

## Fiche méthode: L'analyse dimensionnelle

### 1 Dimension d'une grandeur physique

- La dimension d'une grandeur est, pour simplifier, sa *nature physique*. Une grandeur peut avoir la dimension d'une longueur, d'une énergie, d'une masse ...  
La notion de dimension est très générale et ne suppose aucun choix particulier de systèmes d'unités: une grandeur ayant la dimension d'une longueur peut s'exprimer en mètres, en centimètres, en pouces, en inches ou en miles !
- En théorie, lorsqu'on demande "Quelle est la dimension de  $L$  ? ", il faut répondre "  $L$  a la dimension d'une longueur" et non pas "  $L$  est en mètres" .... comme vous le feriez probablement!
- Une grandeur purement numérique, comme le rapport de deux longueurs, est dite sans dimension. Mais attention, elle peut parfois avoir une unité (exemple: un angle est en radians ou en degrés !!!)
- Il existe **7 grandeurs de base** du système international, choisi par les physiciens, à partir desquelles on peut former toutes les grandeurs de la physique !!! Nous les nommerons dans un prochain paragraphe.

### 2 Utilisation de l'analyse dimensionnelle

- Tester l'homogénéité d'une expression est un critère permettant d'éliminer des résultats donc on sait qu'ils sont nécessairement faux.

*Une équation est homogène lorsque ses deux membres ont la même dimension.*

*Une expression non homogène est nécessairement fautive !!*

- Pour manipuler les équations aux dimensions, on utilise les règles suivantes:
  - On ne peut additionner que des termes ayant la même dimension.
  - Dans une fonction trigonométrique (sinus, cosinus, tangente), le nombre est forcément sans dimension.
  - La dimension du produit de deux grandeurs est égale au produit de leurs dimensions.
  - La dimension de  $A^n$  est la dimension de  $A$  à la puissance  $n$  ... ( $n$  est, quant à lui, sans dimension !!!)

### 3 Dimension et unités

- Pour l'utilisation que nous en ferons cette année, nous pouvons ramener le problème des équations aux dimensions à celui des unités.

Pensez bien tout de même que la dimension d'une grandeur renseigne sur sa nature physique, sur ce qu'elle est vraiment alors que l'unité n'est nécessaire que pour effectuer une mesure quantitative (c'est moins physique quoi !).

- Comme on l'a dit précédemment, il existe sept grandeurs de base, donc sept unités du système international que l'on a rassemblé dans le tableau qui suit:

Grandeur	Unité SI	Symbole
masse	kilogramme	$kg$
longueur	mètre	$m$
temps	seconde	$s$
température	kelvin	$K$
quantité de matière	mole	$mol$
intensité électrique	ampère	$A$
intensité lumineuse	candela	$cd$

- **Remarques:**

- On note  $[X]$  la dimension de la grandeur  $X$ .  
Par exemple : " l'unité d'une masse est le kilogramme " s'écrit :  $[m] = kg$ .
- Le symbole du Kelvin est  $K$  et non  $^{\circ}K$ .
- Pour passer de la température en degrés Celsius à la température en Kelvin :  
 $T(K) = \theta(^{\circ}C) + 273,15$
- si le nom de l'unité est tiré du nom d'une personne, son nom ne prend pas de majuscule initiale mais son symbole commence par une majuscule.
- La seconde est la durée de 9 192 634 770 périodes de la radiation correspondant à la transition entre deux niveaux hyperfins de l'état fondamental de l'atome de césium 133 (rien de plus simple !)

Dans les problèmes de physique et chimie, on utilise très souvent des unités secondaires qui se raccordent aux unités de base par des équations aux dimensions.

## 4 Exercices

### 1- Homogénéité d'une expression

1. On exprime la vitesse d'un corps par l'équation  $v = At^3 - Bt$  où  $t$  représente le temps.  
**Quelles sont les unités SI de  $A$  et  $B$  ?**

2. **Donnez les unités SI des coefficients  $A$ ,  $B$  et  $C$  dans l'équation suivante:**

$$v = At^2 - Bt + \sqrt{C}$$

où  $v$  est une vitesse et  $t$  un temps.

3. Trois étudiants établissent les équations suivantes dans lesquelles  $x$  désigne la distance parcourue ( $m$ ),  $a$  l'accélération ( $m.s^{-2}$ ),  $t$  le temps ( $s$ ) et l'indice 0 indique que l'on considère la quantité à l'instant  $t = 0$  s

(a)  $x = vt^2$

(b)  $x = v_0t + \frac{1}{2}at^2$

(c)  $x = v_0t + 2at^2$

**Parmi ces équations, lesquelles sont possibles ?**

## 2- Interaction gravitationnelle

1. Une force est homogène au produit d'une masse par une accélération ( $F = ma$ ) et une accélération s'exprime en  $m.s^{-2}$ .

**Exprimez alors dans le système international d'unité le Newton  $N$ .**

2. Si vous vous souvenez bien de votre cours de seconde, on exprime la force d'interaction gravitationnelle entre deux corps de masses  $m_1$  et  $m_2$ , distants de  $d$  par la relation

$$F = G \frac{m_1 \cdot m_2}{d^2}$$

**Déduisez-en l'unité SI de la constante de gravitation universelle  $G$**

3. Les planètes tournent autour du Soleil en un temps  $T$ . Ce temps est lié à la distance  $R$  de la planète au Soleil, à la masse  $M_S$  du Soleil et à la constante de gravitationnelle.

**Trouvez une relation (la plus simple possible) entre ces variables.**

4. **En vous souvenant de l'expression du poids, trouvez l'unité SI de l'intensité de la pesanteur  $g$ .**

## 3- Energie et puissance

1. **En vous rappelant l'expression de l'énergie cinétique, exprimez l'unité joule  $J$  en unité SI.**
2. **Exprimez de la même manière le watt  $W$  en unités SI.**
3. **Comment peut-on relier une énergie à une force et une longueur ?**

## 4- Pression

1. **Quelle est l'unité usuelle de la pression ?**
2. **Physiquement, une pression est une force exercée par unité de surface. Exprimez-la dans le système international d'unités.**
3. **Déduisez-en l'unité SI de la constante des gaz parfaits  $R$  qui intervient dans la loi des gaz parfaits.**

## 5- Electricité

1. **En vous souvenant de l'expression de la puissance dissipée par effet Joule dans un circuit (allez, je vous la donne:  $P = UI$ ), déterminez l'unité SI de la tension  $U$ .**
2. **A l'aide de la loi d'Ohm, déduisez-en l'unité SI de la résistance.**

## 6- Construction d'une expression

1. Une particule de masse  $m$  tourne en décrivant un cercle de rayon  $r$  à une vitesse  $v$ . Pour cela, elle doit subir une accélération centripète ( $a$  en  $m.s^{-2}$ ).  
**Trouvez une équation satisfaite par  $a$  sachant qu'elle ne dépend que de  $v$  et  $r$ .**
2. La force de frottement agissant sur un corps est proportionnelle au carré de sa vitesse.  
**Formulez cette loi par une équation et donnez les dimensions de la constante de proportionnalité.**

## 5 Solution des exercices

### 1- Homogénéité d'une expression

1.  $[A] = m.s^{-4}$  et  $[B] = m.s^{-2}$
2.  $[A] = m.s^{-3}$ ;  $[B] = m.s^{-2}$ ;  $[C] = m^2.s^{-2}$
3. réponse c

### 2- Interaction gravitationnelle

1.  $N = [m][a] = kg.m.s^{-2}$
2.  $[G] = \frac{[F][d]^2}{[m_1.m_2]} = m^3.s^{-2}m.kg^{-1}$
3. Par exemple  $G = \frac{R^3}{MT^2}$
4.  $[g] = \frac{[F]}{[m]} = m.s^{-2}$

### 3- Energie et puissance

1.  $J = [m][v]^2 = kg.m^2.s^{-2}$
2.  $W = \frac{[E]}{[t]} = kg.m^2.s^{-3}$
3.  $E = F.L$

### 4- Pression

1. Le pascal  $Pa$
2.  $Pa = \frac{[F]}{[S]} = kg.m^{-1}.s^{-2}$
3.  $[R] = \frac{[P][V]}{[n][T]} = kg.m^2.s^{-2}.mol^{-1}.K^{-1}$

### 5- Electricité

1.  $[U] = \frac{[P]}{[I]} = kg.m^2.s^{-3}.A^{-1}$
2.  $[U] = kg.m^2.s^{-3}.A^{-2}$

### 6- Construction d'une expression

1.  $a = \frac{v}{r}$
2.  $f = kv^2$  et  $[k] = N.m^2.s^{-2} = kg.m^2.s^{-4}$