Value-at-Risk since 1784
A comprehensive history

Pierre-Charles Pradier
SAMOS-MATISSE, Paris-I

La rapidité fulgurante avec laquelle le concept de *Value-at-Risk* (VaR dans la suite) et son usage se sont diffusés durant les années 90 peut étonner. Les histoires traditionnelles, qui s'en tiennent à la théorie financière ou aux pratiques prudentielles du secteur ne peuvent pas rendre compte de ce phénomène, même si Holton [2002] par exemple, donne une image excellente pour ce champ. La thèse que nous défendons consiste à expliquer cette diffusion rapide par le fait que le formalisme de la *VaR* s'appuie sur le « principe de Condorcet », lui-même connu dans les sciences sociales, les sciences de gestion, et les sciences de l'ingénieur depuis plus de deux siècles. *Du point de vue théorique*, les seules inflexions remarquables du dernier siècle sont d'une part d'avoir fait admettre des seuils de probabilité conventionnels, et d'autre part d'avoir remplacé ce principe, qui est une règle de gestion, par une expression qui permet d'exprimer la comparaison. Ces transformations touchent par nature à la diffusion des pratiques plus qu'à la production de connaissances nouvelles. C'est pourquoi cette enquête conduit aussi à s'interroger sur la relation entre théories et pratiques dans la finance. Toutes considérations qui auraient dû ravir Condorcet, nous reviendrons sur ce point en conclusion.

La VaR résume l'exposition d'un portefeuille au risque de marché ; la littérature insiste sur la distinction entre *métrique* et *mesure* : la première est une fonction quand la second correspond à des valeurs particulières (évaluation d'un portefeuille par la fonction). Bien que différentes métriques existent, on considère en général les VaR pour un seuil de confiance donné pour une période donnée. On parle par exemple de VaR en euro quotidienne à 90 %. Si un portefeuille est caractérisé par une VaR en euro quotidienne à 90 % d'un million, alors cela signifie qu'il existe une probabilité de 10 % que la perte quotidienne sur ce portefeuille soit supérieure à un million. Comme telle, la VaR rappelle immanquablement les intervalles de confiance de la statistique mathématique. Il semble donc que la VaR soit une application financière directe des travaux de Neyman et Pearson. En fait, les théories statistiques de la dispersion ont une histoire bien plus ancienne, qui prend d'ailleurs racine dans les sciences de la société. Dans la suite, notre plan d'exposition identifie des champs théoriques, avec leurs problématiques, leurs auteurs propres, en situant leur époque. C'est donc aussi une histoire institutionnelle des disciplines qui nous conduit à rappeler les travaux d'arithmétique politique liés au développement des mathématiques mixtes, à la fin du XVIII^{e} s. (1.), avant de commenter la naissance de l'actuariat et de la théorie mathématique du risque (2.), puis la transformation de l'économie politique en science économique (3.) et le détachement de la finance (4.), laquelle finit par se distinguer non plus seulement comme discipline académique, mais aussi comme communauté de pratique (5.).

1. Mathématiques mixtes

L'histoire de l'économie et de la statistique mathématiques a longtemps souffert du dédain croisé des historiens des sciences et de l'économie. L'obscure carrière d'un Louis Bachelier témoigne du mépris quasi-général des mathématiciens pour les questions économiques, à laquelle correspond une horreur des historiens de la pensée économique pour les mathématiques, longtemps considérés comme des « hiéroglyphes effarouchants ». Même si cette époque semble aujourd'hui révolue, il semble encore incongru de mentionner « l'œuvre économique » de D'Alembert ou Laplace, qui sont, comme on le croit parfois à tort, des mathématiciens « purs ». Les hommes des Lumières se saisissent du flambeau de l'analyse mathématique pour éclairer le monde et pour agir. Ainsi Rieucau écrit-il :

> « La validité d'un résultat mathématique doit en principe être estimée d'après sa capacité à rendre intelligibles les objets réels, les mathématiques mixtes étudiant "les propriétés de la grandeur concrète, en tant qu'elle est mesurable ou calculable", comme on le lit à l'article "Mathématiques" (1765) de l'*Encyclopédie* dont D'Alembert partage la rédaction avec Boucher d'Argis. »

Divers aspects du calcul économique ont retenu l'attention des mathématiciens du XVIII[e] s, ils nous sont maintenant connus grâce aux travaux de de Bernard Bru, Pierre Crépel, Jean-Nicolas Rieucau. On examinera successivement la relation entre principe de certitude morale et principe de Condorcet, le modèle de Condorcet et les idées curieuses de Tetens.

. le principe de certitude (safety-first principle)

Chez les auteurs français, l'idée de « certitude morale »,dont Rieucau nous apprend qu'elle est déjà assez répandue dans les années 1730[1], est popularisée par Buffon qui parle de « probabilité morale nulle ». Pour résoudre le paradoxe de Pétersbourg, Buffon constatant que la probabilité pour un homme d'âge mûr de mourir dans la journée était d'un dix-millième, propose de compter pour nulles les probabilités plus faibles[2]. Condorcet pour sa part préfère écrire *forte assurance*[3]. Pour Condorcet, au-delà de l'animosité qui l'opposait au biologiste[4], la position de Buffon est intéressante mais trop simple.

Le principe qui préside à ce traitement général du risque est ce que l'on doit bien appeler le « principe de Condorcet » : ne considérer comme choix possibles que les seules variables dont la (les) probabilité(s) d'un (ou plusieurs) risque(s) dirimant(s)[5] soit très

---

[1] Rieucau [1997] écrit : « Cette expression est relativement répandue lorsque Buffon l'emploie pour son propre compte. Dans son *Introduction à la philosophie* (1736, p. 128), notons que 's Gravesande estime qu'elle est d'usage "vulgaire". O. B. Sheynin (1977) rapporte à cet égard qu'on la trouve déjà chez des auteurs tels que Descartes, Huyghens, Leibniz ainsi que chez Jean et Nicolas Bernoulli. »

[2] Buffon [1777], p. 38 : « Comme tout homme de cet âge (cinquante-six ans), où la raison a acquis toute sa maturité et l'expérience toute sa force, n'a néanmoins nulle crainte de la mort dans les vingt-quatre heures, quoiqu'il n'y ait que dix mille (...) à parier contre un, qu'il ne mourra pas dans ce court intervalle de temps ; j'en conclus que toute probabilité égale ou plus petite, doit être regardée comme nulle ».

[3] Condorcet [1785c], p. 23.

[4] Sur la haine entre les deux personnages, voir Rieucau [1995], p. 21 en particulier note 85.

[5] Condorcet considère alternativement le risque de faillite, de perdre « une somme considérable », ou simplement de terminer l'exercice sur un résultat négatif. Si Condorcet met en scène plusieurs risques avec des probabilités étagés (il

faible (« moralement négligeable », ou, réciproquement, que l'on soit « moralement certain » que le risque restera virtuel[6]). Parmi les variables qui satisfont à ce *principe de sécurité*, on choisira par exemple celle qui possède la meilleure espérance. Une fois que cette probabilité est identifiée, comment met-on en pratique ce principe ?

Condorcet a répondu à cette question en examinant les conditions nécessaires à l'activité économique :

> « Un homme raisonnable ne doit se livrer au commerce que dans le cas où il trouve une probabilité assez grande qu'il retirera ses fonds, avec l'intérêt commun & le prix de son travail.
>
> Il lui faudroit sans doute une probabilité à peine différente de la certitude de ne pas perdre la totalité de ses fonds, & même d'en conserver la partie qui est nécessaire à sa subsistance & à celle de sa famille ; & une probabilité encore très grande de ne pas les diminuer jusqu'à un certain point[7] ».

En envisageant la probabilité des événements « retirer de son activité le profit normal », « ne pas perdre plus d'une certaine somme », « ne pas perdre tout son bien », Condorcet distingue trois « événements » dont le premier inclut le deuxième, qui englobe lui-même le suivant. Le risque inhérent à l'activité économique admet alors trois niveaux : « avoir travaillé pour rien », « avoir perdu une somme considérable dans ses affaires » et « être ruiné » (ce sont les événements complémentaires de ceux que décrit Condorcet).

On peut donc comparer le risque propre à deux affaires en comparant ces probabilités respectives. Ceci ne va sans poser divers problèmes. D'une part Condorcet, l'inventeur du paradoxe[8] qui porte son nom propose en fait trois mesures, sans indiquer comment les ordonner : l'indécision est alors à prévoir. D'autre part la détermination des seuils (en particulier dans l'estimation d'« un certain point ») ne repose sur aucun critère objectif. Néanmoins cette proposition que nous appellerons théorie des « seuils » (en anglais *disaster threshold*) a très largement résisté à l'usure du temps, elle s'est même bonifiée puisque les seuils conventionnels ont fini par être universellement acceptés. S'il est toujours délicat d'affirmer qu'un auteur a été le premier à exprimer une idée ou même à la formaliser[9], dans le cas présent, l'exposé de Condorcet est particulièrement remarquable par sa clarté et la rigueur de sa formalisation.

---

faut un risque quasi-nul de faillite et un risque raisonnablement faible de résultat négatif, par exemple), ses successeurs, comme par exemple Massé [1953] ou les textes déjà cités, n'en considèrent en général qu'un seul.

[6] Voir Rieucau [1998]. Condorcet [1784], p. 492 propose de « savoir comment dans la pratique les hommes qui passent pour sages, & dont les projets ont réussi, ont résolu le même problème ; par exemple, quelle a été la probabilité de ne pas perdre que les assureurs ont su se procurer dans les différens bureaux d'*assurances* qui ont pu continuer le commerce avec avantage. » C'est donc une véritable *définition expérimentale* de la rationalité que Condorcet propose.

[7] Condorcet [1784], p. 486.

[8] On sait que le mot de *paradoxe* n'est pas de Condorcet (ni même de Borda), même si le marquis concède que le contenu en soit « paradoxal ». Voir sur ce sujet Rieucau [1997], Ch II, section 2, § 3, n. 102.

[9] Voir par exemple, sur la question de l'utilité marginale décroissante, Pradier [1996].

. Condorcet : propagande des assurances

Le texte dans lequel Condorcet expose avec le plus de détail cette théorie des seuils est un article de l'*Encyclopédie méthodique* qui suscitera des développements chez Laplace et Lacroix sur les assurances maritimes. Bien que cet article soit maintenant connu grâce aux travaux de Pierre Crépel [1988] et Jean-Nicolas Rieucau [1998], il n'est peut-être pas inutile d'en rappeler le contenu avant d'introduire aux écrits ultérieurs.

Au milieu des années 1780, Condorcet déploie une activité assez intense pour promouvoir les assurances : il organise un prix de l'Académie des sciences ([1783][10]) et rédige des articles ([1784], [1785a], [1785b]) ou des notes restées inédites ([s. d.]). L'assurance maritime, qui existe déjà depuis plus de trois siècle, n'en avait pas besoin, mais les assurances agricoles (que l'auteur appelle de ses vœux) ne sont qu'à l'état de projet, tandis que la loi et la morale réprouvent encore dans les pays latins l'institution d'assurances sur la vie déjà développées en Angleterre. Si les lettres apocryphes ([1785a], [1785b]) tendent à populariser une idée nouvelle et un peu aventureuse, l'article « Assurances maritimes » de l'*Encyclopédie méthodique* expose la foi de Condorcet dans le *principe* même de l'assurance : comme son titre ne l'indique pas, il vise en fait à promouvoir *toutes* les formes d'assurances. La modalité choisie pour convaincre les lecteurs est le calcul économique, appliqué tant à l'assureur qu'à l'assuré potentiel. Ce point mérite qu'on s'y arrête puisque, comme l'ont remarqué Crépel et Rieucau, Condorcet, comme avant lui Daniel Bernoulli [1731], met en équation aussi bien la compagnie d'assurance que ses clients, ce qui n'est plus le cas chez les auteurs suivants.

Du point de vue abstrait, le calcul est simple : Condorcet modélise un décideur confronté à n opérations identiques, qui se résolvent chacune en un échec ou un succès. Les probabilités des différents niveaux du bilan de l'assureur sont donc données par le tirage d'une loi binomiale. Dans la pratique, si la probabilité d'un échec est p, la probabilité d'avoir m échecs parmi n tirages est égale à $C_n^m p^m(1-p)^{n-m}$, et on ne dispose pas d'une fonction de répartition explicite. On peut bien sûr en bricoler une, en écrivant que si X est la variable binomiale qui désigne le nombre d'échecs parmi n tirages, alors $P(X \leq m) = \sum_{k=0}^{m} C_n^k p^k(1-p)^{n-k}$. Mais le calcul est très lourd, d'autant que l'inconnue est ici m : on veut calculer m sachant $P(X \leq m)$ donné[11]. Il faut additionner les termes du binôme, ce qui est évidemment très fastidieux, rend pénible la lecture de l'article de Condorcet et réduit sa portée pratique à presque rien. On peut cependant rappeler le but de la formalisation du marquis : fixer le prix de vente de l'assurance afin de réduire la probabilité de faillite de l'assureur à une quantité moralement négligeable. C'est donc bien la problématique de la théorie du risque, qui vise à déterminer le taux de chargement afin d'immuniser la compagnie contre les conséquences d'une accumulation de sinistres. Faute d'outil

[10] Ce prix, proposé en 1781 par l'Académie des sciences à l'instigation de Condorcet, ne fut pas remis à la date prévue (1783) et finalement reporté deux fois. En 1787, Lacroix et Bicquilley partagèrent enfin ce prix. Il est donc vraisemblable qu'à cette date au moins, Laplace n'avait pas vraiment avancé dans le sujet.

[11] En fait, l'inconnue est une fonction de m et du taux de chargement (on veut calculer le taux de chargement qui permet d'obtenir un niveau de sécurité donné). Le lecteur désireux de retrouver l'intégralité des calculs pourra se reporter au texte original, ou à Crépel [1988].

mathématique adapté, Condorcet ne parvient qu'à un demi-succès : il montre clairement l'intérêt de la théorie qu'il propose, mais sa complexité analytique la rend quasiment inutilisable.

Le principe de Condorcet appliqué à la gestion d'entreprise se résume donc ainsi : le taux de profit est fixé de manière à rendre la VaR compatible avec la solvabilité presque sûre. Avant de présenter les développements de la théorie de l'assurance, il n'est pas inutile de rappeler que l'auteur lie cette question du risque à celle de l'estimation. La deuxième partie de l'article « Assurances maritimes » traite de la « probabilité des événements futurs d'après les événements passés » (ou, dans des termes plus laplaciens, de « la probabilité des causes constantes par les événements déjà observés »). L'auteur retourne ainsi à ses travaux des années 1770 sur la méthode bayésienne asymptotique, qu'il a mise au point avec Laplace[12] — indépendamment de Bayes dont les français ne prennent connaissance que plus tard. Si les résultats de cette méthode bayésienne paraissent maigres[13], ils témoignent au moins chez Condorcet d'un réel souci de prise en compte de la nature *statistique* des données, au contraire de l'« objet frivole »[14] (« jeux de hasard » caractérisés par des probabilités *a priori*) où « les géomètres se bornèrent assez longtemps », avant lui, cela s'entend.

. Tetens : métaphore statistique

A peu près au même moment que Condorcet, un philosophe Allemand, Johannes Nicolaï Tetens, attaque de front les mêmes problèmes : la théorie mathématique du risque et la question de l'estimation. La personne de Tetens est suffisamment mal connue pour que l'on puisse lui consacrer un moment avant de s'intéresser à ses travaux sur le « risque de la caisse » et le risque d'estimation.

Biographie intellectuelle

En général, Tetens n'apparaît pas dans les histoires du calcul des probabilités ou des statistiques (il n'est pas cité par Todhunter [1865] ou Stigler [1986], même Daston [1988], [1989] lui consacre une phrase pour mémoire), seul Hald [1998] s'attarde plus de quatre lignes sur lui. Les encyclopédies généralistes (*Encyclopaedia Britannica*, *Brockhaus-Enzyklopädie*, *Enciclopedia Italiana* mais pas l'*Universalis*) offrent à peu près toujours une entrée à son nom, mais présentent Tetens comme un philosophe, caractérisé essentiellement par ses interactions avec Kant. Rares sont les auteurs qui attribuent à Tetens des recherches mathématiques dignes de considérations : ce sont essentiellement des actuaires (Bohlmann-Poterin du Motel [1911], p. 577 n. 179 ; Borch [1967], p. 432. Borch [1969], p. 1) ou des démographes (Keiding [1987]). Du côté purement

---

[12] Bernard Bru et Pierre Crépel [1994] pp. 256-60 *n.* ont largement éclairé la question des relations entre Bayes, Condorcet et Laplace.

[13] Le principe de l'estimation « bayésienne » est ici de considérer que si m vaisseaux ont péri et n n'ont point péri, la probabilité (« des événements futurs d'après les événements passés ») de succès est $\frac{m+1}{m+n+2}$. Voir Condorcet [1784], p. 491 ; Laplace [1774].

[14] Condorcet [1785c], p. 601.

mathématique, Tetens s'apparente à l'« école combinatoire allemande » (malheureusement très peu étudiée). Précisons seulement que ce groupe, centré sur Carl Friederich Hindenburg et donc sur l'Allemagne du Nord[15] est intéressé (comme son nom l'indique) aux problèmes combinatoires et donc à l'algèbre. Ceci explique peut-être la manière de travailler de Tetens, qui représente les variables aléatoires par des polynômes[16] (c'est la méthode des fonctions génératrices héritée de Moivre). Les théorèmes « probabilistes » de Tetens sont en fait des théorèmes d'algèbre *interprétés* en termes de variables aléatoires. Seconde particularité de notre auteur : la « tradition » actuarielle allemande. Bien que personne n'ait jamais prétendu qu'une telle tradition existât, on ne peut manquer d'être frappé par la multiplication de travaux actuariels après 1760 en Allemagne, après le calme relatif des années quarante (Rohrbasser [1997]). A Euler [1760] succède en 1761 une seconde édition de l'*Ordre divin* de Süßmilch, qui est réimprimée en 1765. Dans les années suivantes, Lambert [1765], Seyberth [1767], Kritter [1768], Euler [1770] contribuent au sujet avant qu'une troisième édition de Süssmilch (refondue et augmentée par Baumann) et un essai de Florencourt [1781] ne viennent encore s'ajouter à la liste des publications citées par Tetens. Signalons que ces deux filiations ne sont pas disjointes : c'est à Leipzig, la ville de Hindenburg, qu'est publié Euler [1770], avec une postface d'Abraham Kästner, qui se trouve être un ami proche de Hindenburg ; de même Florencourt est préfacé par le même Kästner, qui enseigne à Göttingen où il avait intéressé Kritter à ces questions… Il semble donc bien qu'il y ait une profusion de travaux en langue allemande sur les questions actuarielles, et une société de gens qui leur sont intéressés. Notons enfin une particularité : le caractère *semi-public* (étatique ou municipal) des établissements d'assurance (subventionnés et privilégiés, Hecht [1979], pp. 106 *sqq.* donne un exemple), au contraire des compagnies anglaises contemporaines (en particulier l'*Equitable* de Dodson et Price, étudiée par Daston [1989]), entièrement privées. Puisque l'on a situé le Professeur Tetens, voyons donc ce qu'il propose.

Le risque de la caisse

Le *Risico* de Tetens n'est ni l'erreur moyenne[17] comme le pense Borch ([1969], p. 1), ni le risque moyen linéaire[18] comme l'écrit Bohlmann (-Poterin du Motel [1911], p. 577). Dans

---

[15] Hindenburg lui-même est professeur à Leipzig (Saxe), où sont publiés de nombreux ouvrages), Pfaff est à Helmstedt (Basse-Saxe), Klügel à Göttingen (Basse-Saxe) puis Halle (Saxe-Anhalt). Tetens et Kramp (Strasbourg) sont un peu plus excentrés.

[16] Le polynôme $\sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ représente la variable aléatoire qui donne k avec une probabilité $\frac{a_k}{\sum_{k=0}^{n} a_k}$.

[17] Soit une variable X d'espérance $\bar{x}$, présentant n issues x_i, $i\in[1,n]$ rangées par ordre croissant, dont les probabilités respectives sont p_i, il existe alors un plus grand n_0 tel que $\forall i\leq n_0$, $x_i \leq \bar{x}=0$. L'erreur moyenne (écart moyen absolu des anglo-saxons) vaut $\sum_{i=1}^{n} p_i|\bar{x} - x_i|$.

[18] En reprenant les mêmes notations, le risque moyen linéaire s'écrit $-\sum_{i\leq n_0} p_i x_i$.

un premier temps, aux paragraphes 18 et 19, la mesure présentée est l'*espérance des écarts pour les issues inférieures à la moyenne*[19]. L'auteur illustre son propos par le cas d'un dé à six faces numérotées de zéro à cinq. L'espérance d'une variable ainsi définie est $\frac{5}{2}$, les issues inférieures à la moyenne sont zéro, un et deux, donc les écarts $\frac{5}{2}, \frac{3}{2}, \frac{1}{2}$. Comme les issues sont équiprobables (parmi six possibilités), l'indicateur de risque vaut pour une telle loterie :

$$\left(\frac{5}{2} + \frac{3}{2} + \frac{1}{2}\right) \times \frac{1}{6} = \frac{3}{4}.$$

Dans le cas des loteries symétriques — c'est-à-dire de loteries dont les écarts à la moyenne sont égaux de part et d'autre de l'espérance — comme par exemple le jet d'un dé, erreur moyenne (divisée par deux) et indicateur de risque sont évidemment égaux, mais pas le risque moyen linéaire, puisqu'il n'y a pas de résultats négatifs. Si on soustrait à la variable aléatoire son espérance — le prix d'entrée dans le jeu — alors les trois mesures sont identiques. Si formellement on peut donc démontrer dans un cas particulier l'égalité de l'indicateur de dispersion de Tetens avec d'autres qui seront utilisés par la suite, il ne faut pas perdre de vue que Tetens ne s'en tient pas, *dans ses démonstrations*, à des loteries d'espérance nulle qui remplissent les conditions de cette identité des indices. L'erreur des commentateurs vient peut-être du fait que si les *exemples* sont toujours de ce genre puisque les rentes viagères sont toujours vendues à leur espérance mathématique.

Le risque de la caisse : application

Si Tetens est resté dans la mémoire des actuaires pour avoir mis au point un concept (et une mesure) du risque de la caisse (*Risico der Casse*), il faut quand même insister sur le caractère particulier de l'usage qui en est fait. Alors que Condorcet, Laplace et Lacroix admettent sans difficulté la nécessité d'un *chargement*, tant pour couvrir les frais de l'assureur que pour garantir sa sécurité (Condorcet [1784] ; Laplace [1812], pp. 439-440 ; Lacroix [1821], p. 233), Tetens se refuse à une telle pratique :

> « On voit [grâce à l'indicateur de risque] ce que la garantie à produire représente. Celui qui l'assume, ne peut, de par la nature de la chose, rien exiger pour cela, pas plus que n'exigerait un joueur qui démarre un jeu de hasard avec un autre, sans qu'aucun n'ait un avantage. Il peut perdre autant que gagner et ne doit que se demander s'il est prêt à mettre en jeu une somme aussi importante. »[20]

Le principe de justice qui préside à la décision risquée, maintes fois réaffirmé depuis Pascal (cf. Jallais-Pradier [1997]), ne souffre donc pas d'exception pour Tetens. Ce point de vue résonne avec le caractère semi-public des institutions germaniques : avec de tels principes, les sociétés d'assurance ne pouvaient être profitables ! Il fallait donc qu'elles

---

[19] Le risque de Tetens vaut donc $R = \sum_{i \leq n_0} p_i |\bar{x} - x_i|$.

[20] § 38. Sous réserve de précisions, les références concernent la *Dritte Abhandlung — Versuch über das Risico der Casse bey Versorgungsanstalten* de Tetens [1786].

soient subventionnées. On comprend donc pourquoi ces calculs intéressent à la fois les autorités (qui offrent le marché et la subvention) et les entrepreneurs potentiels. Ce détail mérite quelqu'attention, n'en déplaise à Max Weber (et à Rohrbasser [1997]), car on y trouve des français (donc catholiques) bien plus à l'aise avec les affaires d'argent que leurs cousins germains (donc luthériens).

Si le *Risico* de Tetens ne sert pas à calculer le chargement, quel peut donc être son utilité ? On peut penser d'abord que Tetens a voulu théoriser sur une suggestion d'Abraham de Moivre. Dans sa *Doctrine of Chances*, ce dernier écrivait :

> « 6. Le risque de perdre une somme est le contraire de l'espérance ; sa vraie mesure est le produit de la somme aventurée par la probabilité de la perte »[21].

Or Tetens est manifestement très marqué par Moivre. En particulier, le recours à la formule *dite* de Stirling s'accompagne d'une référence explicite (contrairement à l'usage du dix-huitième siècle) à Moivre [1730][22]. Les développements de Tetens sur le sujet pourraient être traités simplement comme un exercice mathématique visant à généraliser cette notion de risque à des variables aléatoires plus complexes que les variables de Bernoulli considérées par Moivre. L'abstraction des travaux du danois (à cause du détour par les fonctions génératrices, en particulier), qui montre par ailleurs un intérêt réel pour les pures questions d'algèbre, pourrait faire penser à un exercice de style. Mais l'intérêt simultané du philosophe pour le risque de la caisse d'une part, et d'autre part le risque d'estimation — sujets éminemment concrets — nous conduit à chercher une autre interprétation.

Malgré l'importance que Tetens consacre à sa notion de risque (elle fait l'objet de deux gros chapitres de l'*Einleitung*), il est assez curieux de constater que l'auteur s'éloigne occasionnellement de ce fil directeur[23]. Cependant, parmi le deux « applications » de la notion de risque, la première est contenue dans ce paragraphe :

> « *Le risque de la caisse est croissant du nombre des intéressés.* Il croît en proportion de la racine carrée du nombre des intéressés. Comme dans tout jeu de hasard, plus on mise, plus on peut gagner, mais aussi perdre. C'est sûrement

[21] Moivre [1756], p. 4.

[22] Moivre [1730] est repris et développé dans Moivre [1756], « A method of approximating the Sum of Terms of the Binomial $(a+b)^n$ expanded into series, from whence are deduced some practical Rules to estimate the Degree of Assent which is to be given to experiments », pp. 243 sqq. Ce titre de Moivre est tel qu'on peut se demander à raison si ce n'est pas ce mathématicien qui est à l'origine de l'analogie remarquée chez Laplace et Tetens. Quelque tentante que soit cette hypothèse, il faut admettre que Moivre, s'il produit des développements analytiques incontestables (on parle de loi de *Moivre*-Laplace) reste dans une perspective très « bernoullienne ». Il n'est pas question d'inversion de la probabilité (et du théorème de Jacques Bernoulli), ni de dispersion, mais au contraire de convergence vers la moyenne, expression de la Providence : « *altho' Chance produces Irregularities, still the Odds will be infinitely great, that in process of Time, those Irregularities will bear no proportion to the recurrency of that Order which naturally results from* ORIGINAL DESIGN ».

[23] L'auteur se lance ainsi dans l'étude de problèmes divers, parfois sans avoir recours à son indicateur, parfois en l'utilisant. Le premier cas est illustré par la question de savoir s'il est plus « risqué » de verser un capital ou une rente viagère à une veuve (§ 29). Pour le second cas, il faut voir *infra* ses conclusions sur la croissance du risque avec le nombre de contrats souscrits.

> une idée erronée, que l'on rencontre ici et là, de penser qu'avec un plus grand nombre d'intéressés l'institution risque moins qu'avec un nombre plus faible sous le prétexte qu'il est probable que les décès seront plus conformes aux hypothétiques tables de mortalité. (…) *Le risque distribué à chaque intéressé particulier est plus petit, quand la société est plus grande, et toujours dans la même proportion, à savoir la racine carrée du nombre des intéressés.* Il augmente pour la société dans son ensemble, mais diminue pour chaque unité.[24] ».

Le danois tente ici de clore un débat qui dure depuis les balbutiements de l'assurance, et qui vise à déterminer si le risque croît ou non avec le nombre de contrats. Le bon sens laissait croire que la chance d'une perte était croissante, quand les raisonnements du type loi des grands nombres, utilisés de façon erronée, semblaient indiquer le contraire[25]. L'indicateur construit par Tetens permet de trancher la question ; de manière concrète, il permet de proportionner l'accroissement des garanties à l'accroissement du volume des contrats souscrits.

Risque de la caisse et risque d'estimation

La seconde application, c'est le risque d'estimation : Tetens cherche à établir la valeur des tables de mortalité qui servent à calculer les rentes viagères. Il convient pour cela de considérer au moins mille observations pour obtenir une « erreur » (sur l'espérance) inférieure à une demie-année[26]. Le problème dans ce cas est double. D'une part, l'étude de la variabilité n'est pas menée de manière « satisfaisante » : on dispose d'un intervalle de confiance mais il n'est pas associé à un probabilité ; si on calculait rétrospectivement la probabilité implicite à la méthode de Tetens, il apparaîtrait qu'elle est beaucoup trop faible pour prétendre à la « certitude morale »[27]. D'autre part l'interprétation du résultat de Tetens est incertaine : compte tenu de l'usage qui est fait des tables de mortalité, faut-il 1000 observations *par classe d'âge* (et de chaque sexe), pour que les tables soient précises *à chaque âge* ? Ces résultats paraissent donc symboliques : l'auteur pointe le problème de l'induction statistique sans le traiter vraiment. On peut objecter que, dans la mesure où nous avons complètement occulté les calculs de Tetens, l'argument de l'auteur est peut-être dénaturé. Mais la complexité de ces computations commande de les détailler ailleurs[28].

---

[24] § 38.

[25] Voir par exemple Tenenti [1985], pp. 213-4.

[26] Voir Pradier [1998], pp. 89 sqq. et 119 sqq.

[27] Si on conserve l'hypothèse (valable pour les exemples) suivant laquelle R =erreur moyenne, Tetens s'intéresse donc à l'intervalle $[\mu-R,\mu+R]$. Comme par ailleurs, l'erreur moyenne vaut 0,8 fois l'écart-type : $[\mu-R,\mu+R] = [\mu-0{,}8\cdot\sigma,\mu+0{,}8\cdot\sigma]$, où σ désigne l'écart-type. On peut évidemment calculer cette probabilité à l'aide d'une table de la fonction de répartition de la loi normale. On obtient 0,5762 (pour la probabilité qu'une normale centrée réduite soit comprise dans un intervalle bilatéral de 0,8 fois l'écart-type autour de la moyenne). On est donc loin de la certitude morale.

[28] Voir Pradier [1998]. On peut cependant noter les deux traits fondamentaux : d'abord Tetens réduit l'issue des rentes viagères à un schéma binaire (soit le souscripteur meurt au jour de la souscription, soit il jouit de sa rente jusqu'à la fin de la table) qui laisse l'espérance inchangée ; ensuite il approche le risque de la somme des rentes, identifiée à une binomiale en usant de la formule de Stirling *version Moivre*.

Si les développements de Tetens sont assez exotiques, ils prouvent qu'à l'époque le risque était dans l'air du temps, et par risque on entendait bien la probabilité de dépasser un seuil critique de perte… Idée que capture finalement la VaR. En la matière, la *Théorie analytique*, conduit à franchir une étape supplémentaire.

2. Actuariat - théorie mathématique du risque

Si le risque entendu comme dépassement probable d'une limite est une notion répandue dans les années 1780, cette notion ne suscite une théorie que chez les héritiers directs de Condorcet, Laplace et Lacroix. Au contraire, les pragmatiques Anglais ne s'embarrassent pas de théorie.

. La vie dans les îles

On pense d'ordinaire que l'histoire des mathématiques actuarielles *classiques*, tout au moins dans leur expression anglaise, est bien connue grâce au travaux de Lorraine Daston ([1988], [1989]). Néanmoins, les considérations de cet auteur sur la « domestication du risque » sont de nature à égarer le lecteur : Daston entend par « risque » *l'espérance* du sinistre et non une éventuelle analyse de la dispersion. La « domestication du risque » est donc pour elle synonyme de calcul des primes à l'espérance, ce qui ne présente pas grand-intérêt pour les assurances maritimes ou incendie car les calculs y sont très simples ; dans le cas des assurances-vie en revanche, la mise au point des tables de mortalité constitue une aventure scientifique que l'auteur rappelle avec une verve narrative reconnue. Mais si nous entendons *risque* dans le sens qui a prévalu chez Markowitz — cette interprétation a suscité à partir des années 1850 une théorie propre — il faudra donc chercher ailleurs. Au début du siècle, Bohlmann donnait des pistes particulièrement précieuses, puisqu'il renvoyait à Tetens et Laplace [1812]. Parmi les sujets de sa Gracieuse Majesté, il s'en trouve un qui paraît devoir attirer notre attention : Richard Price a lui aussi travaillé sur les questions d'estimation et d'assurance. D'une part, il a transmis à la *Royal Society* le mémoire de Bayes [1764] ; et ceci n'est pas étranger à son admission dans cette société. D'autre part, ses *Observations on reversionary payments*, publiées en 1771, constituent le grand classique de l'actuariat, avec pas moins de 4 éditions en 11 ans (la dernière comptant trois forts volumes) plus trois encore par la suite. Price n'est pas seulement un théoricien de l'assurance, puisqu'il participe à l'odyssée de l'*Equitable* (Daston [1989]) entre 1768 et 1775 ; tout ceci ne représente d'ailleurs qu'une infime part de ses activités de publiciste polygraphe.

En charge des calculs actuariels de l'*Equitable*, Price a certainement cherché à mettre sa compagnie à l'abri d'une mauvaise année, de sinistres anormalement nombreux, donc du *risque* — comme l'on fait Condorcet, Laplace et Tetens. En fait, malgré le titre de Daston [1989], les travaux anglais ne s'embarrassaient jamais d'une *théorie* du risque, au sens de dispersion. Bien que l'*Equitable* n'ait pas calculé les rentes au « juste prix », loin s'en faut, la question de la variabilité semblait exclue par un surcroît de précaution. Daston rapporte ainsi que Morgan (neveu de Price) calcula en 1775 que l'*Equitable*, lancée en 1768, comptait dans son bilan 60% de surplus. En dépit de statuts en principe quasi-mutualistes, Morgan se refusait à redistribuer ces profits en cas « d'événements extraordinaires ou d'une saison de mortalité anormale » (Daston [1988], p.180). Il y avait donc bien *chargement pour cause de risque*, c'était en dehors de toute *théorie*. A ce sujet, Bernstein rapporte avec perfidie les inconvénients du bricolage pratiqué par le pasteur unitarien, il écorne ainsi sérieusement la réputation de Price. Sa table de mortalité, dite *de Northampton*, sous-estimait l'espérance de vie (surtout celle des hommes), cette erreur fit la fortune de l'*Equitable* qui vendait essentiellement des assurances-décès et des rentes de veuvage. Mais le gouvernement anglais qui régla ses paiements viagers sur le même fondement fut ruiné (Bernstein [1996], p. 131). Price n'a donc pas développé une théorie de la variabilité, il n'en a d'ailleurs pas ressenti le besoin. Après sa mort en 1791, Morgan dirige encore une sixième[29] (1803) puis une septième édition (1812) qui ne comportent pas d'entrée « risk » dans leurs index, et il n'est pas fait référence à Condorcet, à Tetens ou à Laplace.

. Laplace : la gestion des compagnies

Laplace hérite non seulement la problématique mais encore la modélisation même de Condorcet : le chapitre de la *Théorie analytique* qu'il consacre aux « bénéfices dépendants de la probabilité des événements » futurs s'ouvre en rappelant le cadre de la réflexion de son devancier (à ceci près, comme le rappelle Crépel [1988], que l'assuré a disparu des préoccupation savantes), sans toutefois le citer, comme il était courant au XVIIIe siècle. On retrouve des opérations identiques susceptibles d'un résultat binaire (succès/échec), donc un tirage binomial. De même, le titre évoque les développements « bayésiens » qui ne manqueront pas d'apparaître dans un second temps. Mais Laplace innove dans deux domaines : grâce à sa « méthode », et par la prise en compte des rentes viagères.

La « méthode de Laplace » consiste en une approximation normale des variables binomiales : la probabilité $P(X \leq m) = \sum_{k=0}^{m} C_n^k p^k(1-p)^{n-k}$ est donc approchée par l'intégrale $\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{m-np}{\sqrt{2npq}}} exp\,(-v^2)dv$. Ceci ne semble peut-être pas constituer une simplification, mais dans la mesure où seule la borne supérieure d'intégration change, on peut utiliser une table de la loi de Laplace-Moivre (comme celle de Kramp [1799]) pour obtenir sans calcul les valeurs de l'intégrale. Le modèle de Condorcet devient donc utilisable, et il est possible de calculer rapidement le montant du chargement nécessaire étant donné le niveau de sécurité requis. Ce n'est pas tout. Laplace peut entrer dans des raffinements qui bénéficient de la nature de son outil : la « méthode de Laplace » [1785] repose d'abord sur une approximation analytique et non sur un théorème de convergence en probabilité (le fameux « théorème central limite » de Laplace [1810]). Au lieu de considérer seulement des tirages binaires (échec ou succès) identiques, l'auteur ménage d'abord la possibilité pour des variables différentes (des binomiales dont les probabilités ou les conséquences pourraient changer [1812], p. 430), puis des tirages multinomiaux ([1812], p. 432). Enfin, et ce point paraîtra aux lecteurs de Condorcet comme un hommage à son aîné disparu, Laplace en vient à déterminer les lois des événements futurs d'après les événements passés ([1812], p. 434),

[29] Les editions successives de Price [1771] s'enrichissent d'*addenda* qui les rendent sans cesse plus volumineuses. Fort heureusement, les préfaces indiquent toujours la nature des ajouts. On peut faire observer que Price était essentiellement intéressé aux questions britanniques, sinon anglaises ; ses références à des travaux étrangers concernent uniquement les tables, et guère la « théorie » des assurances.

c'est-à-dire qu'il propose lui aussi une estimation « bayésienne » des fréquences, au lieu des probabilités *a priori* dont la littérature assurantielle se contentait d'ordinaire.

A ce point, on serait tenté de croire que l'apport de Laplace à la question traitée par Condorcet réside uniquement dans l'emploi de cette approximation normale. Mais le normand pousse encore plus avant la généralisation du propos de Condorcet : il envisage en particulier une application du même schéma de raisonnement aux assureurs vendant des *rentes viagères*. Or, la particularité de ce type de produit d'assurance tient à leur complexité analytique : l'issue d'un tel contrat ne peut être réduit à un succès ou un échec, puisque la durée de vie potentielle du rentier est comprise dans un intervalle en général assez important (on ne souscrit pas une rente viagère au seuil de la vieillesse). Laplace détaille justement le calcul des rentes sur plusieurs têtes suivant des hypothèses qui permettent de simplifier la courbe de mortalité ([1812], pp. 436-7)[30]. Dès lors, une rente viagère est identique aux lois multinomiales étudiées précédemment ce qui permet d'approcher la loi de probabilité d'une somme de rentes. Ce calcul permet en particulier de décider quel taux de chargement garantit aux administrateurs, pour un montant donné de rentes, le niveau de sécurité voulu ([1812], p. 439-440)[31] — compatible avec la règle de décision de Condorcet.

Voilà donc pour les travaux actuariels de Laplace. Il faut cependant insister sur le lien entre la prise de conscience du risque et le traitement de la question de l'estimation statistique. La série des travaux démographiques de Laplace [1781], [1786] lui permet de définir sa « méthode », cette approximation analytique dont on a vu le caractère instrumental et crucial dans l'intégration des conditions de sécurité. Précisons en quoi la mathématique développée pour l'estimation statistique - pour ce que nous appellerions les tests d'hypothèses - a pu servir à Laplace dans ses calculs assurantiels. Dans les tests d'hypothèses[32], on raisonne sur l'observation d'une caractéristique qualitative *binaire* (le sexe dans Laplace [1781], le fait de naître dans l'année[33] pour Laplace [1786]), les

---

[30] Laplace considère un « ajustement analytique » des tables, par exemple, il choisit de prendre le rapport entre le nombre de vivants d'âge x (y_x) et la cohorte de départ (y_0) comme étant égal à $1-\frac{x}{n}$ où n est l'âge au décès du dernier survivant. Ceci revient à considérer une décroissance linéaire de la population, c'est « l'hypothèse de Moivre » [1725] comme on l'appelle dans la littérature actuarielle, voir par exemple Bohlmann-Poterin [1911], p. 508.

[31] En particulier, Laplace [1812] p. 439 justifie le chargement des rentes : « J'observerai seulement que tous ces établissements doivent, pour prospérer, *se réserver un bénéfice* [n. i.] et multiplier considérablement leurs affaires, afin que, leur bénéfice réel devenant presque certain, ils soient exposés le moins du monde à de grandes pertes qui pourraient les détruire ». L'auteur conclut p. 440 : « ainsi, dans le cas d'un nombre infini d'affaires, le bénéfice réel de l'établissement devient *certain et infini* [n. i.]. Mais alors ceux qui traitent avec lui ont un désavantage mathématique qui doit être compensé par un avantage moral, dont l'appréciation va être l'objet du chapitre suivant [de l'espérance morale] ».

[32] Le terme est évidemment anachronique, mais la méthode de Laplace est tout à fait applicable à l'heure actuelle. Les deux différences avec la façon moderne de procéder à la construction des tests d'hypothèse sont les suivantes : d'abord Laplace utilise une approximation analytique et non un théorème de convergence probabiliste (ce qui lui permet d'additionner des variables suivant des lois différentes), ensuite il approche les sommes de variables par la loi qui porte son nom, alors qu'aujourd'hui on utilise un normale centrée réduite (la loi de Laplace a un écart-type de $\frac{1}{2}$). De façon générale, la pertinence des travaux de Laplace sur l'estimation a justifié l'intérêt des statisticiens contemporains comme Cochran [1977], pp. 158-60, [1978], ou bien sûr Bru [1988].

[33] Voir Bru [1988], en particulier les notes 101 et 105, pp. 37-8.

distributions considérées sont donc, là encore, binomiales. Ces tests d'hypothèses consistent à s'interroger sur la probabilité qu'une fréquence réelle soit éloignée de son estimation sur un échantillon. La forme analytique du problème est l'étude d'une variable dont la loi de probabilité est de la forme[34] $\dfrac{C_{p'}^{q'}\int_0^1 x^q(1-x)^{p-q}x^{q'+1}(1-x)^{p'-q'}dx}{\int_0^1 x^q(1-x)^{p-q}dx}$. Approcher cette quantité permet ensuite d'étudier avec la même approximation toute variable binomiale. Mais il est faux de croire que la problématique générale de la dispersion (qui s'applique dans les question d'assurance) est explicite chez Laplace. C'est bien l'analogie *mathématique*, l'analogie entre des formes fonctionnelles identiques — et certainement pas une analogie de type conceptuel, qui consisterait à rechercher des domaines d'application pour une théorie de la dispersion préexistante — qui conduit l'auteur a utiliser les mêmes outils[35].

Pour conclure sur Laplace dans la perspective de la VaR, on peut constater qu'il applique le principe de Condorcet comme critère de gestion pour des activités variées et qu'il prolonge le parallélisme avec la question de l'estimation. L'intérêt particulier de ce dernier point est qu'il conduit à la cristallisation de seuils de probabilité conventionnels. Laplace éblouit donc tant par la généralité de son propos que par la précision qu'une spécification donnée permet d'y apporter.

. SF Lacroix et l'école laplacienne

Au terme de cette présentation des travaux de Laplace, il convient de dire un mot de Silvestre-François Lacroix. Ce disciple de Condorcet publie en 1821 un *Traité élémentaire du calcul des probabilités* qui mérite son qualificatif (« élémentaire »). Le but de Lacroix paraît être essentiellement de vulgariser le calcul des probabilités dans ses différentes applications. Les § 134-139 (pp. 235-48) sont consacrées au même sujet que les textes déjà présentés. Seulement, il n'est plus question de démonstrations, et encore moins de généralité : l'auteur développe des exemples (dont la difficulté n'excède pas la résolution d'équations du premier degré) afin d'illustrer le calcul du taux de chargement, étant donné un niveau de sécurité voulu. Le souci pédagogique de l'auteur est incontestable, si bien que ces pages constituent encore une bonne introduction à la question. La présence de ces considérations dans un ouvrage aussi élémentaire a le mérite d'indiquer le degré de diffusion de cette théorie du risque, tout au moins dans le cercle étroit des mathématiciens formés aux questions de probabilité[36].

---

[34] Il s'agit d'une fonction bêta, c'est-à-dire une fonction de la forme $B(p,q)=\int_0^1 x^{q+1}(1-x)^{p+1}dx$. Euler [1781] en a réalisé l'étude détaillée (publiée en 1794), c'est pourquoi Legendre parlait à son propos d'intégrale d'Euler du premier type.

[35] Cette opinion peut sembler polémique dans la mesure où elle constitue un contre-exemple à la thèse d'Israël [1996], mais ce contre-exemple est pour l'heure bien isolé.

[36] Parmi ceux-ci on peut citer les contributeurs au prix sur les Assurances maritimes de 1783 à 1787 (*cf. infra*), en particulier Bicquilley, l'auteur de [1804], qui contient d'intéressants développements probabilistes (Chapitre V — des spéculations de commerce). Un revue substantielle de ses contributions est présentée par Crépel [1998], qui a redécouvert et réédité Bicquilley [1804].

Le travail laissé inachevé est repris par Lacroix, disciple de Condorcet, qui termine les calculs de détermination de la prime, en infléchissant cependant la pensée du maître. En effet, Lacroix abandonne le point de vue de l'assuré : « après avoir discuté les intérêts de l'assureur, il faudrait s'occuper de ceux de l'assuré, mais cela me mènerait trop loin[37] ». Cet argument n'est pas vraiment explicite, mais on peut croire que la démonstration par Condorcet sur ce qu'on pourrait appeler rétrospectivement l'« épuisement du surplus » de l'assuré est ici visée. Lacroix remarque et démontre que la condition de « seuil » du côté de l'assureur suffit à déterminer les primes. Le problème des seuils reste cependant leur multiplicité, mais l'auteur donne la prééminence à « la plus grande perte[38] ». Le « gain que donne l'opération » joue un rôle secondaire, quoique la méthode permette néanmoins de le contrôler. Mais on peut très facilement imaginer de renverser l'ordre des priorités, ce qui ne change rien, du point de vue mathématique, à la méthode que nous allons présenter.

Lacroix reprend le bilan de l'assureur exposé par Condorcet, dans le cas simple où les contrats ont une issue binaire : dénouement heureux ou sinistre. Si l'on reprend les notations de Condorcet (pour a, b, m, n, etc.), le bilan de l'assureur s'écrit chez Lacroix $n'b'-m'(a+b)$[39]. La plus grande perte est notée c. En posant $n'b'-m'(a+b)=c$, on obtient évidemment b' comme étant égale au quotient $\frac{c+m'(a+b)}{n'}$. Cette égalité ne permettait pas à Condorcet de déterminer quoi que ce soit. En effet, si la valeur c du seuil est choisie directement, le problème tient à sa probabilité, puisqu'il faut en déduire le plus petit nombre de sinistres m' parmi n' épreuves qui ait une probabilité inférieure. Dès que n' est un nombre de quelque conséquence, il faut calculer des puissances élevées des probabilités élémentaires (loi binomiale), ce qui est fastidieux. Lacroix donne alors un exemple : pour $n'=200$ navires assurés avec en moyenne un naufrage pour cent traversées[40], si l'assureur n'admet qu'une chance sur 100.000 d'une perte extrême, alors on trouve[41] $m'=10$. Dès lors, il reste à fixer le montant de la perte extrême, et la prime est déterminée. Dans le (premier) exemple de Lacroix, en choisissant $-7(a+b)$, la valeur de sept navires, comme perte extrême, on trouve $b'=\frac{-7(a+b)+10(a+b)}{200}=\frac{3(a+b)}{200}=1{,}5\%$ du capital assuré. Comme chez Condorcet, c'est en fixant la VaR qu'on obtient la règle de gestion.

Pour retrouver la probabilité du gain « normal », il suffit de fixer le niveau de celui-ci. On l'écrit comme Condorcet e, et l'on remarque qu'il correspond un nombre de sinistres m'' maximum tel que $n'b'-m''(a+b)=e$ (peu importe que m'' soit entier). On remarque alors que

---

[37] Lacroix [1821], p. 247 § 139.

[38] *Ibid.*, p. 239.

[39] Lacroix écrit pour sa part $q'a-pb$, où q' est le nombre de sinistres, a le remboursement par l'assureur à chaque sinistre, p le nombre de primes encaissées et c le montant de la prime. La variable considérée est donc la perte, et non le bénéfice comme chez Condorcet, *cf.* Lacroix [1821], pp. 239-248.

[40] Dans les termes de Condorcet, on peut écrire $p=\frac{1}{100}$.

[41] Grâce aux tables des valeurs de la loi normale ou d'une binomiale.

m'-$m''=\frac{e-c}{a+b}$. Quand le niveau du gain normal, par exemple à $0,7(a+b)$, comme Lacroix, on trouve (dans l'exemple déjà cité) $m''=10-\frac{0,7(a+b)-(-7)(a+b)}{a+b}=2,3$. On procède alors par interpolation d'après la table des valeurs de la loi binomiale pour trouver la probabilité : 67% de chances d'avoir deux naufrages ou moins, 85% d'avoir trois sinistres au plus, donc « 2,3 pertes » nous donne une probabilité d'environ 75%. C'est-à-dire que dans trois cas sur quatre, l'assureur retire un profit supérieur à $0,7(a+b)$ pour un chiffre d'affaires de $3(a+b)$, soit un taux de 23%.

Lacroix achève donc de formaliser une partie des idées de Condorcet, en présentant une théorie définitive du seuil de risque. Cependant, comme le remarque Crépel[42], l'assuré a disparu dans ces calculs : Lacroix est donc représentatif du point de vue actuariel qui domine cette science nouvelle, il présente également l'embryon des techniques qui seront employées par ses successeurs.

L'œuvre *économique* de Lacroix, Laplace et Tetens ne sombre pas dans un anonymat aussi rapide que définitif. La mémoire de Tetens est vivante chez les actuaires, non seulement allemands (cf. Bohlmann) mais aussi anglais (Godfrey Hardy le cite dans son cours à l'*Institute of Actuaries* en 1908). Quant à Laplace, il est évidemment une figure imposante chez ces mêmes actuaires, puisqu'il est le père de la *Théorie Mathématique du Risque*, qui étudie la fixation des primes sous l'angle de la solvabilité presque sûre (un important survey est fourni par Cramèr [1930]). Même boudé par les économistes et chassé des facultés de mathématiques par les disciples de Gauss obsédés de rigueur et d'abstraction, Laplace a légué à tous ceux que les problèmes d'estimation intéressent, une méthode qui attendra Jerzy Neyman pour connaître des améliorations substantielles.

3. Economie politique

L'influence de Laplace sur Edgeworth est à la fois évidente et connue (Stigler [1987] pp. 301 sqq.). Le sujet nous donne une nouvelle fois l'occasion de le montrer, et par la même occasion de saisir comment les économistes s'emparent d'une règle de gestion normative pour en faire un principe descriptif. Après Edgeworth, Wicksell a considéré la trésorerie d'entreprise en général. Enfin, on dira un mot sur les développements de la microéconomie dans l'Angleterre des années 30, car la décision risquée y est à la mode, mais, comme au XVIIIe s., les Anglais restent à l'écart de la VaR.

Edgeworth

Le choix d'Edgeworth [1888] pourrait apparaître peu judicieux pour illustrer l'histoire de la VaR, dans la mesure où cet article ne parle pas de risque. Cet auteur démontre cependant ses liens avec Laplace[43], et il offre un cadre conceptuel aux travaux ultérieurs consacrés à la question. L'auteur observe que « la solvabilité et le profit du banquier dépendent de la probabilité qu'il ne soit pas appelé à rembourser d'un coup plus d'un

[42] Crépel [1988], p. 284.

[43] Outre [1888], qui est une transposition aux banques des questions d'assurance de la *Théorie analytique*, on lira Edgeworth [1885b] comme un hommage : un siècle exactement après Laplace [1785], l'irlandais adresse la même question que son devancier.

tantième de son passif »[44] — c'est exactement la définition du risque qui transparaît des travaux de Condorcet et surtout de Laplace[45]. Edgeworth représente l'activité bancaire comme un « jeu » où il faut arbitrer entre profit et solvabilité (pour augmenter le profit, il faut limiter les immobilisations, ce qui remet en cause la solvabilité de la banque). Le reste de l'article s'occupe de la détermination d'un niveau minimal pour les réserves liquides compatible avec une solvabilité presque sûre VaR ; et insiste en particulier sur les conséquences de l'addition des variables aléatoires : si le volume d'activité croît dans une proportion r, il suffit que les réserves augmentent d'un facteur $\sqrt{r}$. Sur ce point, Edgeworth rejoint les considérations du Marquis de Laplace.

Pour parvenir à la détermination du niveau de réserves, l'auteur a recours à une hypothèse simplificatrice : l'indépendance des retraits (il distingue cependant des variations saisonnières[46] et admet la possibilité de rares crises de confiance[47]). Sous cette hypothèse, le théorème limite central[48] permet de considérer que la somme des mouvements de trésorerie suit la « loi des erreurs ». Edgeworth peut alors considérer les statistiques des retraits comme des réalisations d'une variable normale et obtenir le niveau de réserves minimal compatible avec une probabilité de solvabilité donnée. Il lui suffit pour cela d'estimer les paramètres « de location et d'échelle » de sa variable : la médiane et le module[49]. Les statisticiens contemporains seraient un peu déroutés par ces grandeurs : l'emploi de la médiane s'explique notamment[50] par l'importance des études graphiques, et le module trouve son origine dans une façon surannée d'écrire la densité de « loi des erreurs »[51]. Alors qu'aujourd'hui on considère, à la suite de Karl Pearson[52], une densité du type $f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$ (où l'écart-type vaut σ^2), Edgeworth écrit encore[53] $y=\frac{1}{c\sqrt{\pi}}e^{-\frac{x^2}{c^2}}$ (où le module vaut c).

Après Laplace (Cournot, Jevons…), Edgeworth réintroduit donc les théorèmes de convergence probabiliste en économie : il peut ainsi obtenir simplement la probabilité qu'une variable dépasse un certain seuil. On peut cependant s'étonner que cet auteur n'ait pas voulu recourir à une notion de risque globale.

---

[44] Edgeworth [1888], p. 113.

[45] Voir Rieucau [1998], *passim* ; Pradier [1998], chap. 2, et Laplace [1812], pp. 432-4.

[46] « cela n'est vrai que pour les retraits effectués par des causes *indépendantes*. Ce ne serait pas vrai de retraits d'automne dus à des causes régulières », *ibid.* p. 125.

[47] « (...) le public paniqué agit non pas 'indépendamment', mais comme un troupeau », *ibid.* p. 122. Ces crises ont, comme valeurs extrêmes d'une distribution normale, une probabilité très faible.

[48] Laplace [1810].

[49] Le module est égal à l'écart-type multiplié par $\sqrt{2}$. Voir, par exemple, Edgeworth [1885], p. 188 : « la somme des carrés de ces différences (les écarts à la moyenne) multipliée par deux et divisée par le nombre (...) d'observations (...) est égale au *carré du module* ».

[50] « Mais aussi de la problématique de l'interclassement chère à Galton et à celle de la robustesse cultivée par les astronomes anglais », ajoute Armatte [1999].

[51] Loi « normale » après K. Pearson.

[52] *Cf.* K. Pearson [1894], *passim.*

[53] Edgeworth [1888], p. 114 n. 2. Il s'agit de « la forme popularisée à l'époque par G. B. Airy dans 'theory of errors of observation' » (Droesbeke et Tassi [1990], p. 110).

Wicksell - Fisher

Wicksell a lu l'article d'Edgeworth puisqu'il le cite[54] dans *Geldzins und Güterpreise.* En matière purement statistique, il se contente d'une innovation mineure : il emploie l'écart *probable*[55] au lieu du *module.* En revanche, l'interprétation économique s'enrichit nettement puisque le modèle vaut désormais pour toutes les entreprises (Wicksell expose d'ailleurs en premier lieu la généralisation dans une économie *au comptant* avant d'envisager le crédit, c'est-à-dire les banques). On peut ainsi calculer la probabilité pour une entreprise donnée de ne pouvoir honorer ses engagements[56]. L'auteur insiste à nouveau sur l'importance de la taille des firmes : si l'entreprise double sa taille, alors son besoin de trésorerie sera multiplié seulement par $\sqrt{2}$, et donc la trésorerie diminuera en proportion du chiffre d'affaires[57]. Cependant Wicksell, comme Edgeworth, n'emploie pas le mot « risque », sauf en parlant de « prime de risque »[58] sur les taux et, dans ce dernier cas, il ne propose pas de « mesurer » le risque.

Dans la mesure où l'article d'Edgeworth ne semble pas avoir été lu[59], on serait tenté de faire remarquer le rôle très important que Wicksell a joué dans la transmission de la règle de gestion. Les auteurs des années trente, comme Hicks et Makower[60] (qui a rapporté sur *Geldzins und Güterpreise* pour *Economica*[61], un an avant la publication de son article avec Marschak) connaissaient bien Wicksell. Mais cela n'a pas suffi à attirer les chercheurs sur cette piste, puisqu'ils en ont préféré une autre, plus abstraite et générale, comme on le verra au paragraphe suivant. La postérité des travaux de Wicksell devra donc encore attendre, ce qui n'est pas le cas de ceux d'Irving Fisher, comme on va le voir.

Kolm attribue à Irving Fisher le mérite d'avoir donné sa forme définitive à l'idée d'Edgeworth[62]. En reprenant la même idée de calcul du risque d'insolvabilité[63] (« probabilité que les bénéfices tombent au-dessous de la ligne de paiement des intérêts »[64]), I. Fisher utilise cette fois l'écart-type, qu'il emprunte indirectement à Pearson (*via* Norton[65]) pour calculer la probabilité du risque d'insolvabilité. Comme l'écart-type est

---

[54] Wicksell [1898], p. 66 n. 1.

[55] Il s'agit de la valeur du quartile d'une loi normale. Elle est égale à 0,67 fois l'écart-type (*cf.* par exemple, Bachelier [1914], pp. 259-260 ou Bauschinger - Andoyer [1908], p. 177).

[56] Wicksell [1898], pp. 57-8.

[57] Wicksell [1898], p. 67. On rappelle que pour une variable aléatoire $\boldsymbol{X}$ d'écart-type σ, l'écart-type de $2\boldsymbol{X}$ est $\sigma\sqrt{2}$. Le module et l'écart probable suivent les mêmes règles.

[58] Wicksell [1898], p. 60.

[59] Au début des années vingt encore, Keynes [1921] ne cite pas moins de vingt-neuf travaux de cet auteur sans mentionner pourtant Edgeworth [1888].

[60] Helen Makower était chercheur à la LSE, elle participait donc avec Hicks au *Robbins' group*.

[61] *Cf.* Makower [1937].

[62] Kolm [1967], p. 23 : « il propose de mesurer par l'écart-type l'incertitude qui affecte les rendements d'un capital... »

[63] I. Fisher [1906], p. 410 n. 1, cite explicitement Edgeworth [1888].

[64] I. Fisher [1906], p. 409 (p. 462 de la traduction française).

[65] I. Fisher [1906], p. 410 n. 1 cite Pearson [1892], où il n'est pas question d'écart-type, et *Biometrica* (*sic*) de façon floue, puisqu'il renvoie à la revue en général. Son information paraît donc être de seconde main, puisque Fisher avoue dans la même note qu'il faut voir Norton [1903] « pour une application de cette méthode aux problèmes industriels et financiers ».

la mesure de dispersion qui s'est imposée, par exemple chez Markowitz, on pourrait être tenté d'accorder à I. Fisher un rôle important dans la propagation de la thèse d'Edgeworth. Cette thèse est erronée, les idées fisheriennes sur la finance n'eurent pas grand écho, soit du fait de leur confusion[66], soit à cause de la ruine de leur auteur consécutive au krach de 1929.

Dans l'Angleterre des années trente : préférences sur les moments

En 1934, Hicks utilise ce qu'il connaît des statistiques pour proposer une approche systématique de la décision :

> « ... la forme de chaque courbe de fréquence peut être étudiée au moyen de ses *moments* — dans le sens statistique du terme. Chaque courbe peut être définie de façon univoque en prenant un nombre assez grand de moments, et en prenant un nombre restreint on obtient une approximation de la situation[67] ».

En matière d'analyse en termes de moments, Hicks semble ici l'initiateur d'un mouvement que Chambers et Marschak prolongent. Chambers reconnaît explicitement l'antériorité des recherches de Hicks[68], tandis que Marschak se réfère de manière allusive[69] à un travail dont il s'inspire pourtant directement.

---

[66] D'une part, il réfute l'idée que le risque et le rendement soient corrélés autrement que par une « question de définition » (c'est-à-dire que la décote sur un titre pour cause de risque, augmente par contrecoup le taux d'intérêt actuariel). Dans le même esprit, le problème d'antisélection lié aux primes de risque le conduit encore à douter de la nature de la corrélation entre risque et rendement : « ce n'est pas seulement que le risque élevé rend le prêt coûteux : ces termes onéreux augmentent l'incertitude du paiement, et ainsi de suite dans un cercle vicieux ». Ainsi ce n'est pas la prise de risque qui permet d'obtenir des rendements supérieurs, mais la volonté de dégager une rentabilité élevée qui engendre un risque. I. Fisher n'adhère donc pas tout à fait à la thèse classique qui voit dans l'accroissement du rendement une compensation du risque.

D'autre part, Irving Fisher revient sur le sujet dans son ouvrage de 1930. On devine alors l'influence de Knight : « bien qu'il soit possible de calculer mathématiquement les risques d'un certain type comme ceux des jeux de hasard (...), la plupart des risques économiques ne sont pas si aisément mesurés », écrit Fisher. Encore cette acception du mot « mesure » doit elle être entendue dans un sens minimal : il s'agit simplement d'estimation de la distribution de probabilité d'une variable donnée (un « risque » dans le jargon actuariel), et non de la définition d'une grandeur qui permettrait de décider du *risque* (au sens de danger potentiel) inhérent à la distribution. En outre, Fisher avait dès 1906 refusé de qualifier l'écart-type de mesure du *risque* : il employait le terme statistique de « variabilité ».

Le déni de la causalité habituelle dans la corrélation classique entre risque et rendement, et le refus explicite de mesurer les risques empiriques nous portent à croire que ce n'est pas Irving Fisher qui a influencé les économistes de la génération suivante. L'emploi de l'écart-type témoigne simplement de l'ascendant que Pearson s'est rapidement assuré sur la statistique. D'ailleurs, on s'étonne alors de rencontrer encore dans les années vingt, sous la plume de Pigou, des considérations « à l'ancienne » sur les « courbes de fréquences » qui se présentent alternativement comme des « parapluies ouverts » ou « fermés ». Ce phénomène dénote simplement la persistance de la statistique graphique[66] dans la formation des économistes anglais, et probablement le peu d'intérêt de Pigou pour le problème purement statistique de la construction des mesures.

[67] Hicks [1934], p. 195.

[68] Chambers [1934], p. 45 n. 1 : « Le professeur Pigou n'essaie pas d'analyser les courbes de fréquence par les moments (...). Sur ce point j'ai bénéficié de discussion avec le docteur J. R. Hicks. L'adoption de la moyenne et de

La description par les moments ne permet cependant qu'une approximation des densités, il faut encore construire la décision. C'est ce que va faire Chambers. Dans un article de 1934, cet auteur considère le problème de l'investissement. Les variables aléatoires dont il traite constituent les perspectives de rendement de ces investissements. L'auteur n'est pas explicite sur la construction de cette variable agrégée, sur le fait qu'elle inclut ou non les remboursements du principal, et surtout sur le taux qui est retenu pour actualiser les sommes futures. Après tout, on parle bien *du* taux d'intérêt, sans plus de précisions, avec l'idée que les contingences n'ajoutent rien à la théorie. L'important est pour Chambers que la moyenne figure le rendement moyen, et que l'écart-type représente le risque. L'auteur commente ainsi une carte d'indifférence :

> « Si notre individu peut recevoir deux pour cent sans aucun risque, il sera indifférent entre ces deux pour cent sans risque et deux et demi pour cent avec un écart-type de un, etc. pour toutes les valeurs de la courbe d'indifférence notée (*iii*) »[70].

On aura compris que les courbes d'indifférence sont croissantes dans le plan (variance, espérance)[71] ; ceci traduit le fait qu'on n'accepte un accroissement de risque qu'au prix d'une rémunération (moyenne) supérieure. Il est également un point que Chambers ne précise pas de façon explicite, mais que son graphique montre, c'est que la prime de risque croît plus que proportionnellement avec le risque ; les courbes d'indifférences sont donc (légèrement) convexes si le rendement est porté en ordonnée. L'existence de cette carte d'indifférence permet d'envisager la résolution du « programme de l'investisseur ». Le reste de l'article construit ainsi un équilibre entre offreurs et demandeurs de capital.

A la suite de Hicks, Chambers est parfaitement conscient du caractère approximatif d'un modèle qui ne prend en compte que les deux premiers moments. Il indique donc qu'il est possible de tenir compte des moments d'ordre supérieur, qui peuvent se révéler discriminants dans des cas « spéciaux »[72], mais avoue ne pas poursuivre l'analyse au-delà de deux dimensions (il est vrai que le cas à n dimensions ne présente aucune particularité tant que n est fini)[73]. Pour sa part, Hicks se montre plus embarrassé par les moments d'ordre supérieur. Dès son papier de 1934, il concède qu'une analyse limitée à deux moments[74] est approximative. Marschak est en fait le premier à proposer et à justifier explicitement l'importance du coefficient d'asymétrie[75] (*skewness*, moment de troisième

---

l'écart-type comme variables dans cette analyse m'a été suggérée par lui ». Chambers publie dans la *Review Economic Studies* qui est une émanation de la *London School of Economics*, c'est donc vraisemblablement un jeune chercheur ayant participé au *Robbins' group*.

69 Les renvois de Marschak [1938] pp. 311 et 320 sont à peine compréhensibles. Makower-Marschak [1938] est un peu plus appuyé, mais ces auteurs ne pouvaient pas taire leurs sources dans un périodique édité par l'institution où travaillait Hicks.

70 *Ibid.*, p. 46.

71 Ou (espérance, variance), comme on considère d'ordinaire, puisque de toute façon elles sont croissantes. Chambers choisit pour sa part un repère (variance,espérance).

72 Chambers [1934], p. 46.

73 *Ibid.*, p. 47.

74 Voir la citation au paragraphe précédent (appel de la note 67 p. 18). Notez que Tobin [1965] pp. 12-14 expose également la thèse de l'approximation, mais sans revenir sur la discussion des années 1935-1950.

75 L'exemple de Marschak [1938], p. 320.

ordre), auquel Hicks se rallie définitivement par la suite[76]. Le modèle de décision canonique comprend donc, en plus du rendement et du risque, un facteur de *potentiel*[77], suivant l'exemple que donne Marschak : les gens « n'aiment pas (...) les situations où la consommation de viande peut varier dans un intervalle important ; (...) et (en témoignent les supercagnottes sur les matches de football), ils aiment les gains élevés à faible probabilité, c'est-à-dire une forte asymétrie à droite des gains ». Mais puisque les préférences sont maintenant construites, il convient de voir à quels domaines les auteurs appliquent leur modèle.

Les textes qui formalisent la relation d'indifférence présentent évidemment aussi une mise en situation de cette innovation. Le thème dominant est au départ le marché monétaire, comme en témoignent les titres des articles de Chambers, Hicks, Marschak[78]. Le risque est d'abord pris en compte comme un aspect dominant dans l'arbitrage qui conduit à la détention de titres ou d'obligations (on n'est pas loin de la *préférence pour la liquidité* de Keynes). Mais ces auteurs débordent rapidement les questions de finance pure : dans un article de 1938 intitulé de manière trompeuse « la monnaie et la théorie des actifs », Marschak introduit la représentation d'une *économie d'incertitude* (au mépris de la terminologie knightienne). Cependant, le sens de l'incertitude dans cette économie est loin d'apparaître clairement[79].

Ces longs développements montrent que la piste explorée par Edgeworth et Wicksell a été perdue de vue au profit de travaux abstraits qui annoncent ceux Markowitz (voir Pradier [2000]). Il faudra attendre les années cinquante et le développement de la institutionnel de la finance pour voir ressurgir une thématique proche de la VaR. Entre-temps, la théorie des tests qui s'est développée à la suite des travaux de Neyman et Pearson [1928], [1933a], [1933b] a familiarisé les jeunes diplômés avec la notion de seuil

---

76 Hicks [1939], p. 125 n. 1.

77 Ce terme s'est imposé pour décrire l'effet d'une asymétrie. Dans un cadre théorique différent, il est employé par Lopes [1986], [1987] et Cohen [1992], entre autres.

78 Chambers [1934] : « Fluctuations in capital and the demand for money » ; Hicks [1935] : « A suggestion for simplifying the theory of assets » ; Makower-Marschak [1938] : « Assets, prices, and monetary theory » ; Marschak : [1938], « Money and the theory of assets ».

79 Dans un premier temps, Marschak présente un modèle classique certain avec dotations initiales (initial balance sheets), consommateurs (tastes of men), et producteurs (transformation conditions). Il introduit le risque en transformant les biens, qui ne sont alors plus caractérisés par des scalaires mais par des vecteurs (moyenne, variance, asymétrie). Marschak indique de manière énigmatique que :

« Comme précédemment [dans le cas certain], la préférence (ou l'aversion) entre x et y (disons entre le risque et le profit de la viande) égale, à l'équilibre, leur taux de transformation [TMS] ».

Marschak propose d'aller plus loin que les auteurs précédents. D'abord, il reprend la relation de préférence entre les moments de manière bilatérale : dans le cas du prêt, on peut mettre en évidence une relation de préférence aussi chez les offreurs, car leur situation est symétrique de celle des demandeurs. Ensuite, Marschak suggère le passage à une économie de production. Mais ce passage pose un problème d'interprétation. Si l'on peut interpréter les « conditions de transformation » (fonctions de productions) entre les deux premiers moments comme une représentation de l'assurance — encore que cette interprétation soit déjà difficilement tenable, puisque l'assurance ne transforme pas le risque, elle le déplace — Marschak ne se donne pas la peine de le préciser. En évitant la discussion, l'auteur veut peut-être ne pas attirer l'attention sur le fait que ces « conditions de transformations » recouvrent un rôle obscur. Que pourrait bien signifier une fonction de production qui transforme des combinaisons de la variance d'un bien et l'espérance d'un autre en asymétrie d'un troisième bien ?

de confiance. Le consensus autour de niveaux de confiance standard — comme l'illustre par exemple Popper [1959] — jouera certainement un rôle dans la transformation de la règle de gestion en critère de comparaison.

4. Théorie financière

Par « théorie financière », on entend en fait des travaux marginaux dus à Roy et aux économistes agricoles, car le *mainstream* reste trop près de la problématique des années 30 pour contribuer à la diffusion de la VaR[80].

. Mieux que Markowitz : Arthur D. Roy

Les relations entre *économie* et *finance*, que ce soit sur le plan théorique ou institutionnel, sont complexes. On se contentera ici de suggérer d'abord le caractère marginal voire sulfureux des études financières chez les économistes : la bourse constitue souvent un objet de scandale, qu'on y gagne comme Ricardo et Keynes ou qu'on y perde comme Irving Fisher. Jusqu'à une date récente, ce n'est pas un sujet théorique noble, si bien que la finance se construit comme discipline à la suite de son exclusion par les économistes. En cela, Markowitz joue un rôle particulier, puisqu'il est le *premier exclu*, son parcours est donc emblématique, et aussi révélateur d'un mouvement de fond qui conduit à l'institutionnalisation de la finance, discipline où la notion de risque est centrale, aux portes de la théorie économique (voir Pradier [2005]). Cette exclusion s'est opérée avec la fameuse tirade de Friedman pendant la soutenance de thèse de Markowitz :

> « Harry, je ne vois pas de problème avec tes mathématiques, pourtant j'ai un problème. Ce n'est pas de l'économie, et on ne peut pas te donner un doctorat d'économie pour une thèse qui n'est pas de l'économie. Ce n'est pas des maths, ce n'est pas de l'économie, ce n'est même pas de la gestion » (Bernstein [1992], p. 60).

En effet, le point de vue *économique* des années trente dont on a parlé, étudiait le choix de portefeuille pour comprendre les conditions de la politique économique. Ici, il est clairement question de guider le choix d'un portefeuille optimal. Dès cette origine pourtant, la finance apparaît frappée d'ambiguïté : comme discours théorique, elle peine à se démarquer de l(a macro)économie, même si elle affiche des prétentions opérationnelles distinctes (la gestion de portefeuille et non pas de la conjoncture). On peut néanmoins se demander ce qu'il en est vraiment du caractère opérationnel de ces théories. Roy [1961] a dénoncé le mélange des genres entre une théorie économique trop complexe et une volonté affirmée d'application. La théorie pure de Markowitz, qui revendique la filiation de Savage[81], et utilise la méthode de Williams pour calculer des valeurs actuelles (et leur variance) de tous les titres étant données (si l'on peut dire) leurs distributions de probabilités *subjectives* est tout bonnement inapplicable. Même la version

[80] Il est d'usage de mentionner le rôle de Dickson Leavens [1945] dans la constitution de la pensée de Markowitz. Je n'ai pas pu consulter ce papier, mais la description qu'en fait Holton [2002] p. 2 correspond simplement à une illustration du modèle (binomial original) de Condorcet [1784].
[81] Markowitz [1991], p. 470.

simplifiée, qui consiste à utiliser les performances passées des titres, est à peu près inutilisable au milieu des années soixante[82].

A contrario, Roy insiste sur le fait que les financiers réclament des méthodes rudimentaires et prêtes à l'emploi (« rough and ready rules of thumb ») et non pas de théories sur un autre monde. Pour cela, l'anglais considère un programme de maximisation du revenu avec une contrainte de « sécurité » : il impose une très grande probabilité (95%) que le revenu dépasse un minimum donné[83]. On retrouve donc le principe de Condorcet — ici baptisé *safety-first principle* — et l'idée de fixer un niveau de confiance et un niveau de perte, donc une VaR maximale admissible. Deux différence apparaissent toutefois avec le modèle de Condorcet : d'une part le seuil de sécurité conventionnel est fixé en référence aux tests statistiques qui sont d'un usage général. La pratique a donc créé des habitudes. D'autre part, au lieu de considérer directement les distributions des rendements, Roy simplifie les calculs en recourant à l'inégalité de Bienaymé-Tchébycheff[84]. Il emploie donc et retrouve donc formellement les résultats de Markowitz… Comme le remarque Bernstein, « [Roy] a eu la malchance de publier son article […] trois mois après la publication de celui de Markowitz dans le *Journal of Finance* »[85]. Pourtant, en 1952, Roy va plus loin que Markowitz : en particulier, il donne l'expression analytique de la « frontière efficiente » qui n'apparaîtra que dans Markowitz [1956].

L'œuvre de Roy a donc le double mérite de rappeler opportunément l'importance de la VaR comme principe de gestion, tout en réglant le choix des seuils probabilistes qui se sont imposés avec la diffusion des tests statistiques. Mais Roy montre aussi l'ambiguïté fondamentale de l'« analyse markowitzienne », qui prétend à l'application (bien qu'elle soit inapplicable) et s'adresse donc aux théoriciens ; cette ambiguïté s'étend aux héritiers de Markowitz, tant chez les financiers (en particulier Mossin) que chez *certains* économistes agricoles[86]. Nous ne considèrerons toutefois que ceux qui sont restés du côté de l'application.

. Les agriculteurs

Si l'on considère d'ordinaire que les économistes agricoles ont emprunté à Markowitz, il faut insister sur la précocité de l'article de Freund [1956]. Comme son titre l'indique (« *the introduction of risk into a programming model* »), ce papier s'attaque au même problème technique que Markowitz [1956] (et, rappelons-le, Simon [1956]). En effet, Freund choisit de maximiser une combinaison d'espérance et de variance (donc une fonction non-

---

[82] Bernstein [1992], p. 62 rapporte que le calcul de la frontière efficiente sur un ordinateur était si long que le coût de ce traitement était prohibitif.

[83] Voir Boussard [1969].

[84] Le théorème de Bienaymé-Tchébycheff permet d'écrire que la probabilité de s'écarter de la moyenne est inférieure à une fraction de la variance, ainsi pour une variable X de moyenne m et une distance d, le théorème donne :

$P(|x-m|\geq m-d)\leq\frac{\sigma^2}{(m-d)^2}$, ou encore : $P(m-x\geq m-d)=P(x\leq d)\leq\frac{\sigma^2}{(m-d)^2}$. Minimiser la probabilité que le rendement soit plus faible qu'un seuil donné revient donc à minimiser la variance du portefeuille, comme le fait Roy [1952].

[85] Bernstein [1992], p. 60.

[86] Il existe une littérature très importante dans ce domaine dont le statut est problématique, voir sur ce point Pradier [1998], pp. 231-4.

linéaire) sous des contraintes elles-mêmes linéaires. Encore une fois, Markowitz n'est ni le seul, ni visiblement le premier. Mais il peut au moins se prévaloir dans ce cas de la théorie générale du choix (même si nous l'attribuons à Hicks), alors que Freund retient une fonction d'utilité particulière. Il y a lieu de penser que l'avantage de Markowitz tient surtout à sa position à la RAND, à celle de son directeur de thèse à la Cowles, lieux où souffle l'esprit. En comparaison, le nom du North Carolina State College (où Freund a préparé sa thèse) suscite plutôt la condescendance : comme College, ce n'est pas une institution de recherche. Il faut donc voir *aussi* dans la réputation accordée à Markowitz un effet institutionnel indéniable.

Manifestement, l'économie agricole ne jouit pas d'une grande publicité : Rudolf Freund a proposé une application du modèle de Markowitz à la détermination du programme de culture optimal pour une exploitation agricole[87] dès 1956, c'est-à-dire deux ans avant l'article considéré comme « fondateur » de Tobin. Et pourtant Freund n'est jamais cité que par les économistes agricoles. Cela provient-il du caractère « appliqué » de ses recherches, et du mépris des théoriciens pour l'apparence de modestie des conclusions des « agriculteurs » ? Ne faut-il pas plus simplement voir dans cette ignorance une nouvelle manifestation du mépris des villes pour les campagnes, des capitales pour les provinces, du *centre* pour la *périphérie* (s'il faut parler comme Braudel pour être général), ou, dans ce cas précis, un mépris des théoriciens pour les praticiens ? Car Freund [1956] ne construit pas la frontière efficiente comme le fait Markowitz, mais dérive directement le « portefeuille de culture » optimal d'une fonction d'utilité pour les deux premiers moments du revenu total. En l'absence de frontière efficiente, on pourrait penser que le modèle de Freund est moins élégant que celui de Markowitz ; mais curieusement, cette faiblesse le rend assure la *compatibilité avec la théorie de l'utilité espérée*, que Markowtiz a mis trente ans à obtenir ! Quoi qu'il en soit, les spécialistes de l'économie agricole, à l'écart des modes, ont fait grand usage du modèle de Markowitz, et posé bon nombre de questions sur son statut théorique.

La discussion autour du modèle de Freund témoigne du faible intérêt des spécialistes de l'économie agricole pour l'unification théorique. En effet, ils ont décidé de s'éloigner résolument du cadre de référence que Mossin, Sharpe et Lintner construisaient en raison de la destination pratique de leurs recherches. L'emploi des formulations à la Markowitz pose en effet deux problèmes pour l'application : la frontière efficiente ne propose pas une lecture directe en terme de sécurité, et son calcul se révèle trop complexe.

Boussard s'est fait un des avocats du premier argument, en montrant que l'important n'est pas d'optimiser mais de savoir comment on optimise. Pour un ménage agricole qui choisit son plan de culture, le risque prend la forme d'un revenu inférieur à un certain seuil. C'est très exactement la formulation de Condorcet. On revient donc à la formulation de Roy, que les auteurs ne connaissent pourtant pas ! Comme lorsqu'au XVIII^e^ s. Tetens et Condorcet travaillaient parallèlement, on doit s'interroger sur les raisons de cet *air du temps*. La réponse tient manifestement à l'intégration dans la culture des ingénieurs de rudiments de statistique mathématique qui leur fait retrouver l'esprit de Laplace. Sur le plan théorique, les modèles des agriculteurs perdent certainement en généralité par

[87] Il convient d'observer que

rapport à l'analyse de Markowitz, et la frontière efficiente disparaît, ce qui diminue « l'élégance » du résultat. A la place, on spécifie une VaR limite, ce qui fait bien notre affaire. On observe ensuite les plans de production des ménages agricoles si on fait l'hypothèse qu'ils se comportent conformément au modèle et aux paramètres (prix, VaR) spécifiés.

La volonté de décrire les mécanismes de décision des agriculteurs n'est pas le seul facteur qui conduisit les économistes à prendre des libertés avec le modèle de Markowitz. A la même époque, Hazell constate que ce dernier est trop exigeant en matière de qualité de l'information et de traitement de cette information. Sur le premier point, l'auteur observe qu'il est difficile de supputer une matrice de variances-covariances, alors qu'on peut proposer quelques estimations de rendements[88]. Sur le second, il observe que la résolution d'un programme quadratique nécessite l'intervention d'un ordinateur de grande puissance (pour des raisons de précision[89]), alors qu'un programme linéaire se contente d'un opérateur formé à la méthode du simplexe[90]. Hazell propose donc de remplacer dans le programme de Markowitz la minimisation de la variance par la minimisation de l'écart moyen absolu (du revenu), d'où l'acronyme MOTAD (pour *Minimization Of Target Absolute Deviation*). Dans la perspective qui avait conduit à proposer la semi-variance, Hazell envisage également de considérer le seul écart moyen *négatif*, et montre que les calculs restent toujours aussi simples[91].

Afin de rendre leurs modèles testables ou applicables de manière simple, les économistes agricoles sont donc conduits — sans le savoir — à retrouver les suggestions de Condorcet et Tetens. En mettant l'accent sur la pratique au détriment de la théorie, les économistes agricoles anticipent sans le savoir l'évolution de la finance. Sauf que dans ce dernier cas, c'est le régulateur qui a imposé l'utilisation de la VaR.

5. La finance comme communauté de pratique

Les années récentes sont les mieux connues : on trouve des contributions sur les forums, comme celui de http://www.contingencyanalysis.com ou http://www.riskglossary.com, et surtout la remarquable synthèse de Holton [2002]. On se contentera d'indiquer deux directions : les réglementations prudentielles d'un côté, l'histoire de l'expression d'un autre.

---

[88] Hazell [1971], pp. 51 écrit : « dans certaines circonstances, le fermier peut disposer de valeurs subjectives des paramètres, et préférer fonder ses décisions sur ces évaluations subjectives. Cependant, ce type d'information est difficile à obtenir pour une activité complexe, et il semble difficile que la matrice des variances-convariances soit complètement spécifiée. »

[89] Hazell [1971], p. 56 n. : « les programmes [informatiques] disponibles souffrent sévèrement des erreurs d'arrondis ». Hazell cite également le problème des matrices singulières.

[90] Hazell [1971], p. 57 : « ceci [la minimisation de l'écart moyen] peut être aisément réalisé en suivant le modèle de la programmation linéaire ».

[91] *Ibid.*, pp. 59-60.

. l'expression Value-at-Risk

L'expression Value-at-Risk semble à la fois récente et incertaine. Il semble qu'à la fin des années 80 on ait vu voisiner "dollars-at-risk" (DaR), "capital-at-risk" (CaR), "income-at-risk" (IaR), "earnings-at-risk" (EaR) and "value-at-risk" (VaR). Tout cela trahit à la fois la vogue du concept de *risque* et l'indécision sur ce qui y était exposé. Finalement le terme *value* est le plus général. C'est aussi le plus normatif, puisqu'il évoque une autre mode contemporaine : celle de la *shareholder value*. Quoi qu'il en soit, après une phase d'incertitude, le rapport du G-30 en 1993 puis la publication du *RiskMetrics Technical Document* par JP Morgan en 1994 ont stabilisé la dénomination. Holton [2002] donne un aperçu assez fouillé avec des références, en particulier Guldimann qui a mené le projet *Riskmetrics* chez JP Morgan semble se prévaloir de l'invention de la terminologie et de sa diffusion dans la profession. Holton [2002] p. 21 insiste d'ailleurs sur le fait que *Riskmetrics* proposait une version plutôt simplifiée de la VaR (par rapport à des conceptions concurrentes plus raffinées), et que l'essentiel du travail accompli par JP Morgan fut la diffusion du concept, y compris à travers une campagne de *public relations* remarquablement orchestrée, puisqu'elle mobilisa la force de vente des éditeurs de logiciels payants censés aider à l'implémentation du modèle.

La « génération spontanée » de l'expression au début des années 90 témoigne donc à la fois de l'aspect communauté de pratique — car la VaR est plus une pratique qu'une « théorie », ou alors c'est une théorie d'un niveau technique vraiment faible — et de la préparation du champ avant le démarrage du phénomène. Il faut néanmoins tenir compte d'un autre facteur : le rôle des autorités de régulation.

. histoire des réglementations prudentielles

Les auteurs américains aiment mettre en avant l'existence de réglementations prudentielles sur le NYSE : dès 1922, ce marché imposait aux firmes participantes de provisionner 10 % du montant de leurs provisions. Par la suite, la réglementation prudentielle américaine s'est développé en raffinant cette règle de base. C'est en fait un trait commun aux professions bancaires et financières : la maîtrise du risque progresse sous l'effet de la réglementation. Il faut dire que, pour le régulateur, l'enjeu — des faillites bancaires en cascade conduisant à la destruction du système — est de taille, c'est le type même de risque « systémique ». En comparaison, les assurances ont, comme on l'a vu, conçu leur propre méthode de maîtrise des risques depuis le dix-neuvième siècle. Il est vrai qu'en matière bancaire, le risque de crédit comme le risque de marché sont plus délicats à modéliser. C'est pourquoi le régulateur intervient pour fixer un cadre légal de référence.

Aux Etats-Unis, si les marchés financiers exigent depuis les années 20 des réserves, c'est surtout la mise en place en 1980 par la SEC d'un nouveau système de garantie qui a fait date : pour la première fois, le but du système s'exprime clairement en termes de VaR. Il faut que la VaR à 95 % à 30 jours des établissements financiers soit compatible avec leurs réserves. Principe de Condorcet, toujours. Sauf que cette fois le principe de sécurité est adossé au système de *haircut* : les différents actifs sont pondérés selon des proportions choisies par le régulateur pour représenter leur risque propre. C'est encore l'approche qui présidera aux Accords de Bâle en 1988, à leur transposition dans le droit européen, à leur aménagement en 1996…

Cette année 1996 marque un nouveau tournant dans l'histoire des réglementations prudentielles : d'une part, la VaR est validée par le Comité de Bâle comme *la* mesure du risque agrégé, d'autre part, les nouveaux accords marquent l'approbation par le régulateur des *métriques privées*. Désormais le régulateur n'impose pas forcément sa mesure, il peut se contenter de certifier une méthodologie. Cela peut sembler un retour à avant la réglementation, mais il semble difficile de ne pas tenir compte de la complexité sans cesse croissante des transactions financière, du renouvellement des produits, etc. Il faut donc décentraliser l'évaluation des risques et certifier les méthodes ou les procédures plutôt que les évaluations elles-mêmes, bref les métriques plutôt que les mesures. Le but de la réglementation est alors non seulement de maîtriser effectivement le risque des établissements de crédit et des intervenants sur les marchés financiers mais aussi de permettre l'apparition et la *diffusion des bonnes pratiques*. En effet, la tentation existe pour les établissements de considérer le *risk management* comme un coût et d'en faire le moins possible de ce côté-ci. Mais en suscitant la compétition entre les modèles internes, comme *Riskmetrics* l'a été chez JP Morgan au début des années 1990, les autorités de régulation espèrent dans une émulation parmi les établissements financiers. Peut-être les modèles de *risk management* seront-ils, comme ont pu l'être les modèles d'évaluation de produits complexes ou comme les produits structurés, l'occasion d'innovations et d'un lutte pour le prestige symbolique entre les établissements.

En attendant, le développement des réglementations prudentielles et des pratiques afférentes offre le spectacle d'une profession qui concourt tout entière à l'élaboration de sa propre régulation. Comme les linuxiens avec leurs logiciels, les financiers offrent le spectacle d'une communauté de pratique d'autant plus inattendue que l'on attendait d'eux qu'ils fassent tout payer. Tout, sauf l'image et la preuve de leur sécurité.

Conclusion

L'histoire du concept de *Value-at-Risk* embrasse plus que l'histoire de la théorie financière ou les recommandations prudentielles de la profession. En fait, le formalisme de la VaR est né chez les mathématiciens des années 1780 pour résoudre des questions d'arithmétique politique, qui touchaient simultanément à la gestion et à la démographie. En fait, Condorcet, Laplace et leurs successeurs ont inventé tout à la fois la gestion quantitative (des sociétés d'assurance) et la statistique mathématique (inférentielle). Si l'idée de *dispersion* résume ces travaux des premiers temps, il faut comprendre que ce n'est pas le concept qui est généralisé, mais l'outil mathématique (la méthode de Laplace) qui trouve à s'appliquer à des questions mathématiques isomorphes. Au long du XIX^e s., la *Théorie Mathématique du Risque* s'impose chez les actuaires, et les économistes en la personne d'Edgeworth proposent d'étendre le modèle de gestion prudentiel à l'activité bancaire, puis à la trésorerie d'entreprise en général (Wicksell). Si cette gestion prudentielle rappelle étroitement la métrique VaR classique, on observe également des développements plus abstraits dans les années 30, qui conduisent tout droit aux travaux de Markowitz. Mais à côté du chercheur Nobélisé, de nombreux financiers, économistes agricoles, actuaires, s'inscrivant dans la lignée Laplacienne renouvelée par la pratique des tests de Neyman et Pearson, pratiquent la gestion VaR prudentielle comme Monsieur

Jourdain fait de la prose. L'apport des années cinquante, ce n'est pas tant le modèle de Markowitz, qui ne sert à rien en la matière, que la généralisation d'une pensée en termes d'intervalle de confiance chez les jeunes chercheurs. Il n'est alors pas si étonnant qu'à la génération suivante la VaR puisse quitter le secret des laboratoires et des recherches solitaires pour entrer dans le *common knowledge* des pratiques reconnues. Lorsque le régulateur se saisit de cet outil, chacun est à même d'en comprendre la raison, l'utilité, le fonctionnement. Le seul changement qu'ont imprimé les années 80-90 est le passage d'une optique de gestion à une optique de comparaison : la VaR n'intéresse plus le seul gestionnaire, il fait partie de l'information exigible par le régulateur, l'investisseur, bref les parties concernées sur le marché financier.

Cette diffusion de l'information économique, tant dans sa substance que dans les prérequis mathématiques qui sont nécessaires à sa compréhension, aurait probablement bouleversé Condorcet. On sait que pour l'inventeur du progrès, la diffusion du raisonnement probabiliste était le moyen le plus sûr pour l'humanité de s'affranchir de l'obscurité et de progresser indéfiniment dans la voie de la science et du bonheur. Bien que cet optimisme semble aujourd'hui pour le moins exalté (mais il devait l'être plus encore aux témoins de la captivité de Condorcet attendant son exécution), on ne peut manquer d'en saluer la venue. Après tout, ce n'est pas tous les jours que l'on constate l'arrivée du Messie, lequel, pour l'occasion, s'appelle VaR.

Bibliographie

Allais M. [1955], « Fondements d'une théorie positive des choix comportant un risque et critique des postulats et axiomes de l'école américaine », *Annales des Mines*, pp. 4-55.

Arrow K. J. [1951], « Alternative approaches to the theory of choice in risk-taking situations », *Econometrica*, XIX, pp. 404-37.

Arrow K. J. [s. d.], "Jacob Marschak" *in Biographical Memoirs of the Academy of sciences of the USA*, vol. LX, pp. 129-149, version électronique disponible à l'adresse : http://www.ul.cs.cmu.edu/books/biographical_memoirs/bio001.htm

Baumgarten, H. -U. [1991], *Kant und Tetens: Untersuchungen zum Problem von Vorstellung und Gegenstand.* - Stuttgart: M und P, 1992, ISBN 3-476-45015-5.

Bäumler A. [1923], *Kants Kritik der Urteilskraft, ihre Geschichte und Systematik*, I, Halle.

Bayes T. [1764], "Essai en vue de résoudre un problème de la doctrine des chances", *Philosophical Transactions* ; trad. J. -P. Cléro, *Cahiers d'histoire et de philosophie des sciences*, n° 18, 1988.

Bernoulli D. [1731], « Specimen theoriae novae de mensura sortis », rééd. *in Die Werke von Daniel Bernoulli*, t. II, Basel, Birkäuser Verlag ; trad. angl. « Exposition of a new theory on the measurement of risk » *in Econometrica* XXI, pp. 223 sqq., 1954 : trad. fr. par Charreton R., notes de Bru B., « Esquisse d'une théorie nouvelle théorie de mesure du sort », *Cahiers du séminaire d'histoire des mathématiques*, VI, pp. 61-77.

Bernstein P. L. [1992], *Des idées capitales — les origines improbables du Wall Street moderne*, New York, Free Press ; trad. fr. Paris, 1995, PUF.

Bernstein P. L. [1996], *Against the gods : the remarkable story of risk*, New York, Wiley; trad. Fr. Paris, Flammarion, 1998.

Bicquilley C. -F. [1804], *Théorie élémentaire du commerce*, Toul, Veuve Carez ; réed. Crépel P. éd., Lyon, Aléas, 1995.

Bohlmann G., Poterin du Motel H. [1911], « Technique de l'assurance sur la vie » *in* J. Molk, *Encyclopédie des sciences mathématiques*, tome I volume IV, Paris, rééd. Jacques Gabay.

Borch K. H. [1969], « A note on uncertainty and indifference curves », *Review of Economic Studies* XXXVI, n° 1, 1-4.

Bowley A. L. [1901], *Elements of statistics*, London, P. S. King & Son ; 4th ed. 1920.

Brockhaus Enzyklopädie [1973], Wiesbaden.

Bru B. [1988], " Estimations laplaciennes ", *Journal de la société de statistique de Paris*, t. CXXIX, n° 1-2, pp. 6-45.

Cassirer E. [1911], *Das Erkenntnisproblem in der Philosophie und Wissenschaft der neueren Zeit*, rééd. Berlin, 1994.

Chambers S. P. [1934], « Fluctuations in capital and the demand for money », *Review of Economic Studies* II, n°1 (oct.), pp. 38-50.

Cochran W. G. [1977], *Sampling techniques*, 3rd ed., New York, Wiley.

Cochran W. G. [1978], « Laplace's ratio estimator », pp. 3-10, *in* David H. A. éd., *Contributions to survey sampling and applied statistics*, New York, Academic press ; réed. *in* Cochran W. G., *Contributions to statistics*, New York, Wiley.

Cohen M. [1992], « Security, potential, expected utility : a three-criteria decision model under risk », *Theory and Decision* XXXIII, pp. 101-134.

Condorcet J. A. N. Caritat de [1783], « Manuscrit de Condorcet précisant le programme du prix », *in* [1994], p. 467.

Condorcet J. A. N. Caritat de [1784], « Assurances (maritimes) », *in Arithmétique politique — textes rares ou inédits* (1767-1789), Paris, INED, 1994, pp. 485-494.

Condorcet J. A. N. Caritat de [1785a], « Lettre de Bordeaux pour calculer les assurances contre les intempéries dans le domaine agricole », *in* [1994], pp. 469-471.

Condorcet J. A. N. Caritat de [1785b], « Réponse à la lettre de Bordeaux », *in* [1994], pp. 471-474.

Condorcet J. A. N. Caritat de [1785c], « Discours sur l'astronomie et le caclul des probabilités », *in* [1994], pp. 600-604.

Condorcet J. A. N. Caritat de [1787], *Elémens de calcul des probabilités et son application aux jeux de hasard, à la loterie, et aux jugemens des hommes*, Paris, Royez ; rééd. *in Sur les élections et autres textes*, Paris, Fayard, 1986.

Condorcet J. A. N. Caritat de [1994], *Arithmétique politique — textes rares ou inédits* (1767-1789), B. Bru et P. Crépel, éds., Paris, INED, 1994.

Condorcet J. A. N. Caritat de [s. d.], « Des assurances contre les incendies », note autographe, *in* [1994], p. 477.

Cootner P. H. [1964], *The Random Character of Stock Market Prices*, Cambridge (Mass.), MIT Press.

Covello, V. T., Mumpower J. [1985], « risk analysis and risk management : a historical perspective », *Risk analysis* 5, pp. 193-220.

Cramér H. [1930] « on the mathematical theory of risk », *Försäkringaktiebolaget Skandias Festskrift*, pp. 7-84.

Crépel P. [1988], « Condorcet, la théorie des probabilités et les calculs financiers », *in* R. Rashed [1988], pp. 267-325.

Crépel P. [1998], "Mathematical Economics and Probability Theory : Charles-François Bicquilley's Daring Contribution », *in* G. Faccarello, éd., *Studies in the History of French Political Economy — From Bodin to Walras*, London, Elgar, pp. 78-119.

Dale A. I. [1982], "Bayes or Laplace? An examination of the origin and early applications of Bayes' theorem", *Archive for the history of exact sciences*, XXVII, pp. 23-47.

Darmois G. [1934], « Développements récents de la technique statistique », *Econometrica* I, pp. 238-248.

Darnell A. éd. [1991], *Early Mathematical Economics : Journal Articles and Pamphlets from 1800-1900*, London : Pickering & Chatto

Daston L. J. [1988], *Classical probability in the Enlightenment*, Princeton, Princeton university press.

Daston L. J. [1989], « The domestication of risk : mathematical probability and insurance 1760-1830 », *in* Krüger L., Daston L. J., Heidelberger M. éds., *the probabilistic revolution*, Cambridge (Massachussets), MIT Press.

Debreu G. [1959], *Theory of value. An axiomatic analysis of economic equilibrium*, Cowles foundation monograph n° 17, New Haven, Yale University Press ; trad. fr. *Théorie de la valeur*, Paris, Dunod, 1970.

Dhingra H. L. [1975], « Stability of efficient portfolios under uncertainty », thèse résumée dans le *Journal of finance* 30, n° 3, pp. 912-914.

Drèze J. H. [1971], « Axiomatic theories of choice, cardinal utility and subjective probability : a review », rééd. *in* Drèze J. H., *Essays on economic decisions under uncertainty*, Cambridge, Cambridge University Press, 1987.

Droesbeke J. J., Tassi P. [1990], *Histoire de la Statistique*, Paris, PUF.

Edgeworth F. Y. [1885a], « methods of statistics », *Jubilee volume of the statistical society*, pp. 181-217.

Edgeworth F. Y. [1885b], "On Methods of Ascertaining Variations in the Rate of Births, Deaths and Marriages", *Journal of the Royal Statistical Society*, XLVIII, 628-649. Abstracted in the *Report of the British Association for the Advancement of Science for 1885*, pp. 1165-1166.

Edgeworth F. Y. [1888], « The mathematical theory of banking », *Journal of the royal statistical society*, pp. 113-127 ; rééd. *in* Darnell A. éd. [1991], vol. 4, pp. 238-253.

Elderton P. W. [1908], « A comparison of some curves used for graduating chance-distribution » , *in Atti del IV congresso internazionale dei matematici*, Rome, 1909.

Euler L. [1760], "Sur les rentes viagères", *Mémoires de l'Académie de Berlin*, XVI, 1767, pp. 165-75 ; rééd. in *Opera omnia*, Teubner, Berlin, 1923, vol. I-7, pp. 101-112.

Euler L. [1770] , "Des Herrn Leonhard Euler nöthige Bererchnung zur Einrichtung einer Wittwencasse", *Neues Hamburgisches Magazin*, Leipzig ; rééd. in *Opera omnia*, Teubner, Berlin, 1923, vol. I-7, pp. 153-161.

Euler L., Fuss N. [1776], "Eclaircissement sur les établissemens publics en faveur tant des veuves que des morts, etc." ; rééd. in *Opera omnia*, Teubner, Berlin, 1923, vol. I-7, pp. 181-245.

Finetti B. de [1937], « La prévision, ses lois logiques, ses sources subjectives », *Annales de l'Institut Poincaré*, pp. 1-69.

Fisher I. [1906] *The Nature of capital and income*, éd. 1912, New York, Macmillan ; trad. fr. par Sylvain Bouyssy, Paris, Giard et Brière, 1911.

Fisher I. [1930], *The theory of interest,* New York, Macmillan, rééd. New York, A. M. Kelley, 1965.

Fisher R. A. [1920], « A mathematical examination of the methods of determining the accuracy of an observation by the mean error, and by the mean square error », *Royal Astronomical Society* (Monthly notes) LXXX, pp. 758-769.

Florencourt C. C. de [1781], *Abhandlungen aus den juristischen und politischen Rechtenkunst… nebst eine Vorrede Herrn Hoffrath Kästners*, Altenburg, Richter.

Freund R. J. [1956], « The introduction of risk into a programming model », *Econometrica* XXI, pp. 253-263.

Galton F. [1885], « On the application of graphic methods to fallible measures », *Jubilee volume of the statistical society*, pp. 262-265.

Gillispie C. C. [1997], *Pierre-Simon Laplace — 1749-1823 — A Life in Exact Science*, Princeton, Princeton University Press.

Gnedenko B. V., Kolmogorov A. N. [1954], *Limit distributions for sums of random variables*, revised engl. transl., Reading, Mass., Addison-Wesley, 1968.

Hacking I. [1990], *The Taming of Chance*, Cambridge, Cambridge University Press.

Hakansson N. H. [1987], "Portfolio Analysis", *in New Palgrave Dictionnary of economics.*

Hald A. [1998], *A History of Mathematical Statistics from 1750 to 1930*, New York, John Wiley & Sons.

Hazell P. B. [1971], « A linear alternative to quadratic and semivariance programming for farm planning under uncertainty », *American Journal of Agricultural Economics* LIII, 1, pp. 53-62.

Hecht J. [1979], « La vie et l'œuvre de J. P. Süßmilch », *in « L'Ordre Divin » aux origines de la démographie*, Paris, INED.

Herstein I.N., Milnor J. [1953], « An axiomatic approach to measurable utility », *Econometrica*, XXI, pp. 291-297.

Hicks J. R. [1931], « The theory of uncertainty and profit », *Economica*, XI, mai, pp. 170-189.

Hicks J. R. [1933], « Gleichgewicht und Konjonktur », *Zeitschrift für Nationalökonomie*, L, pp. 440-455.

Hicks J. R. [1934], « Application of mathematical methods to the theory of risk » (abstract), *Econometrica* II, mars, pp. 194-5.

Hicks J. R. [1935], « A suggestion for simplifying the theory of money », *Economica*, new series, II, février, pp. 1-19.

Hicks J. R. [1939], *Value and capital*, 2ème éd. (1946), Oxford, Clarendon Press.

Hirshleifer J. [1965], « Investment decision under uncertainty : choice-theoretic approaches », *Quarterly Journal of Economics* LXXIX, novembre, pp. 509-536.

Hirshleifer J. [1966], « Investment decision under uncertainty : application of the state-preference approach », *Quaterly Journal of Economics* LXXX, pp. 252-277.

Holton G. A. [2002], "History of Value-at-Risk: 1922-1998", see http://www.contingencyanalysis.com.

Hurwicz L. [1946], « theory of the firm and investment », *Econometrica*, vol. XIV, n° 2, pp. 109-136.

Israël G. [1996], *La mathématisation du réel. Essai sur la modélisation mathématique*, Paris, Le Seuil.

Jallais S., Pradier P. –C. [1997], « L'erreur de Daniel Bernoulli *ou* Pascal incompris », *Economie et Sociétés*, série P. E., n° 25, 1/1997, pp. 17-48.

Jallais S., Pradier P. –C. [1999], « Changes in Expected Utility Theory and the Allais Experiment », Paper presented at the 1999 ECHE conference, ENS de Cachan, 19-21 avril.

Joyce J. M., Vogel R. C. [1970], « The uncertainty in risk : is variance ambiguous ? », *Journal of finance* 25, n° 1 (mars), pp. 127-134.

Keiding N. [1987], « The method of expected number of deaths, 1786-1886-1986 », *International statistical review*, LV, pp. 1-20.

Kersseboom W. [1748], *Trois essais d'arithmétique politique*, rééd. de trois textes de 1738 et 1742 ; rééd. Paris, Ined, 1970.

Keynes J. M. [1921], *A treatise on probability*, London, Macmillan ; rééd. *in The collected writings of J. M. Keynes*, vol. VIII, London, Macmillan.

Keynes J. M. [1936], *Théorie générale de l'intérêt, de l'emploi et de la monnaie*, trad. fr. Paris, Payot, 1989.

Knight F. H. [1921], *Risk, uncertainty and profit*, Boston ; rééd. New York, A. M. Kelley, 1964.

Kolm S. –C. [1967], *Les choix financiers et monétaires*, Paris, Dunod.

Königliche Akademie der Wissenschaften, *Allgemeine deutsche Biographie*, München ; rééd. Berlin Duncker & Humblot, 1971.

Koopmans T. C. [1942], « Exchange ratios between cargoes on various routes (non-refrigerated dry cagoes) », *Memorandum for the combined shipping adjustment board*, Wahsington DC ; rééd. *in Scientific papers of T. C. Koopmans*, Berlin, Springer, 1970, pp. 77-86.

Koopmans T. C. [1951], *Activity analysis of production and allocation : proceedings of a conference*, New York, Wiley.

Kramp C. [1799], *Analyse des réfractions astronomiques et terrestres*, Strasbourg, Dannbach.

Kritter J. A. [1768], *Œconomisch-politische Auflösung der wichtigsten Fragen, welche jetzo wegen der Einrichtung dauerhaft Wittwen-Cassen aufgeworfen werden*, Göttingen, Abram Vandenhoek.

Lacroix S. F. [1821], *Traité élémentaire du calcul des probabilités*, Paris, Bachelier.

Lambert J. H. [1765], *Beyträge zum Gebrauch der Mathematik und deren Anwendung durch J. H. Lambert. Mit Kupfer (und Tafeln)*, Berlin, Realschule.

Laplace P. S. [1810], « Mémoire sur les approximations des formules qui sont des fonctions de très grands nombres et sur leur application aux probabilités », *Mémoires de l'Académie des Sciences de Paris* ; rééd. *in* Laplace P. S. [1878-1912], *Œuvres complètes*, Paris, Gauthier-Villars, vol. XII, pp. 301-353.

Laplace P. S. [1812], *Théorie analytique des probabilités*, rééd. *in* Laplace P. S. [1878-1912], *Œuvres complètes*, Paris, Gauthier-Villars, vol. VII ; réimp. Paris, Jacques Gabay, 1993.

Laplace P. S. [1774], " Mémoire sur la probabilité des causes par les événements ", *Mémoires de l'Académie Royale des sciences présentés par divers savans*, VI, pp. 621-656 ; rééd. *in* Laplace P. S. [1878-1912] vol. VIII, pp. 27-65.

Laplace P. S. [1781], « Mémoire sur les probabilités », *Mémoires de l'Académie Royale des sciences* (pour l'année 1778), pp. 227-232 ; rééd. *in* Laplace P. S. [1878-1912], vol. IX, pp. 383-485.

Laplace P. S. [1785], " Mémoire sur les approximations des formules qui sont des fonctions de très grands nombres ", *Mémoires de l'Académie Royale des sciences* (pour l'année 1782) ; rééd. *in* Laplace P. S. [1878-1912], vol. X, pp. 209-291.

Laplace P. S. [1786], " Sur les naissances, les mariages et les morts à Paris depuis 1771 jusqu'en 1784, et dans toute l'étendue de la France pendant les années 1781 et 1782 ", *Mémoires de l'Académie Royale des sciences* (pour l'année 1783), pp. 693-702 ; rééd. *in* Laplace P. S. [1878-1912], vol. IX, pp. 35-46.

Leavens D. H. [1945], "Diversification of Investments", *Trusts and Estates*, LXXX (may), pp. 469-73.

Lopes L. L. [1986], « Between hope and fear : the psychology of risk », *Advances in Experimental Social Psychology* XX, pp. 255-295.

Lopes L. L. [1987], « SP/A theory : the role of security, potential and aspiration in risky choice », WP.

Makower H. [1937], « Book reviews : *Interest and prices* », *Economica*, new series, IV, n°15, pp. 363-365.

Makower H., Marschak J. [1938], « Assets, prices, and monetary theory », *Economica* , new series, V, pp. 261-268.

Markowitz H. M. [1952], « Portfolio selection », *Journal of Finance* VII, pp. 77-91.

Markowitz H. M. [1956], « The optimization of a quadratic function subjet to linear constraints », *Naval research logistics quarterly*, III, pp. 111-133.

Markowitz H. M. [1959], *Portfolio selection : efficient diversification of investment*, New Haven, Yale University Press, 2ème édition 1971.

Markowitz H. M. [1987], "Mean-variance analysis", *in New Palgrave Dictionnary of economics*.

Markowitz H. M. [1991], "Foundations of Portfolio theory", *Journal of finance*, XLVI, 2, pp. 469-477.

Marschak J. [1938], « Money and the theory of assets », *Econometrica* VI, n° 4 (octobre), pp. 311-325.

Marschak J. [1946], « Neumann's and Morgenstern's new approach to static economics », *Journal of Political Economy*, LIV, n° 2, pp. 97-115.

Marschak J. [1950], « Rational behavior, uncertain prospects, and measurable utility », *Econometrica*, XVIII, pp. 111-141.

Marschak J. [1951], « Why 'should' statisticians and businessmen maximize 'moral Expectation'? », *in* Neyman éd. [1951].

Marschak J., *et al.* [1951], *Rational Decision-Making and Economic Behavior* - 19th annual report 1950-51, Chicago, Cowles Commission.

Marschak J., Markowitz H. [1951], *Income, employment, and the price level*, Chicago, Cowles Commission ; rééd. 1965, New York, Augustus M. Kelley.

Marshall A. [1885], « On the graphic methods of statistics », *Jubilee volume of the statistical society*, pp. 266-271.

Marshall *et al.* [1885], « Discussion », *Jubilee volume of the statistical society*, pp. 181-217.

Martin T. (sous la direction de) [2003], *L'arithmétique politique française*, Actes du colloque de Besançon, octobre 1998, à paraître, Paris, INED.

Massé P. [1944], « Applications des probabilités en chaîne à l'hydrologie statistique et au jeu des réservoirs », *Journal de la Société de Statistique de Paris*, pp. 204-219.

Massé P. [1946], *Les réserves et la régulation de l'avenir*, Paris, Hermann.

Massé P. [1953], « Réflexion sur les comportements rationnels en économie aléatoire », *Cahiers du séminaire d'économétrie*, 2, pp. 11-59.

Massé P. [1953], « Réflexion sur les comportements rationnels en économie aléatoire », *Cahiers du séminaire d'économétrie*, 2, pp. 11-59.

Menger K. [1934], « Das Unsicherheitsmoment in der Wertlehre », *Zeitschrift für Nationalökonomie* LI, 459-485 ; trad. angl. *in* Shubik [1967].

Mirowski P., Hands D. W. [1997], « A paradox of budgets : the postwar stabilization of american neoclassical price theory », *in* Morgan M. S., Rutherford M., eds., *From Interwar Pluralism to Postwar Neoclassicism*, Annual Supplement to *History of Political Economy*, XXX, pp. 260-292.

Mirowski P., Hands D. W. [1998], « Harold Hotelling and the neoclassical dream », *in* Backhouse R., Hausman D., Mäki U., Salanti A., eds., *Economics and Methodology : Crossing Boundaries*, London, Macmillan.

Mirowski P., Weintraub E. R. [1994], « The pure and the applied : bourbakism comes to mathematical economics », *Science in context*, vol. VII, n°2, pp. 245-272.

Moivre A. de [1725], *Annuities on lives*, London, W. Pearson ; rééd. New York, Chelsea, 1967.

Moivre A. de [1730], *Miscellanea analytica de seriebus et quadraturis*, London, Tonson and Watts.

Moivre A. de [1756], *The Doctrine of Chances*, 3ème éd., London, W. Pearson ; rééd. New York, Chelsea, 1967.

Neyman J. éd. [1951], *Proceedings of the Second Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability*, University of California Press, Berkeley.

Neyman J., Pearson E. S. [1928], « On the use and interpretation of certain test criteria for purposes of statistical inference », *Biometrika*, pp. 174-240 (part I), 263-294 (part II).

Neyman J., Pearson E. S. [1933a], « On the problem of the most efficient tests of statistical hypotheses », *Philosophical transactions Series A*, XXIV, pp. 289-337.

Neyman J., Pearson E. S. [1933b], « The testing of statistical hypotheses in relation to probabilities *a priori* », *Proceedings of the Cambridge Philosophical society*, XXIX, pp. 492-510.

Niehans J. [1990], *A history of economic theory — classic contributions 1720-1980*, Baltimore, John Hopkins University Press.

Norton J. P. [1903], *Statistical studies in the New York money market*, New York, Publications of the American Economic Association.

Pearson K. [1892], *The Grammar of Science*, London, Walter Scott ; réed., s.l., Meridian Books.

Pearson K. [1894], « On the dissection of asymmetrical frequency curves », *Philosophical Transactions*, série A, vol. CLXXXV.

Pearson K. [1895], « Skew variations in homogeneous materials », *Philosophical Transactions*, série A, vol. 186.

Pigou A. C. [1920], *The economics of Welfare*, London, Macmillan.

Poggendorf J. C. [1863], *Biographisch-Litterarisches Handwörterbuch zur Geschichte der Exacten Wissenschaften*, Leipzig, Barth.

Pradier P. -C. [1998], *Concepts et mesures du risque en théorie économique — essai historique et critique*, Thèse ENS-Cachan.

Pradier P. -C. [2000], « Le hasard fait bien les choses, histoire du docteur Markowitz », à paraître dans *Economie & Sociétés, cahiers de l'ISMEA*, série PE, n°1.

Pradier P. -C. [2003], « L'actuariat au siècle des Lumières, risque et décisions économiques et statistiques », *Revue économique*, LIV, 1, pp. 139-156.

Pradier P. -C. [2005], *Economie du risque*, Paris, La Découverte, à paraître.

Price R. [1771], *Observations on reversionary payments ; on schemes for providing annuities for widows and for persons in old age ; on the method of calculating the assurances on lives ; and on the national debt. Also, essays on different subjects in the doctrine of life annuities and political arithmetic ; a collection of new tables and a postscript on the population of the Kingdom*, 7è éd. (W. Morgan), London, T. Cadell and W. Davies, 1812.

Puech A. [1990], *Kant et la causalité*, Paris, Vrin.

Rieucau J. -N. [1998], « *Les entreprises ou les hommes s'exposent à une perte, dans la vue d'un profit* — Condorcet et l'héritage de D'Alembert », *Revue économique*, XLIX, n°5, pp. 1365-1405.

Rohrbasser Jean-Marc [1997], « Un pasteur actuaire ? Ordre de la mortalité, durée de la vie et rentes viagères dans L'Ordre divin de J. P. Süßmilch », *Revue de synthèse*, pp. 385-417.

Rosenstein-Rodan P. N. [1936], « The coordination of the general theories of money and price », *Economica,* New series, III, pp. 257-280.

Roy A. D. [1952], "Safety first and the holding of assets", *Econometrica*, XX, pp. 431-449.

Roy A. D. [1961], "Review of *Portfolio Selection*", *American Economic Review*, LI, pp. 99-100.

Samuelson P. A. [1950], « Probability and the attempt to measure utility », *The economic review* (*Keizai Kenkyu*), pp. 167-173 ; rééd. *in* Stiglitz [1966], pp. 117-123.

Samuelson P. A. [1965], « 1965 postscript » *to* Samuelson [1950], *in* Stiglitz [1996], pp. 124-126.

Samuelson P. A. *et al.* [1952], « Utilité, préférence et probabilité » et débat, *in* Colloque de Paris 12-17 mai 1952, Paris, CNRS, pp. 141-164.

Savage L. J. [1952], « Une axiomatisation de comportement raisonnable face à l'incertitude » , *in* Colloque de Paris 12-17 mai 1952, Paris, CNRS, pp. 29-33.

Seyberth P. H. [1767], *Dissertatio inauguralis juridica de Reditu anno praesertim vitali tontina ac fiscis viduarum, quam… submittit Philippus Heinricus Seyberth Nassoicus. D. XVIII Decembris MDCCLXVII*, Göttingen, Barmeier.

Shackle G. L. S. [1949a], « A non-additive measure of uncertainty », *Review of Economic Studies* 27, n° 42 pp. 70-74.

Shackle G. L. S. [1949b], *Expectations in economics*, Cambridge, Cambridge University Press.

Shubik M. éd. [1967], *Essays in Mathematical Economics in Honor of Oskar Morgenstern*, Princeton University Press, Princeton, pp. 211-231.

Simon H. A. [1956], « Dynamic programming under uncertainty with a quadratic criterion function », *Econometrica*, XXXIII, pp. 493-513.

Stigler S. [1986], *The history of statistics*, Cambridge (Massachussets), Belknap press.

Stigler S. [1986], *The history of statistics*, Cambridge (Massachussets), Belknap press.

Süßmilch J. P. [1761], *L'ordre divin*, deuxième édition, trad. fr. de J. Hecht, Paris, INED 1979.

Süßmilch J. P., Baumann C. J., [1775], *Die gottliche Ordnung*, troisième édition.

Tenenti A. et B. [1985], *Il prezzo del rischio — l'assicurazione mediterranea vista da Ragusa (1563-1591)*, Roma, Jouvence.

Tetens J. N. [1786], *Einleitung zur Berechnung der Leibrenten und Anwartschaften — Zweyter Teil — Versuche über einige bey Versorgungs-Anstalten erhebliche Puncte*, Leipzig, Weidmanns Erben und Reich, 1786.

Tintner G. [1941a], « The theory of choice under subjective risk and uncertainty », *Econometrica* IX, n°4, pp. 298-304.

Tintner G. [1941b], « The pure theory of production under technological risk and uncertainty », *Econometrica* IX, n°4, pp. 305-312.

Tintner G. [1942], « A contribution to the non-static theory of choice », *Quarterly Journal of Economics*, vol. LVI, pp. 274-306.

Tobin J. [1958], "Liquidity preference as behavior toward risk", *Review of Economic Studies* XXV, pp. 65-86.

Tobin J. [1965], "The theory of portfolio selection", *in* F. H. Hahn & F. P. R. Brechling, éds., *The theory of interest rates*, London, Macmillan.

Todhunter I. [1865], *History of the mathematical theory of probability from the time of Pascal to that of Laplace*, rééd. New York, Chelsea, 1949.

Toja G. [1908], « Alcune considerazioni sui rapporti tra la matematica e la scienza attuariale », *in Atti del IV congresso internazionale dei matematici*, Rome, 1909.

Tsiang S.C. [1972], « The rationale of the mean-standard deviation analysis, skewness, preference and the demand for money », *American Economic Review*, LXII, pp. 354-371.

Varian H. [1993], « A portfolio of Nobel laureates : Markowitz, Miller and Sharpe », *Journal of economic perspectives*, vol. VII, n° 1, pp. 159-169.

Von Neumann J. [1937], « Über ein ökonomisches Gleichungssystem und ein Verallgemeinerung des Brouwer'schen Fixpunktsatzes », *Ergebnisse eines Mathematiker Kolloquiums*, VIII, pp. 73-83

Von Neumann J., Morgenstern O. [1944], *The theory of games and economic behavior*, [1947] 2è éd., New York, Wiley, rééd. 1980, Princeton, Princeton University Press.

Wald A. [1936], « On some systems of equations of mathematical economics », articles traduits et republiés dans *Econometrica*, XIX, pp. 368-403, 1951.

Walford C. [1878], *The Insurance Cyclopædia, etc.*, vol. V, London, Layton.

Wicksell K. [1898], *Geldzins und Güterpreise*, trad. angl. par R. F. Kahn *Interest and Prices*, 1936, London, Macmillan.

Williams J. B. [1938], *The theory of investment value*, Cambridge (Mass.), Harvard University Press.