Ensemble de nombres et Arithmétique.

I. Les ensembles de nombres.

Nous avons rencontré et manipulé jusqu'à présent différentes sortes de nombres. Nous allons maintenant les classer par catégorie :

- $\mathbb{N} = \{\ 0\,;1\,;2\,;3\,;\ldots.\ \}$ est l'ensemble des …………………………………….
- $\mathbb{Z} = \{\ \ldots;\ -3\,;-2;-1\,;\ 0;\ 1;\ 2;\ 3;\ \ldots\ \}$ est l'ensemble des ………………...
- $\mathbb{D}$ est l'ensemble des …………………………..

Remarque :

- Les nombres décimaux sont les seuls nombres connus par les calculatrices.
- Pour les autres nombres (exemple : $\frac{2}{7}\,;\sqrt{2}$ etc.) elles ne donnent qu'une valeur approchée.

- $\mathbb{Q}$ est l'ensemble des nombres ………….……..

- Un nombre rationnel est un nombre qui peut s'écrire comme quotient de deux nombres entiers.
- Tous les nombres décimaux sont des nombres rationnels (ex : …………………) mais les nombres rationnels ne sont pas tous des décimaux (ex : ……………………..).

- $\mathbb{R}$ est l'ensemble des réels.

Certains nombres comme $\sqrt{2}$ ou π ne peuvent s'écrire comme quotient de deux entiers , ce sont des nombres irrationnels (non rationnels). R est l'ensemble qui regroupe les rationnels et les irrationnels .

Remarque :
On a les inclusions suivantes : $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ « $\subset$ » se lit « est contenu dans » ou « inclus ».

Exercice : Donner l'ensemble le plus petit auquel appartient le nombre n :

n	-12	2.03	$\sqrt{5}$	4	$\frac{22}{7}$	-1.2	$\frac{16}{5}$	$\sqrt{15}$	$\frac{2}{3}$	14	$\frac{32}{4}$	-2.5	10^5	$\sqrt{64}$
Appartient à														

II. Diviseur d'un entier naturel et critères de divisibilité

Définition : Soient a et k deux entiers naturels tels que $k \neq 0$.
Lorsque $\frac{a}{k}$ est un entier naturel, on dit que k est un diviseur de a (a est un multiple de k).
Autrement dit, il existe un entier naturel n tel que $a = k \times n$

Exemple :

- 5 est diviseur de 25 et 6 est un diviseur de 42.
- Les diviseurs de 54 sont : …………………………………………………………………

Critère de divisibilité :

- Un entier est divisible par 2 s'il est pair.
- Un entier est divisible par 3 si la somme de ces chiffres est un multiple de 3.
- Un entier est divisible par 4 si le nombre constitué de deux derniers chiffres est un multiple de 4.
- Un entier est divisible par 5 si ce nombre se termine par 0 ou 5.
- Un entier est divisible par 9 si la somme de ces chiffres est un multiple de 9.

Exercice : Compléter en mettant une croix si le nombre N est divisible par :

N =	18	44	100	21	144	2520	35	15	693
Par 2									
Par 3									
Par 4									
Par 5									
Par 9									

III. Les nombres premiers:

Définition : Un nombre premier est un nombre entier naturel qui admet exactement deux diviseurs, lui-même et 1.

Exemple :

- 5 est un nombre ……………………
- 6 est un nombre ……………………
- 1 est un nombre ……………………

Remarque : Le crible d'Eratosthène permet d'écrire la liste des nombres premiers inférieurs à un nombre *n*. On écrit tous les entiers par exemple inférieur à n, puis on barre le 1, puis tous les multiples de 2 sauf le 2, puis les multiples de 3 sauf le 3 et ainsi de suite jusqu'à $\sqrt{n}$.

Exemple : les nombres premiers inférieurs à 100 sont :

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

Les nombres premiers inférieurs à 100 sont donc :

Théorème : Un entier n est premier s'il n'admet pas de diviseur premier d tel que $d \leqslant \sqrt{n}$.

Exercice : Le nombre 1037 est-il premier ?

IV. Décomposition en produit de facteurs premiers :

Propriété : Un entier naturel supérieur ou égal à 2 est premier ou s'écrit de manière unique comme produit de facteurs premiers.

Exemple : Décomposer 55125 en produit de facteurs premiers.

$$\begin{array}{l|l}
55125 & 5 \\
11025 & 5 \\
2205 & 5 \\
441 & 7 \\
63 & 7 \\
9 & 3 \\
3 & 3 \\
1 &
\end{array}$$

Donc $55125 = 5^3 \times 3^2 \times 7^2$

V. Le PGCD de deux entiers naturels :

Définition : Soient a et b des entiers naturels non nuls.
Le plus grand élément des diviseurs communs de a et de b, est le plus grand commun diviseur de a et de b (c'est-à-dire le PGCD de a et de b).

Exemple n° 1 :
Déterminer les diviseurs de 27 et de 15 puis en déduire le PGCD de 27 et 15.
Les diviseurs de 27 sont : …………………………………..

Les diviseurs de 15 sont : …………………………………..

Donc PGCD(27 ; 15) = ………………..

Exemple n° 2 :
Décomposer en produits de facteurs premiers 450 et 840 puis en déduire le PGCD de 450 et de 840.

On a 450 =…………….. et 840 = …………… donc le PGCD (450 ; 840) = ……….=…..

L'Algorithme d'Euclide : Il permet de déterminer le PGCD (a ; b). L'algorithme consiste à établir la succession des divisions de a par b, puis de b par le reste et ainsi de suite tant que le reste n'est pas nul. Le dernier reste non nul est le PGCD de a et de b.

C'est à dire si $a = b\times q + r$ alors $PGCD\ (a ; b) = PGCD\ (b ; r)$

Exemple 1 : Déterminer le PGCD (148 ; 15) avec l'algorithme d'Euclide.
$148 = 15\times 9 + 13$
$15 = 13\times 1 + 2$
$13 = 2 \times 6 + 1$
$2 = 1\times 2 + 0$
D'où le PGCD (148 ; 15) = 1

Exemple 2: Déterminer le PGCD (230 ; 22) avec l'algorithme d'Euclide.
$230 = 22\times(10) + 10$
$22 = 10\times 1 + 2$
$10 = 2\times 5 + 0$

D'où le PGCD (230 ; 22) = 2

Propriété : Si b divise a alors PGCD (a ; b) = b.

Propriété : Soient a et b deux nombres entiers.
- Si k est un entier naturel non nul alors PGCD (ka ; kb) = k PGCD (a ; b)

Théorème : Soient a, b deux nombres entiers positifs.
L'ensemble des diviseurs communs de a et b est le même que l'ensemble des diviseurs de b et de $a - b$.
D'où $PGCD\ (a ; b) = PGCD\ (b ; a - b)$ (b et le plus petit des deux et $a - b$ est le reste de la soustraction du plus grand moins le plus petit)

Exercice d'application n° 1 : Déterminer par cette méthode le PGCD de 168 et de 264.
$264 - 168 = 96$
$168 - 96 = 72$
$96 - 72 = 24$
$72 - 24 = 48$

48 – 24 = 24
24 – 24 = 0   donc PGCD (168 ; 264) = 24.

Exercice d'application n°2 : Déterminer par cette méthode le PGCD de 2470 et de 3230.

VI. Nombres premiers entre eux :

Définition : On dit que deux entiers naturels a et b sont premiers entre eux si PGCD (a ; b) = 1

VII. Application du PGCD :

Définition : Lorsque le numérateur et le dénominateur d'une fraction sont premiers entre eux, on dit que cette fraction est irréductible.

Propriété : En simplifiant la fraction $\frac{a}{b}$ par le PGCD (a ; b) on obtient une fraction irréductible.

Exercice : Simplifier la fraction suivante : $A = \frac{138807}{52089}$.

Exercice : Un panneau publicitaire a la forme d'un rectangle de dimensions 4.50 m et 1.80 m. On veut le recouvrir d'encarts publicitaires carrés de façon optimale, c'est-à-dire que la régie publicitaire ne veut perdre aucun espace sur ce panneau. On se propose de déterminer la taille maximale des encarts publicitaires. Soit a la mesure en cm du côté du carré.