GENERALITE SUR LES FONCTIONS

I) Fonctions :

1) Définition :

Exprimer A en fonction de B, c'est écrire une égalité de la forme A = * , où * est une expression faisant intervenir B, des nombres, mais ne faisant pas intervenir A

Exemple :
La facture d'eau se décompose de la manière suivante : abonnement de 8 euros et consommation de 0.5 euros par m^3.
1. Exprimer, en fonction de x, le montant de la facture y pour une consommation de x m^3.
2. Exprimer, en fonction de y, le volume d'eau x pour une facture de y euros.

Fonction : D étant une partie de l'ensemble des réels, lorsque, à chaque réel x de D, on associe un seul réel y, on défini une fonction f sur l'ensemble D.
On note : $f : x \longmapsto y$ où $y = f(x)$
On lit : fonction f qui à x associe y où y est égal à f de x.

Rem :
D est appelé ensemble de définition de f. D n'est pas obligatoirement un intervalle, mais D est toujours une partie de $\mathbb{R}$.

Exercice 5 Calculatrice
Exemple
Relier chacune des expressions à la fonction qui lui est associée.

Doubler •	• f définie par : $f(x) = x^2$
Mettre au carré •	• f définie par : $f(x) = 2x$
Augmenter de 2 •	• f définie par : $f(x) = x - 3$
Diminuer de 3 •	• f définie par : $f(x) = x + 2$
Prendre l'opposé •	• f définie par : $f(x) = -x$
Prendre l'inverse •	• f définie par : $f(x) = 1/x$
Doubler puis mettre au carré •	• f définie par : $f(x) = 4x^2$
Mettre au carré puis doubler •	• f définie par : $f(x) = 2x^2$

Exemple : Déterminer l'ensemble de définition à partir de l'expression algébrique
f(x) $= \dfrac{-2x+1}{x+3}$; g(x) $= \sqrt{x+1}$

Méthodes: Dans le cas d'une fonction définie par une expression algébrique, on peut être obligé de poser certaines conditions:

a) l'expression comporte un dénominateur qui peut s'annuler ; la condition est :
$$\frac{1}{u(x)} \text{ existe si et seulement si } u(x) \neq 0$$
b) l'expression comporte une racine carrée, la condition est:

$\sqrt{u(x)}$ existe si et seulement si u(x) $\geqslant 0$

Vocabulaire :

- x est la variable
- $f(x)$ est l'image de x par la fonction f
- x est un antécédent de y par f

Exemples : Déterminer des images et des antécédents à partir d'une expression algébrique :

Soit la fonction f définie sur $[-5\ ;\ 5]$ par : $f(x) = \dfrac{3x^2}{2x^2+1}$.

a) Déterminer l'image de 1

b) Déterminer le(s) antécédents de 1 par f

Méthode :

Quand on cherche l'image d'un réel a de D par f, on doit calculer f(a)

Déterminer les éventuels antécédents d'un réel b par f signifie qu'il faut résoudre l'équation f(x) = b.

2) Courbe représentative

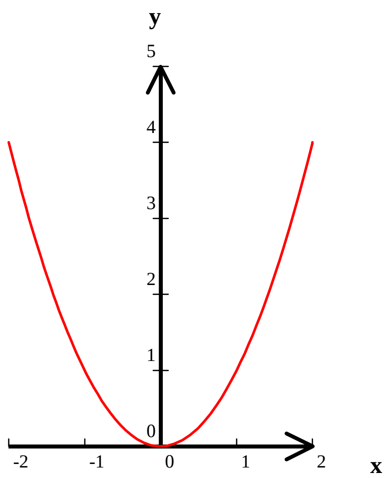
Déf2 : Dans le plan muni d'un repère (O ; I, J), la courbe représentative C de la fonction f définie sur D est l »ensemble des points M de coordonnées (x ; y) avec :

- x un élément de D
- y est l'image de x par f, soit y = f(x)

On dit que la courbe C a pour équation y = f(x). La courbe représentative de la fonction f s'appelle représentation graphique de la fonction f.

Conséquence : D est l'ensemble des réels x qui ont une image par f

Exemple :



Ensemble de définition ? Image de $\dfrac{1}{2}$? Antécédents de 4 ?

3) Tableau de valeur

Déf : Soit f une fonction numérique de D dans ℝ. Un tableau de valeurs est un tableau de deux lignes :
La $1^{ère}$ ligne contient la variable x
La $2^{ème}$ ligne contient les valeurs prises par f : image des valeurs de la $1^{ère}$ ligne

Exemple

Soit la fonction f définie par : $f(x) = x^2 - 5$.
On va utiliser la calculatrice pour compléter le tableau de valeurs ci-dessous :

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$							

On dit aussi « Tabuler la fonction f à partir de -3 avec un pas de 1 ».

- Rentrer la fonction sous **Y1** avec le menu $\boxed{\text{Y=}}$.
- Activer le menu $\boxed{\text{2nd}}$ $\boxed{\text{WINDOW}}$ alias $\boxed{\text{TBLSET}}$:
  - **TblStart** est la variable initiale : 2 ;
  - **Tbl** est le pas : 1 est l'écart entre deux variables successives ;
  - **Indepnt** et **Depend** sont en mode automatique : **AUTO**.
- Pour afficher le tableau, il suffit de sélectionner le menu $\boxed{\text{2nd}}$ $\boxed{\text{GRAPH}}$ alias $\boxed{\text{TABLE}}$.

  Les touches ▲ et ▼ permettent de descendre ou de remonter dans le tableau.
-] Pour calculer des images « isolées » (par exemple, la dernière variable 3 est remplacée par 5), on modifie le réglage du menu $\boxed{\text{TBLSET}}$ en choisissant le mode **Ask** pour l'affichage **Indepnt** ; il suffit de rentrer une à une ces valeurs « isolées » de x et de voir le tableau se remplir.

II) Sens de variation d'une fonction :

1) Définitions :

Déf3 : Soit f une fonction définie sur un intervalle I on dit alors que :

- f est croissante sur un intervalle I si, pour tous réels a et b de l'intervalle I, on a :
  Si $a \leqslant b$, alors $f(a) \leqslant f(b)$
- f est décroissante sur un intervalle I si, pour tous réels a et b de l'intervalle I, on a :
  Si $a \leqslant b$, alors $f(a) \geqslant f(b)$
- f est constante sur un intervalle I si pour tous réels a et b de I , on a :
  Si $a \leqslant b$, alors $f(a) = f(b)$

Traduction

Soit f une fonction définie sur un intervalle I ; alors deux réels de I

- sont rangés dans l'ordre, lorsque la fonction f est croissante sur I
- sont rangés dans l'ordre, lorsque la fonction f est croissante sur I
- ont la même image lorsque f est constante

Application : Comparer des images de fonctions

Exemple : La fonction f est croissante sur $[-1 ; 3]$ et décroissante sur $[3 ; 10]$
1)Comparer les images $f(0)$ et $f(2)$
2)Comparer les images $f(7)$ et $f(5)$
3)Comparer les images $f(0)$ et $f(5)$

2) Maximum, minimum, extremum

Déf6 : Soit f une fonction définie sur un intervalle I

- La fonction admet un maximum en a sur I, si, pour tout réel x de I, $f(x) \leqslant f(a)$
- La fonction admet un minimum en a sur I, si, pour tout réel x de I, $f(x) \geqslant f(a)$
- La fonction admet un extremum en a sur I, si f admet soit un minimum soit un maximum en a.

3) Tableau de variation :

On représente les variations d'une fonction f définie sur un intervalle I par un tableau de selon les conventions suivantes :

- une 1$^{\text{ère}}$ ligne concernant la variable où apparaissent les borne de l'intervalle I et les valeurs pour lesquelles f admet des extrema
- une 2$^{\text{nde}}$ ligne concernant les valeurs prises par f dans laquelle apparaissent les images des valeurs de la 1$^{\text{ère}}$ ligne (si on peut les déterminer)
- des flèches, montantes ou descendantes reliant ces images, indiquent si la fonction est croissante ou décroissante entre ces deux valeurs
- ces flèches indiquent que la fonction prend une et une seule fois toutes les valeurs comprises dans l'intervalle défini par deux extrema successifs.
- Il est conseillé de répartir verticalement les images en fonction de leurs valeurs, cela facilite la lecture du tableau.

4) Résolution graphique d'équations et d'inéquations

Prop : Soient f et g deux fonctions définies sur D. Soient $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ leurs courbes représentatives dans le plan repéré.
Alors les solution de l'équation $f(x) = g(x)$ sont les abscisses des points d'intersection de ces courbes.

Conséquence :
Soient b un réel, f une fonction définie sur D et $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans le plan repéré. Alors les solutions de l'équation $f(x) = b$ sont les antécédents de b par f.

Prop : Soient f et g deux fonctions définies sur D. Soient $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ leurs courbes représentatives dans le plan repéré.
Alors les solutions de :

- l'inéquation $f(x) > g(x)$ sont les abscisses des points de $\mathscr{C}_f$ situés strictement au-dessus de ceux correspondant de $\mathscr{C}_g$.
- l'inéquation $f(x) \leqslant g(x)$ sont les abscisses des points de $\mathscr{C}_f$ situés au-dessous de ceux correspondant de $\mathscr{C}_g$.