

Une démonstration par l'absurde. Je vais montrer par l'absurde que $d < \delta$ est impossible ainsi que $d > \delta$. On aura alors nécessairement $d = \delta$ ce qui est le résultat final visé.

1. Je suppose que $d < \delta$.

Comme $a = 10d + u$ j'aurai nécessairement $a < 10\delta$ ou, puisque tous les nombres en jeu sont des entiers : $a + 1 \leq 10\delta$.

En élevant au carré : $(a + 1)^2 \leq 100\delta^2$. Mais, d'après la relation (i) démontrée au dessus : $100\delta^2 \leq A$. On en déduit alors :

$$(a + 1)^2 \leq A$$

C'est en contradiction avec la définition de a qui affirme $A < (a + 1)^2$.

$d < \delta$ est donc faux.

2. Je suppose maintenant que $\delta < d$.

Puisque tous les nombres en jeu sont des entiers : $\delta + 1 \leq d$. Je multiplie par 10 : $10(1 + \delta) \leq 10d$. Comme $10d \leq a$, j'obtiens :

$$10(1 + \delta) \leq a \quad \text{d'où} \quad 100(1 + \delta)^2 \leq a^2$$

D'après la relation (i) démontrée plus haut : $A < 100(\delta + 1)^2$. On en déduit : $A < a^2$ ce qui est en contradiction avec la définition de la RCE de A : $a^2 \leq A$.

Cela prouve que $\delta < d$ est faux.

3. J'ai bien prouvé que $\delta = d$

3.3 Etape 3.

Je montre en troisième que le chiffre des unités de la RCE de A est inférieur ou égal au quotient entier du nombre de dizaines de $A - (10d)^2$ par $2d$, d étant le nombre des dizaines de la RCE de A , nombre trouvé précédemment.

Je pose comme dans les premières étapes : $a = 10d + u$ et $A = (10d + u)^2 + R$. R est le reste. En développant :

$$A = (10d)^2 + 10 \times 2d \times u + u^2 + R$$

J'opère la division entière de $u^2 + R$ par 10 :

$$u^2 + R = q \times 10 + r \quad \text{avec} \quad 0 \leq r < 10$$

J'obtiens :

$$A - (10d^2) = (2d \times u + q) \times 10 + r \quad \text{avec} \quad 0 \leq r < 10$$

Cela signifie que $2d \times u + q$ est le nombre des dizaines de $A - (10d)^2$.

Je divise q par $2 \times d$ et j'obtiens : $q = \alpha \times 2d + \beta$ avec $0 \leq \beta < 2d$.

Pour finir : $2du + q = (u + \alpha) \times 2d + \beta$. Cela signifie que $u + \alpha$ est le quotient du nombre des dizaines de $A - (10d^2)$ par $2d$.

Comme $u \leq u + \alpha$, j'ai bien démontré que u , nombre des unités de la RCE de A est inférieur ou égal au quotient du nombre des dizaines de $A - (10d^2)$ par $2d$.

3.4 Une dernière précision sur l'algorithme.

Quand on calcule le quotient entier de $A - (10d)^2$ par $2d$, on trouve un nombre n qui est soit u soit un nombre trop grand. Il faut donc *essayer*, c'est-à-dire calculer $(10d + n)^2$ et le comparer à A . Si on a $A - (10d + n)^2 \geq 0$, on a gagné. En développant :

$$A - (10d + n)^2 = A - (10d)^2 - (2 \times d \times 10 \times n + n^2) = (A - (10d)^2) - (2 \times d \times 10 + n) \times n$$

Cela explique pourquoi, dans l'algorithme, on calcule $(2 \times d \times 10 + n) \times n$ pour le comparer à $A - (10d)^2$. C'est plus économique que de calculer $(10d + n)^2$ et de le comparer à A .

4 Racine carrée à 10^{-n} près d'un nombre décimal.

Exemple 1. Supposons que je veuille obtenir la valeur approchée à 10^{-4} près de 2. Je vais chercher la RCE de 2×10^8 par l'algorithme décrit, je trouverai 14142 et il suffira que je place la virgule correctement !

Exemple 2. Supposons que je veuille la racine carrée à 10^{-3} près de 2,345856. Je calculerai (voir exemple d'application de l'algorithme) la RCE de 2345856, je trouverai 1531 et il suffira que je place la virgule correctement !

Exemple 3. Supposons que je veuille la racine carrée à 10^{-5} près de 2,345856. Je calculerai la RCE de 23458560000, je trouverai un résultat entier et il suffira que je place la virgule correctement !