Gödel l'avait (presque) prévu : L'hypothèse « indécidable » du Continu serait « vraie »

par
F. Collot

L'hypothèse du Continu demeure un problème ouvert depuis qu'elle fut émise par Cantor au siècle dernier. Avec l'apparition des paradoxes de la toute nouvelle théorie des ensembles, sa non résolution joua sans doute un rôle éminent dans les accès de folie qui assombrirent ses dernières années.

Auparavant Cantor avait défini le concept de « bon ordre » : un ensemble est bien ordonné s'il est totalement ordonné et si toute partie (i-e tout sous-ensemble) non vide possède un plus petit (i-e un premier) élément. Exemple l'ensemble **N** des nombres entiers naturels ordonnés par grandeur (0,1,2,...). Ces entiers qui sont bien ordonnés forment la première suite de ce que Cantor a nommé « ordinaux » : 0,1,2,...ω. Cette suite se continue par : ω+1, ω+2, ω+3,...2ω,...3ω,...4ω,...ω^2,...ω^3,... ω^n, ...ω^ω, ...ε_0,...

Il avait aussi montré que plusieurs ensembles tels que l'ensemble **Q** des nombres fractionnaires (dits rationnels) pouvaient être mis en correspondance biunivoque (on dit aussi en bijection) avec les entiers naturels, et donc qu'il était légitime de considérer que **Q** et **N** avaient le même nombre d'éléments (on dit même cardinal). Ce cardinal (ou la puissance de ces ensembles) est dit « infini dénombrable » (ou simplement dénombrable).

Par contre l'ensemble **R** des nombres réels (entiers + rationnels + irrationnels) ou celui des parties de **N** (qu'on écrit P(**N**)) qui a la même puissance ne peuvent plus être mis en bijection avec les précédents (exemple : si E est l'ensemble {a,b,c}, P(E) = {a,b,c, ab, ac, bc, abc, Ø}) : on dit qu'ils ne sont plus dénombrables, et plus précisément qu'ils ont la puissance du continu. Or tous les ensembles dénombrables peuvent être bien ordonnés. Mais là s'arrête le génie des mathématiciens. On ne sait pas bien ordonner **R** ou P(**N**).

L'Hypothèse du Continu consiste à affirmer (de même que l'axiome de Zermelo, bien que les deux soient indépendants) que ces ensembles peuvent être bien ordonnés, et qu'ils deviendraient (ce que n'indique plus l'axiome) semblables à la suite de tous les ordinaux dénombrables. L'ennui est que l'on ne sait pas préciser quel peut être ce « bon ordre », et que dès lors on est dans l'impossibilité de vérifier la seconde partie de l'hypothèse.

Hilbert, en 1900, la place en tête de son fameux programme de problèmes à résoudre.

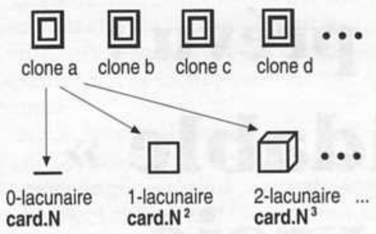
En 1966, Paul Cohen montre que l'Hypothèse est, selon les termes de Gödel, « indécidable » c'est-à-dire non prouvable à partir des axiomes de la Théorie des Ensembles (plus précisément de la théorie formelle qui en dérive). L'Hypothèse semble rentrer dans le cadre du théorème d'incomplétude de Gödel qui montre que toute théorie non contradictoire est incomplète en ce sens qu'il existe obligatoirement dans cette théorie des propositions qui ne peuvent être déduites de ses axiomes (propositions indécidables qui peuvent cependant être vraies ou fausses).

L'auteur propose tout d'abord une relation d'ordre sur P(**N**) qui permet de bien ordonner les parties finies de **N** (qui sont dénombrables) et un sous-ensemble dénombrable de parties infinies, ce qui n'est pas un exploit puisqu'on sait bien ordonner les ensembles dénombrables. Mais ensuite, il montrera comment, en suivant le même procédé, bien ordonner la totalité des parties de **N**.

• Une relation de bon ordre sur P(N)

Représentons les entiers naturels par les lettres d'un alphabet infini : a,b,c,...n..., où n désigne par contre un entier quelconque.

Première partition. Nous allons, une première fois, diviser l'ensemble des parties de **N** en sous-ensembles distincts (i-e dont l'intersection est nulle, opération qu'on nomme « partition »). Ces sous-ensembles rassembleront toutes les parties de **N** qui ont le même premier entier, et nous les nommerons « *clones* ». Nous aurons ainsi le clone a, le clone b, etc...



Partition en clones puis en sous-ensembles iso-lacunaires

Deuxième partition. Elle consiste, pour un même clone, à rassembler dans un même sous-ensemble les parties possédant un même nombre d'entiers manquants (entre le premier et le dernier entier présent de la partie quand ce dernier existe) appelés « *lacunes* « et représentés par le symbole O (exemple : la partie {1,2,4} s'écrira {ab O d}) et se lira (a, b, lacune, d), la lecture classique étant (a, b, d). Etrange idée, en apparence, que celle de caractériser les parties d'un ensemble précisément par ce qui leur manque plutôt que par ce qu'elles contiennent ! Idée efficace néanmoins et semble-t-il prometteuse. Nous obtiendrons en effet une suite de sous-ensembles *« iso-lacunaires »* présentant 0,1,2,...n...lacunes appelés sous-ensembles 0-lacunaires, 1-lacunaires, etc...

Chaque sous-ensemble iso-lacunaire est constitué de suites de parties ayant leurs lacunes à des rangs identiques, ordonnées par la relation d'ordre lexicographique « L ». Cet ordre est celui des mots d'un lexique où chaque symbole ne pourrait occurrer qu'une fois à l'intérieur d'un même mot. Cette restriction, qui n'existe pas pour les mots d'un dictionnaire, est due au fait que, par définition d'un ensemble de parties, les éléments (ici les nombres entiers) ne doivent apparaître qu'une seule fois dans chaque partie. Ainsi la partie (1, 3, 3) n'a pas droit à l'existence. C'est pour en faciliter la compréhension de leur succession par cet ordre L, inspiré de celui du lexique, que nous avons introduit une représentation alphabétique des entiers naturels.

Sous-ensemble 0-lacunaire. Ainsi la 1ère suite du clone « a » est :
a, ab, abc, abcd, abcde, ...
Son cardinal sera card.**N** .

Sous-ensemble 1-lacunaire. Cependant si nous continuions à utiliser l'ordre L, il nous serait impossible de trouver une première partie qui n'ait qu'une seule lacune. Aussi grande que soit la partie possédant une lacune, celle-ci étant rejetée à l'extrémité droite de la partie, il sera toujours possible d'en trouver une plus grande, qui dans l'ordre L devrait précéder la première. Ainsi la partie :

abcdefghijk O m, qui dans le lexique ne peut apparaître qu'après la première suite 0-lacunaire, devra être précédée par la partie : abcdefghijkl O n, parce que, dans le dictionnaire le mot abcdefghij**km** est précédé par le mot abcdefghijk**ln**. Par contre les parties succédant à celles-ci (et n'ayant qu'un seul entier après la lacune) verront cette lacune se rapprocher de leur premier entier (ici : a) :

abcdefghij O l, abcdefghi O k, abcdefgh O j, abcdefg O i, abcdef O h, abcde O g, ... a O c. (1)

Mais parvenue à ce deuxième rang, la lacune ne peut plus reculer. Après a O c, nous trouverons bien d'autres « mots » : a O cd, a O cde, a O cdef, etc...Mais cette suite marque le terme de toutes les suites de parties avec une seule lacune (1-lacunaire). Il s'agit d'une **dernière suite**. Ainsi l'ordre L nous procure un sous-ensemble de suites infinies. Le premier terme de chacune de ces suites ne possède qu'un seul entier présent après la lacune (cf suite (1)). Et c'est l'ordre d'apparition de ces premiers termes qui détermine celui des suites. Il existe bien une dernière suite, mais pas de première, et donc pas de bon ordre!

...
{abcde O g}, {abcde O gh}, {abcde O ghi}, ...
{abcd O f}, {abcd O fg}, {abcd O fgh}, ...
{abc O e}, {abc O ef}, {abc O efg},...
{ab O d}, {ab O de}, {ab O def},...
{a O c}, {a O cd}, {a O cde},...

La solution saute à l'esprit. Pour procurer un plus petit élément à ce sous-ensemble 1-lacunaire, et lui assurer un bon ordre, il suffira de prendre l'ordre lexicographique inverse L^{-1}. On obtiendra alors successivement tous les premiers termes de chacune des suites constitutives de ce nouveau sous-ensemble. Mais chacun de ces premiers termes sera suivi de parties ordonnées de nouveau selon l'ordre L. Nous aurons ainsi :

Ordre L^{-1}
{a O c}, {a O cd}, {a O cde},... (ordre L)
{ab O d}, {ab O de}, {ab O def},... (ordre L)
{abc O e}, {abc O ef}, {abc O efg}, ... (ordre L)
...

Le cardinal de ce sous-ensemble 1-lacunaire sera égal à card.**N** x card.**N** = card.$\mathbf{N}^2$.

Mais Cantor a montré qu'un tel ensemble pouvait, par le procédé de la diagonale, être mis en bijection avec la suite des entiers naturels. On a donc card.$\mathbf{N}^2$ = card.**N** et plus généralement card.$\mathbf{N}^n$ = card.**N** , quelque soit l'entier naturel n.

1 2 4 7
3 5 8 procédé de la diagonale
6 9
10...

Le premier cardinal ayant la puissance du continu (celle de **R** ou de P(**N**)) est card.$\mathbf{N}^{\text{card N}}$ (ou card.$\mathbf{N}^{\text{card.}\omega}$).

Sous-ensemble 2-lacunaire

En appliquant le même procédé, en représentant chaque entier présent par le symbole *, et en nous bornant à écrire le premier terme de chaque suite, nous obtenons un 1er sous-sous-ensemble :

* O O * (au lieu de a O O d)
* O * O * (au lieu de a O c O e)
* O * * O *
* O * * * O *

Puis l'ordre L^{-1} fera apparaître un second sous-sous-ensemble :

* * O O *
* * O * O *
* * O * * O *
* * O * * * O *

Puis un troisième dont le premier élément sera : * * * O O *,... Le sous-ensemble 2-lacunaire en totalité aura donc le cardinal $\mathbf{N}^3$ = card.**N**. Plus généralement on démontre que le cardinal d'un sous-ensemble n-lacunaire a le cardinal N^{n+1} = card.N.

Ainsi apparaissent pour chaque sous-ensemble n-lacunaire (avec n = 0, 1, 2,...) un premier terme caractérisé par le fait que l'ensemble des n lacunes est rassemblé et borné par deux entiers naturels, le premier étant celui caractéristique du clone. Ces termes doivent être considérés comme d'authentiques éléments générateurs du sous-ensemble correspondant : une fois donnés cet élément et les deux règles L et L^{-1}, l'engendrement de toutes les suites qui le constituent se déroule dans le bon ordre, aboutissant au cardinal $\mathbf{N}^{n+1}$ caractéristique de ce sous-ensemble.

• Difficultés liées au procédé

Mais tant que l'exposant reste un nombre entier naturel, tant que le nombrè n de lacunes reste fini nous n'aurons bien ordonné qu'un sous-ensemble dénombrable de P(**N**). Nous devons en conclure qu'il existe nécessairement dans P(**N**) un sous ensemble d'éléments qui sont les parties de **N** présentant une infinité de lacunes (parties ω-lacunaires). Une telle affirmation ne peut d'ailleurs pas surprendre quand on songe à l'ensemble des nombres pairs, impairs, premiers,...

Alors les choses se compliquent, car il n'est pas possible, si nous voulons maintenir notre procédé, de trouver un premier élément générateur à ce sous-ensemble ω-lacunaire qui soit compatible avec la définition des entiers munis de leur ordre naturel. En effet, notre définition des lacunes nous impose un entier qui puisse borner supérieurement l'ensemble de celles-ci, mais un sous-ensemble de lacunes infini ne peut pas être borné supérieurement par un entier naturel (dont le rang quelque grand soit-il reste obligatoirement fini) : ainsi la partie {a O O O ... z} (avec z entier naturel et où les points de suspension indiquent une infinité de lacunes), ne peut exister.

La solution serait de l'écrire sous la forme : a O O O ... ω, mais ω n'appartient pas à **N**. De plus, du fait du recul pas à pas nécessité par l'ordre L^{-1} du deuxième entier présent (cf. plus loin), et que ω n'a pas de prédécesseur immédiat (ω-1 n'existe pas), le procédé devrait être modifié en se bornant à compléter par ω chacune des parties n-lacunaires (avec n entier naturel). Mais alors entre ce nouvel ensemble de parties complétées (et donc ayant bien une infinité de lacunes), et celui des parties non complétées, il existe une bijection évidente qui signe sa dénombrabilité.

• Une solution : modifier l'ordre de N

Ce qui manque, en effet, à l'ensemble **N** c'est la présence d'entiers survenant « ultérieurement » aux entiers de rang fini, et d'autre part la possibilité pour ceux-ci d'avoir des prédécesseurs immédiats. Pour cela il suffit de modifier l'ordre de **N**. Ainsi on peut commencer par écrire les nombres pairs suivis des nombres premiers (sauf 2) en ordre de grandeur décroissant, suivis enfin des entiers impairs qui ne sont pas premiers par ordre de grandeur croissant, ensemble désigné par **N'** pour éviter toute confusion :

N' = { 2, 4, 6, ... 17, 13, 11, 7, 5, 3, 0, 1, 9, 15, 21, 25,...}

Les entiers pairs seront dits « de rang fini », ceux qui les suivent seront dits « de pseudo-rang infini » (le rang, défini par Denjoy, fait en effet référence à des ensembles bien ordonnés, ce qui n'est évidemment plus le cas pour **N'**). Pour simplifier l'écriture nous noterons par N un quelconque entier de pseudo-rang infini, et pour fixer les idées l'entier 0 (situé ici entre 3 et 1), et nous identifierons les nombres pairs avec les entiers naturels :

N' = {1, 2, 3, ... N-3, N-2, N-1, N, N+1, N+2, N+3,...}

Désormais le but est de bien ordonner P(N'), ensemble des parties de l'ensemble des « rangs » (vrais ou pseudo) en traitant ceux-ci comme des nombres.

• Suites et clones élargis

Ceci entraîne la nécessité de prolonger les suites étudiées jusqu'à maintenant, en tenant compte de cette sorte de triplement d'infinité, mais en assurant un bon ordre à tous leurs éléments, ce qui implique de bien ordonner notamment l'ensemble des nombres premiers de la façon suivante :

{2,4,6, ... 3, 5, 7, 11, 13, 17,... 0, 1, 9, 15, 21, 25,...} ou ce qui revient au même :
{1, 2, 3, ... N, N-1, N-2, N-3, ... N+1, N+2, N+3,...}

Ceci entraîne aussi la nécessité de considérer des clones de rang infini : clone N, clone N-1, N+1, etc, également bien ordonnés.

• Le sous-ensemble ω-lacunaire dans **N'**

Dès lors que N remplace le ω de Cantor, et que N possède un prédécesseur immédiat (N-1), le recul pas à pas du deuxième entier présent depuis le plus petit élément (qui est générateur de chaque sous-ensemble iso-lacunaire) devient possible ici. Ce recul n'est que la simple conséquence de l'ordre L^{-1} destiné lui-même à permettre d'obtenir, dans le bon ordre recherché, le premier élément de chaque suite. Le lecteur vérifiera lui-même que la suite ac, ad, ae, af, ...am,... ordonnée suivant l'ordre du lexique (ordre L) voit la deuxième lettre de chaque « mot » avancer pas à pas de gauche à droite (dans le sens de la lecture), tandis qu'elle recule dans l'ordre inverse : ... am, ... af, ae,

TRIBUNE

N'hésitez pas à proposer vos articles. Pour des raisons de pagination — limitée par des questions financières — et de périodicité de parution, nous ne pourrons leur assurer qu'une place restreinte. Envoyez-nous donc des articles n'excédant pas deux à quatre pages de **Fusion**.

Adressez vos articles à **Fusion**, Emmanuel Grenier, 53 rue d'Hauteville, 75010 Paris.