Fermat et Bernoulli à la recherche du calcul infinitésimal

BRUCE DIRECTOR

Pour Aristote, Galilée, Newton et Descartes, l'action dans l'univers se fait le long de lignes droites ou de cercles parfaits. De telles actions uniformes ne requièrent point de cognition, puisque des corps se mouvant selon des lignes droites ou des cercles ne changent pas, si ce n'est par des forces « externes ». Pour Aristote, cette force externe – la cognition – ne réside pas seulement en dehors de l'univers physique, mais également à l'extérieur de l'esprit humain. Leibniz, Fermat et Bernoulli comprenaient, au contraire, que les principes comme le moindre temps ainsi que les orbites de Kepler reflétaient l'existence d'une caractéristique universelle, présente à chaque « moment de devenir ».

Pierre de Fermat (1601-1665)

Jean Bernoulli (1667-1748)

Dans un récent article du n°97 de *Fusion* intitulé « Kepler et la découverte de la fonction régissant le système solaire », nous avons expliqué que Johannes Kepler avait rencontré un problème ne pouvant être résolu avec les mathématiques de son époque. Le « problème de Kepler » fut laissé comme défi aux futures générations de mathématiciens.

En réponse à ce défi, Pierre de Fermat décida de surmonter les difficultés qui surgissent dès que l'on tente de mesurer l'action le long d'un trajet de courbure variable, comme par exemple une planète voyageant sur une orbite elliptique, ou le trajet de moindre temps emprunté par la lumière quand elle traverse des milieux de densité différente. Fermat prit comme point de départ les travaux des anciens Grecs pour résoudre ce type de problèmes. Apollonios, Archytas, Aristée, Eratosthène, parmi d'autres penseurs de la tradition platonicienne, ont appelé ce type de recherches « théorèmes de position ». Le terme grec utilisé était « *topos* », signifiant « lieu ».

Selon le concept grec de lieu, les courbes géométriques ne sont pas définies comme entités évidentes en soi, mais comme le concept caractérisant ces positions résultant d'un certain type d'action. Proclus reformule cette conception grecque antique comme étant *« ces [résultats] pour lesquels la même propriété s'applique pour un lieu entier, et le “lieu” [topos] comme étant le placement [thesis] d'une ligne ou d'une surface définissant la même et unique propriété »*.

En voici quelques exemples :

• Le lieu de toutes les positions équidistantes d'une position donnée est un cercle.

• Le lieu de toutes les positions dont la distance depuis deux positions données donne une somme constante est une ellipse.

• Le lieu de toutes les positions formant un angle droit entre deux points fixes est un cercle.

• Le lieu de toutes les positions obtenues par l'intersection d'un plan et d'un cône sont des cercles, des ellipses, des paraboles, des hyperboles, dépendant de l'angle avec lequel le plan coupe le cône.

Distinguons maintenant un autre exemple, celui-ci n'étant pas un lieu purement géométrique mais situé dans l'espace-temps physique : le lieu de toutes les positions d'une planète se déplaçant autour du Soleil de manière non uniforme, et de telle façon qu'elle balaie des aires égales en des périodes égales, est une orbite elliptique.

Il est important de noter que les Grecs ont séparé les lieux en différents types selon leur méthode de génération, tels que des lieux plans, solides ou des lieux se rapportant à des moyennes. La limite des recherches menées par les Grecs était, selon Fermat, que de tels concepts furent étudiés un à un, alors qu'il fallait, selon lui, développer une approche d'ensemble.

C'est ainsi que Fermat commença ses travaux : *« Personne ne peut douter que les Anciens aient écrit sur les lieux. Nous savons cela par Pappus qui, au début de son septième livre, affirme qu'Apollonios avait écrit à propos des lieux plans et Aristée à propos des lieux solides. Mais ne nous y trompons point, car le traitement des lieux n'était pas une question facile pour eux. Nous pouvons conclure ceci par le fait que, malgré le grand nombre de lieux, ils avaient à peine formulé qu'une seule généralisation, comme nous le verrons plus loin. Nous soumettons par conséquent cette théorie à une analyse particulière et apte à ouvrir le champ général de l'étude des lieux. »*

Pour l'essentiel, Fermat a proposé une généralisation qui consistait à considérer tous les lieux de la façon suivante : prenons deux segments de ligne droite s'entrecroisant à angle droit. Pendant que nous tenons l'un des deux segments dans une position fixe, nous permettons à l'autre de se mouvoir le long du premier, autant verticalement qu'horizontalement. Le lieu des positions se trouvant au bout de la ligne mobile tracera ainsi une courbe. Cette courbe sera une fonction du mouvement de la ligne mobile.

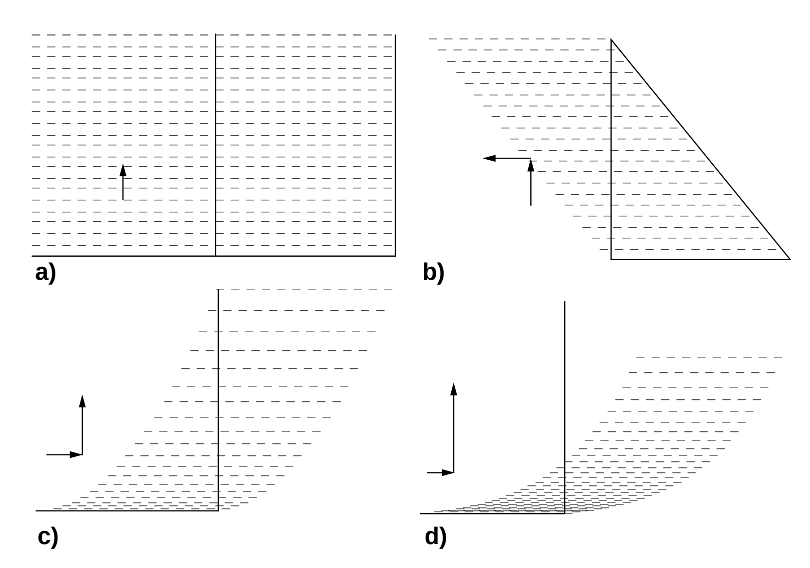


Figure 1. **Fermat a proposé une généralisation du concept de lieu élaboré par les Grecs. Pour cela, il a choisi deux segments de ligne droite s'entrecroisant à angle droit, l'un fixe et l'autre pouvant se déplacer autant verticalement qu'horizontalement. Le lieu des positions se trouvant au bout de la ligne mobile tracera ainsi une courbe. Cette courbe sera une fonction du mouvement de la ligne mobile.**

Afin de mieux visualiser cela, prenons deux bâtons et tenons-les de façon à ce qu'ils forment un angle droit. Expérimentons en gardant le bâton vertical en place et faisons glisser le bâton horizontal sur lui. Le bout du bâton horizontal tracera une ligne parallèle au bâton vertical (figure 1a). Recommençons mais cette fois en déplaçant le bâton horizontal verticalement pendant que nous le déplaçons horizontalement. Si le taux de déplacement horizontal est le même que le taux de déplacement vertical, le bout du bâton tracera une ligne diagonale (figure 1b). Essayons maintenant la même chose, mais cette fois de façon à ce que le taux horizontal soit égal au carré du taux vertical. Le bout du bâton engendrera une parabole (figure 1c). Si le taux de déplacement vertical est arithmétique et le taux de déplacement horizontal géométrique, la courbe engendrée sera une exponentielle (figure 1d).

Fermat a exprimé cette relation entre déplacement vertical et déplacement horizontal à l'aide d'une équation. Plutôt que de s'occuper de chaque lieu individuellement, il pouvait maintenant considérer différents types de lieux, lesquels pouvaient être décrits par différents types d'équations. Bernoulli introduira plus tard un autre type d'équations, plus simple, dans lequel le point d'intersection demeurait fixe, alors que le bâton mobile tournait autour de ce point tout en se déplaçant le long du premier bâton. Il pouvait décrire ces lieux par une relation entre un angle et une distance. Par la suite, Gauss généralisera encore davantage ce concept, en remplaçant les lignes droites par n'importe quelles courbes pour, enfin, avec Riemann, déterminer ainsi des lieux multidimensionnels.

Tout cela enragea les cartésiens. En effet, ce genre de pensées leur donnait toujours des migraines. Pour eux, ces modes de déplacement relatifs sèment la confusion et, en conséquence, ils décidèrent de rendre cela plus simple. Descartes et ses héritiers allaient remplacer ce concept de lieu par une grille, devenue hélas trop familière, de lignes droites s'entrecroisant à l'infini. Les équations de Descartes décrivaient ainsi non pas des lieux de mouvement, mais des positions fixes dans une grille où les figures géométriques croisaient des lignes droites.

Rien ne peut mieux exprimer les visages renfrognés et figés de si nombreux élèves que cette abominable cage connue aujourd'hui sous le nom de « système de coordonnées cartésiennes ». Il est plus que temps de procéder, une fois pour toute, à une démystification.

Les équations de Descartes n'étaient rien de plus qu'un ensemble d'instructions permettant de connecter les points dans la grille fixe d'un espace absolu. Pour Fermat, comme pour Kepler, il n'y avait pas de grille figée dans un espace absolu. Les courbes étaient engendrées par différents types de mouvement, chacun de ces types devant être par la suite étudié plus en profondeur.

La théorie des lieux de Fermat n'était toutefois pas suffisante pour résoudre le paradoxe de Kepler, mais elle allait constituer une étape nécessaire pour que Leibniz réussisse, par la suite, à réaliser une percée dans la science du « moment de devenir ».

Vers un calcul hylozoïque

Il est toujours choquant de découvrir, pour celui qui a « bénéficié » d'une formation mathématique, que le calcul infinitésimal de Leibniz n'est pas, fondamentalement, une méthode mathématique. Il est tout aussi choquant pour le profane, et intimidé par les mathématiques, de réaliser qu'il est impossible de comprendre les implications plus profondes de la découverte de Leibniz sans se plonger dans sa forme mathématique. Ces deux réactions subjectives, apparemment opposées, proviennent d'une mauvaise compréhension commune de la nature de l'homme. Elles sont deux expressions pathologiques d'une même maladie : la séparation aristotélicienne et gnostique de l'esprit et de la matière.

Leibniz ne souffrait pas de cette maladie. Dans une lettre de 1678 à la comtesse Elisabeth, il rappelle comment il fut amené à l'étude des mathématiques dans sa volonté d'élargir ses connaissances sans pour autant que cela devienne une fin en soi : *« Mais pour moi, je ne chérissais les mathématiques que parce que j'y trouvais les traces de l'*art d'inventer *en général, et il semble que je découvris à la fin que M. Descartes lui-même n'avait pas encore pénétré le mystère de cette grande science. [...]*

« [...] je viens à la métaphysique, et je puis dire que c'est pour l'amour d'Elle que j'ai passé par tous ces degrés : car j'ai reconnu que la métaphysique n'est guère différente de la vraie logique, c'est-à-dire de l'art d'inventer en général. Car en effet la métaphysique est la théologie naturelle, et le même Dieu qui est la source de tous les biens est également le principe de toutes les connaissances. C'est parce que l'idée de Dieu renferme en elle l'Etre absolu, c'est-à-dire ce qui y a de simple en nos pensées dont tout ce que nous pensons prend son origine. »

Dans une lettre de 1716 à Samuel Mason, Leibniz ajoute : *« Les Anciens considéraient les mathématiques comme le passage de la physique vers la métaphysique ou la théologie naturelle, et ils avaient raison. »*

Le calcul infinitésimal de Leibniz constitue un cas exemplaire de ce genre de passage. Sa découverte fut suscitée par les paradoxes que Kepler rencontra quand il découvrit que l'orbite de Mars était elliptique. Kepler avait démontré que l'action dans l'univers physique était caractérisée par le mouvement non uniforme. Toutefois, l'univers soumit à Kepler un nouveau défi : il était en effet possible de mesurer, à partir des principes universels régissant l'orbite de la planète, son mouvement non uniforme, mais l'inverse – la mesure des principes universels à partir du mouvement de la planète – exigeait une nouvelle découverte.

Kepler a ainsi posé une question à l'univers et il découvrit sa réponse. L'univers posa à son tour une question, révélant ainsi un paradoxe insoupçonné dans le processus cognitif de Kepler. Cette ironie, que la découverte d'un principe physique provoque l'émergence d'une nouvelle découverte de l'esprit, n'est pas une surprise pour ceux qui ne sont pas affligés par la maladie d'Aristote et elle démontre, comme Platon et Nicolas de Cues nous l'ont enseigné, que l'esprit et la matière sont inséparables.

Cette ironie n'est pas non plus étonnante pour celui qui a été amené à connaître ce que Lyndon LaRouche a démontré : le principe supérieur de cognition gouverne le principe des processus vivants, lequel gouverne le principe des processus non vivants. Ainsi, le principe de cognition s'exprime dans les processus vivants et non vivants, même si c'est sous une forme paradoxale. Comme dans la méthode de Platon et du Cusain, c'est par de tels paradoxes (comme le problème de Kepler) que nous sommes amenés à découvrir ces principes supérieurs. *

Afin de mieux saisir le problème, considérons le mouvement de la planète du point de vue de l'esprit de la planète. Sa trajectoire autour du Soleil est gouvernée par les caractéristiques d'une orbite elliptique qui est elle-même gouvernée par l'ordonnancement harmonique du Système solaire. Ces caractéristiques sont exprimées à chaque instant du mouvement planétaire, sous la forme d'une vitesse et d'une trajectoire variant de manière non uniforme. A chaque instant, l'action de la planète cesse d'être ce qu'elle était et devient ce qu'elle sera. A chaque « moment de devenir », la planète a une vitesse et une trajectoire définies qui changent de telle sorte que l'intervalle résultant maintient une proportion constante par rapport à l'orbite entière, c'est-à-dire des aires égales. Le changement de vitesse de la planète et de sa trajectoire change, lui aussi, à tout moment. Comment la planète sait-elle, à chaque « moment de devenir », comment son action doit changer ?

Les découverte de nouvelles actions physiques non uniformes par Fermat, Leibniz, Huygens et Bernoulli, allaient poser un défi similaire. Comment la lumière sait-elle comment changer sa trajectoire de telle sorte qu'elle trouve le chemin de moindre temps ? Comment une chaînette pendant librement sait-elle trouver la courbe équivalant à la tension minimale ? Et, plus important encore pour Fermat et Leibniz, comment l'esprit humain peut-il savoir ce que la planète, la lumière ou la chaînette savent ?

Ces questions importunaient grandement les aristotéliciens com-

* On peut mieux comprendre cette méthode de découverte par inversion en réfléchissant aux principes de polyphonie musicale. Pensons comment les caractéristiques sous-jacentes du bel canto, du système de composition musicale polyphonique bien-tempéré, sont découvertes par rapport à ce principe d'inversion. La singularité caractéristique de l'intervalle lydien, par exemple, n'émerge clairement que dans le contexte du principe d'inversion dans la composition musicale.

me Descartes. Soit ils rejetaient purement et simplement toute idée de principe universel, soit ils cherchaient des explications mécaniques, séparant l'esprit de la matière. Pour Aristote, Galilée, Newton et Descartes, l'action dans l'univers se fait le long de lignes droites ou de cercles parfaits. De telles actions uniformes ne requièrent point de cognition, puisque des corps se mouvant selon des lignes droites ou des cercles ne changent pas, si ce n'est par des forces « externes ». Pour Aristote, cette force externe – la cognition – ne réside pas seulement en dehors de l'univers physique, mais également à l'extérieur de l'esprit humain.

Leibniz et Fermat, au contraire, comprenaient que les principes comme le moindre temps ainsi que les orbites de Kepler reflétaient l'existence d'une caractéristique universelle, présente à chaque « moment de devenir ». La solution au problème de Kepler consistait ainsi à déterminer les caractéristiques universelles dans les « moments de devenir ».

Leibniz exprime le problème ainsi pour ce qui concerne la lumière : *« [...] en effet ni le rayon sortant depuis C ne décide comment parvenir le plus facilement qu'il peut vers le point E ou D ou G, ni il n'est porté par soi vers eux-mêmes ; mais le Fondateur des choses créa la lumière de telle sorte que de sa nature naquit ce très beau résultat. C'est pourquoi ils se trompent beaucoup, pour ne pas dire plus gravement la chose, ceux qui rejettent en Physique* les causes finales avec Descartes *; puisque cependant outre l'admiration de la divine sagesse, elles nous offrent à trouver un très beau* principe*, également les propriétés de ces choses dont la nature intime n'est pas encore si clairement connue par nous que nous ayons le pouvoir de les expliquer, d'utiliser les causes efficientes et les artifices que le Créateur employa pour produire leurs effets et pour obtenir leurs fins. Nous comprenons encore de là que les méditations des anciens sur ces choses ne sont pas à mépriser, comme il semble aujourd'hui à certains. »*

C'est la raison pour laquelle le calcul infinitésimal de Leibniz fut développé sous la forme d'une géométrie de position. Comme nous l'avons vu au début, Fermat commença ses travaux en généralisant le concept grec de géométrie de position. Il posa ainsi les fondements du calcul infinitésimal, en inversant ce concept, c'est-à-dire que Fermat, et plus tard Leibniz, a redéfini les trajectoires complètes du point de vue des « moments de devenir ». Fermat appela ceci sa « méthode pour la recherche du maximum et du minimum, et sur les tangentes aux lignes courbes ». Leibniz a élargi ce concept, en voyant dans ces « moments de devenir » ce qu'il allait appeler « différentiels ».

Pour illustrer cette méthode, nous allons commencer, comme le firent Fermat et Leibniz, avec un exemple plus simple que le problème de Kepler, car celui-ci allait requérir des découvertes supplémentaires accomplies plus tard par Gauss et Riemann.

Construisons une parabole en utilisant la méthode du papier paraffiné (figure 2). Dans cette construction, la parabole apparaît comme enveloppe de plusieurs tangentes, ce qui est une inversion par rapport au fait de tracer les tangentes à partir d'une parabole. Par le foyer de la parabole, traçons un axe – *A* – qui lui est symétrique. Ensuite, prenons l'une des tangentes et traçons une ligne depuis le point de tangence de façon à ce qu'elle soit perpendiculaire à la ligne *A*. Appelons *x* le point d'intersection avec *A*. Enfin, prolongeons la ligne tangente jus-

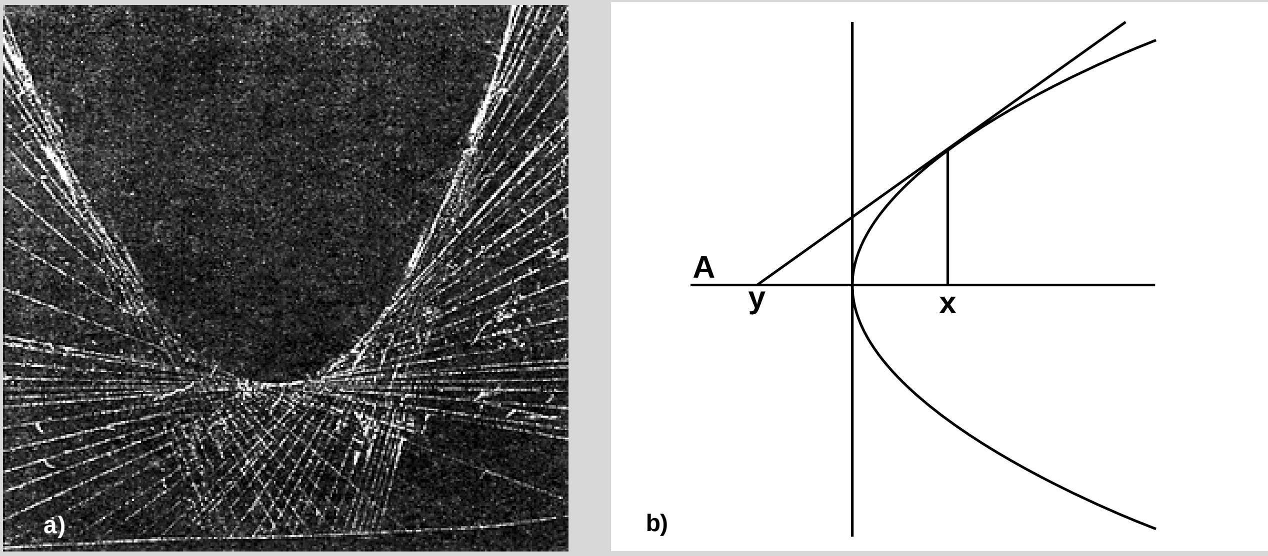


Figure 2. **a) En utilisant la méthode du papier paraffiné, la parabole apparaît comme enveloppe de plusieurs tangentes. b) Par le foyer de la parabole, traçons un axe – A – qui lui est symétrique. Ensuite, prenons l'une des tangentes et traçons une ligne depuis le point de tangence de façon à ce qu'elle soit perpendiculaire à la ligne A. Appelons x le point d'intersection avec A. Enfin, prolongeons la ligne tangente jusqu'à ce qu'elle coupe la ligne A. Appelons y le nouveau point d'intersection. Répétons ce processus avec plusieurs tangentes. Nous constatons que lorsque le point de tangence s'éloigne du sommet, y s'éloigne lui aussi, et inversement. Au sommet de la parabole, les points x et y coïncident.**

qu'à ce qu'elle coupe la ligne *A*. Appelons *y* le nouveau point d'intersection. Répétons ce processus avec plusieurs tangentes. Nous constatons que lorsque le point de tangence s'éloigne du sommet, *y* s'éloigne lui aussi, et inversement. Au sommet de la parabole, les points *x* et *y* coïncident.

Fermat a montré, dans le cas de la parabole, que la distance séparant *x* du sommet de la parabole est toujours la moitié de la distance de *x* à *y*. De cette façon, par inversion, il a pu démontrer que l'action le long d'une parabole est celle qui permet de maintenir le rapport 1:2 entre les points *x* et *y*. Cette proportion, comme pour le principe des aires égales d'une orbite keplérienne, exprime le changement à chaque « moment de devenir ». (Le cas de la parabole n'est qu'une illustration à des fins pédagogiques. La méthode de Fermat était une méthode générale, qui lui a permis de résoudre une myriade de problèmes transcendantaux, ce qui, soit dit en passant, rendit furieux Descartes.)

Tout problème posé du point de vue de la géométrie de position implique l'existence d'axiomes concernant le domaine dans lequel se situe l'action. Dans l'exemple mathématique que nous venons de présenter, celui de la parabole, nous avons implicitement présumé que la parabole se trouvait dans un plan euclidien. Par contre, dans un problème relevant de la physique, nous commettrions une grave erreur si nous présumions que l'action, comme celle d'un rayon de lumière réfracté ou celle d'une planète se déplaçant sur son orbite, avait lieu dans un espace euclidien. Cependant, ce serait toujours une erreur que de remplacer l'espace euclidien par une autre variété d'espace non euclidienne. Et ce serait encore une erreur que d'adopter ce que nous penserions être un concept anti-euclidien, si nous limitions nos investigations aux processus non vivants. En d'autres termes, lorsque nous considérons la géométrie de position du mouvement d'une planète autour du Soleil, nous ne pouvons restreindre notre enquête à la position de la planète par rapport à la matière non vivante dans le Système solaire. Comme nous l'avons souligné plus haut, nous devons étudier la position changeante de la planète comme fonction de processus non vivants, vivants et cognitifs. Ainsi, comment les principes universels des processus non vivants, vivants et cognitifs s'expriment-ils en chaque « moment de devenir » ? La réponse requiert le développement d'un nouveau type de géométrie de position, que l'on pourrait appeler « calcul hylozoïque ».

L'importance de l'ambiguïté précise dans les sciences

L'art classique fournit de nombreux exemples montrant que l'ambiguïté est la seule manière de communiquer de façon précise une idée, de sorte qu'un esprit puisse dire à l'autre « je sais exactement ce que vous voulez dire ». Or la communication entre l'homme et l'univers se fait, elle aussi, avec des ambiguïtés précises.

Quand le Cusain et Kepler libérèrent l'humanité de l'esclavage aristotélicien, le monde du mouvement non uniforme qu'ils découvrirent n'obéissait pas aux calculs précis tant désirés par les savants académiques. Ce nouveau monde pouvait néanmoins être soumis à des mesures précises. Il ne manquait que l'invention d'un nouveau type de mathématiques – une métaphore qui reflétait le principe de cognition.

Cette nouvelle mathématique fut le résultat d'un dialogue à trois voix s'étendant sur plusieurs siècles. La première voix était les penseurs de la renaissance comme Nicolas de Cues, Léonard de Vinci, Johannes Kepler, Pierre de Fermat, Gottfried Leibniz, Abraham Kästner, Karl Friedrich Gauss, Bernhard Riemann, etc. ; la deuxième, les penseurs grecs comme Pythagore, Théétète, Théodore, Platon, Eratosthène, Archimède, etc. ; et la troisième, l'univers lui-même. Cette « grande discussion » peut encore être entendue aujourd'hui, pour peu que l'on s'attache à découvrir le langage qui lui est propre.

Il serait historiquement exact et utile d'un point de vue pédagogique de considérer le problème de Kepler comme le *motif directeur* de ce dialogue. Ce paradoxe identifié par Kepler est essentiel, et sa solution requiert l'assimilation de toute la tradition socratique de la science grecque ainsi que la découverte d'un principe nouveau.

Les découvertes ultérieures de diverses formes d'action physique non uniforme, tel le trajet de moindre temps des rayons de lumière réfractés de Fermat, la cycloïde de Huygens, la chaînette de Leibniz ou la brachistochrone de Bernoulli, ont révélé que le problème de Kepler était l'exemple même d'une classe entière de problèmes physiques dont la caractéristique était l'action non uniforme. Ces découvertes ont permis d'établir, sans conteste, que l'on ne pouvait pas séparer l'esprit de la matière, comme l'illustre le concept de l'« esprit de la planète » imaginé par Kepler.

Un paradoxe surgit car, avec une action non uniforme, la position d'une planète, par exemple, est une fonction d'un principe de changement. De telles positions ne peuvent être considérées comme des points dans l'espace mais plutôt comme résultant de transformations – des « moments de devenir » – depuis ce qu'était la planète à un instant donné, vers ce qu'elle sera un instant plus tard. Ces transformations sont elles-mêmes une fonction régissant non pas la planète uniquement mais l'ordonnancement harmonique, multiplement connecté, régissant le Système solaire dans son ensemble. Cette fonction s'exprime, en particulier, sous la forme des trois principes de Kepler, l'ordonnancement des solides platoniciens et l'harmonie des intervalles musicaux engendrés par le mouvement de la planète. Ainsi, la position de la planète à un moment donné est ambiguë par rapport à sa position antérieure ou toute autre position située à l'intérieur ou à l'extérieur de l'orbite. Cependant, elle est moins ambiguë par rapport aux caractéristiques physiques sous-jacentes gouvernant les « moments de devenir ». L'ambiguïté diminue avec la découverte de nouveaux principes physiques. Puisque l'esprit humain doit, pour ainsi dire, découvrir ces principes de l'intérieur, ce qu'il faut mesurer à chaque « moment de devenir », ce sont les caractéristiques physiques et non les positions.

Pour répondre à cette question, le Cusain, Kepler, Fermat, Leibniz et d'autres, ont eu recours à la tradition socratique dans la science grecque, dont le trait principal était ce principe hylozoïque. Comme nous l'avons indiqué plus tôt, Kepler puis Fermat ont tenté d'appliquer les recherches des Grecs sur les lieux à cette nouvelle classe de problèmes physiques. Les paradoxes posés par ces principes physiques nouvellement découverts nécessitaient toutefois des percées par rapport aux acquis grecs. Les recherches des Grecs concernaient les lieux déterminés par un ensemble de conditions se rapportant à un ensemble de positions. Le mouvement non uniforme exigeait, par contre, que le lieu soit considéré comme étant déterminé par un ensemble de conditions lié à un principe d'action. Les positions d'une planète sur son orbite, par exemple, ne sont pas une fonction de la relation entre la planète et un autre point ou corps. Elles sont plutôt une fonction d'un ordonnancement harmonique du Système solaire pris dans son ensemble. Ce sont ces principes qui déterminent la position de la planète à chaque instant, non pas sa relation par rapport à un point fixe tel le centre géométrique de l'orbite, l'équant ou même un corps fixe comme le Soleil.

Kepler a explicitement souligné ce point à la fin de l'*Harmonie du Monde*, dans un *Epilogue concernant le Soleil par voie de conjecture.* Il a adopté ici la conception de Pythagore et de Platon : *« La relation des six sphères à leur centre commun, qui est ainsi le centre du monde entier, est la même que celle de la Pensée discursive [dianoia] à l'Esprit [noos]. »* Toutefois, il ajouta qu'il ne fallait pas voir ce principe d'ordonnancement de l'Esprit comme étant localisé dans un endroit précis, ou penser qu'il existe un *« trône royal dans le système solaire »*, comme le croyaient les pythagoriciens. Faisant écho à de Nicolas de Cues, il disait : *« Nous, chrétiens, qui avons été amenés à faire des distinctions plus précises, savons que le Logos éternel et non créé, qui était avec Dieu, ne peut être contenu par quoi que ce soit, même s'il est dans toute chose, et exclu par aucune [...]. »*

Cette distinction est essentielle pour résoudre le problème de Kepler. Alors que ce dernier établit le rôle du Soleil comme moteur des planètes, le Soleil se trouvait en même temps soumis à un principe d'ordonnancement supérieur présent à tout moment lors du mouvement de la planète, principe pouvant être découvert par l'esprit humain. D'où la nécessité d'une métaphore mathématique capable de décrire le positionnement comme étant la fonction d'un principe de changement.

C'est exactement ce que Leibniz cherchait à créer avec son calcul infinitésimal, en prenant comme point de départ les travaux de Fermat. Quelques exemples nous aideront à élaborer le concept. Chaque section conique peut être conçue de deux façons différentes. L'une est le lieu d'un ensemble de positions fixes, telle une courbe engendrée par l'intersection d'un plan avec un cône. Inversement, chaque section conique peut être vue comme enveloppe d'un ensemble de tangentes. Dans la première conception, c'est la courbe qui détermine les positions des tangentes, alors que dans la seconde, ce sont les positions des tangentes qui déterminent la courbe. Si nous commençons par la courbe, comment pouvons-nous déterminer les tangentes, afin que leurs positions puissent envelopper la courbe ?

> Les positions d'une planète sont une fonction d'un ordonnancement harmonique du Système solaire pris dans son ensemble. Ce sont ces principes qui déterminent la position de la planète à chaque instant, non pas sa relation par rapport à un point fixe tel le centre géométrique de l'orbite, l'équant ou même un corps fixe comme le Soleil.

Pour résoudre ce problème, Leibniz a cherché non pas à déterminer les positions des tangentes, mais la fonction qui régissait la façon dont les positions des tangentes changeaient. Leibniz y arriva en considérant chaque tangente comme un « moment de devenir », et le changement entre les tangentes comme des différentiels. La fonction recherchée fut appelée « équation différentielle ».

Afin de mieux illustrer cette approche, revenons à l'exemple de la parabole discuté plus haut, en commençant par la géométrie des lieux de Fermat. Alors que la longueur et l'angle de chaque tangente à la parabole changeait de manière non uniforme, Fermat a démontré qu'un rapport de 2:1 était toujours maintenu lorsqu'on projetait la tangente sur un axe coupant la parabole en deux. Leibniz comprit que ce rapport 2:1 représentait la caractéristique d'action, le différentiel entre chaque « moment de devenir ». Ainsi, Leibniz considérait les tangentes comme ces lignes produites par une séquence de différentiels, qui changeait selon le rapport 2:1. La parabole était, quant à elle, l'intégrale de cette équation différentielle.

En d'autres termes, la certitude des sens nous amène à penser la parabole comme un ensemble de positions qui détermine les positions d'un ensemble de tangentes, lequel détermine à son tour la caractéristique du changement d'une tangente à l'autre. Du point de vue du calcul différentiel de Leibniz, la caractéristique du changement (équation différentielle) détermine les positions des tangentes, lesquelles déterminent ensuite la parabole.

L'approche de Leibniz peut être illustrée par un autre exemple, provenant de la méthode de composition développée par Jean-Sébastien Bach. Comme ses œuvres le démontrent, les notes musicales ne sont pas des positions qui déterminent les intervalles, puis les gammes et les clés, et enfin le système bien tempéré. Comme toute personne écoutant une œuvre de Bach peut aisément le reconnaître, la position de n'importe quelle note est une ambiguïté, qui devient de moins en moins ambiguë quand l'œuvre progresse, et les intervalles générés, ainsi que leurs inversions, sont entendus par rapport à la totalité du système bien tempéré de polyphonie *bel canto*. C'est ce changement, par rapport au système dans son ensemble, qui détermine les notes et non pas les notes qui déterminent le changement.

La brachistochrone de Bernoulli : un cas exemplaire de la science des « moments de devenir »

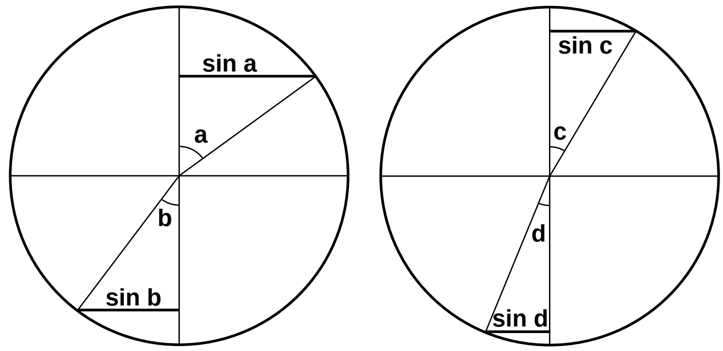


Figure 3. **Quand la lumière est réfractée, le sinus de l'angle d'incidence est toujours proportionnel au sinus de l'angle de réfraction. Ci-dessus, on voit un rayon de lumière passant de l'air dans l'eau à deux différents angles. Fermat a montré que sin a/sin b = sin c/sin d.**

Bien entendu, Leibniz ne limita pas l'application de son calcul différentiel aux sections coniques ou même à d'autres courbes connues. Il résolut de démontrer, avec Jean Bernoulli, que des courbes inconnues pouvaient être également découvertes à partir de leur équation différentielle correspondante. La manière par laquelle Bernoulli découvrit la brachistochrone illustre parfaitement ce point.

En 1697, Bernoulli avait, dans l'*Acta Eruditorum* de Leibniz, posé le défi suivant aux mathématiciens de son époque : *« Déterminer la courbe joignant deux points, situés à deux distances différentes de l'horizontale et pas sur la même verticale, le long de laquelle une particule mobile agissant sous son propre poids et partant du point le plus élevé, descend le plus rapidement vers le point le plus bas. »* Le prix promis n'était pas composé d'or et d'argent, *« car ces éléments ne séduisent que les âmes basses et vénales, alors que nous ne pouvons espérer rien de louable ou d'utile pour la science. Mais puisque la vertu elle-même est la récompense la plus désirable et la célébrité l'incitatif le plus puissant, nous offrons un prix, pouvant combler le sang le plus noble, composé d'honneurs, d'acclamations et d'approbations ; ainsi, nous allons couronner, honorer et exalter, publiquement et en privé, en lettres et en paroles, la perspicacité de ce grand Apollon ».*

Leibniz fut le seul à présenter une solution. Comme nous le verrons plus loin, le défi de Bernoulli concernait non seulement ce problème particulier, mais pointait plus généralement vers la méthode qu'il avait développée avec Leibniz pour découvrir des principes universels, tout en montrant les limites de l'approche défendue par Newton et Galilée.

Comme Bernoulli l'avait remarqué, même la méthode des maxima et minima de Fermat ne permettait pas de résoudre ce problème. En effet, Fermat cherchait le maximum et le minimum à partir d'un ensemble donné de lieux, tel le point de courbure maximal d'une section conique. Le problème de Bernoulli consistait, au contraire, à trouver une courbe minimale parmi une infinité de parcours possibles. Toute position le long de la courbe recherchée était déterminée par un principe de changement. Ainsi, on recherchait comment déterminer les positions du corps à partir d'un principe de changement donné, en l'occurrence le moindre temps. Ceci équivaut à trouver l'orbite correcte d'une planète, pas seulement celles qui sont possibles. Ou, en termes métaphysiques : comment pouvons-nous connaître la façon par laquelle un corps en chute sait trouver le parcours de moindre temps ?

Le défi de Bernoulli n'était pas un casse-tête mathématique abstrait, dans le seul but de brouiller l'esprit des mathématiciens, car sa solution aller mener à des découvertes importantes dans les sciences mécaniques, ainsi qu'en métaphysique.

Bernoulli s'attaqua au problème à l'aide de ce qu'il appelait « le principe métaphysique de Fermat », selon lequel la lumière cherchait toujours le parcours de moindre temps. Les Grecs savaient déjà que, lorsque la lumière est réfléchie par un miroir, le trajet parcouru est celui de la plus courte distance. Par contre, quand la lumière est réfractée, lors de son passage d'un milieu à un autre, comme de l'eau à l'air, le trajet parcouru ne correspond pas à la plus courte distance. En découvrant que la vitesse de la lumière était moins élevée dans les milieux les plus denses, Fermat avait démontré qu'elle changeait de direction lors de son passage d'un milieu à l'autre, de façon à suivre le trajet de moindre temps. Ceci était, bien entendu, cohérent avec ce qu'avaient découvert les Grecs. En y réfléchissant bien, puisque la lumière voyage dans un seul milieu, et ne change par conséquent pas de vitesse, la distance la plus courte correspond au temps le plus court. Toutefois, quand il y a changement de milieu, la lumière suit le trajet le plus court dans l'espace-temps, en d'autres termes le trajet de moindre temps.

L'approche de Bernoulli consistait, pour ainsi dire, à suivre la lumière le long de son parcours de moindre temps. Si le rayon de lumière traversait un milieu dont la densité changeait de façon continue, selon le même principe qu'un corps chutant sous l'effet de son propre poids, alors le parcours de moindre temps de la lumière serait identique à celui du corps en chute.

Alors, comment découvrir ce parcours alors que nous connaissons seulement le principe de changement et ne disposons d'aucune position nous permettant de nous orienter ? A chaque instant, la lumière change de vitesse et de direction, de telle sorte qu'elle puisse trouver le parcours de moindre temps, à l'instar du mouvement d'une planète sur son orbite, qui cesse à chaque instant d'être ce qu'il était pour devenir ce qu'il sera. A chaque instant, la position de la lumière est une fonction du principe consistant à maintenir le

Comment Bernoulli a déterminé le plus court trajet d'un corps chutant d'un point vers un autre situé sur une verticale différente

Huygens avait déterminé qu'un corps chutant le long d'une cycloïde à partir de points différents arrive toujours en bas après le même laps de temps. On dit, pour cette raison, que la cycloïde est isochrone. Fermat démontra ensuite que la lumière, passant d'un milieu moins dense à un autre plus dense, suit toujours un parcours correspondant au temps le plus court. Dans son Traité de la lumière, Huygens confirma le principe du moindre temps de Fermat, sans toutefois pouvoir déterminer la nature de la courbe tracée par la lumière réfractée dans un milieu dont la densité change constamment.

La découverte de Bernoulli

On considère un milieu dont la densité décroît selon une certaine loi. Etant donné que la vitesse du rayon de lumière s'accroît proportionnellement à la rareté (l'inverse de la densité) du milieu, et que le sinus de l'angle de réfraction (l'angle entre le rayon et la verticale) est proportionnel à la rareté du milieu en chaque point, selon la loi de Snell, le trajet du rayon de lumière aura la propriété suivante : le sinus de l'angle d'inclinaison de la courbe par rapport à la verticale sera en tout point proportionnel à la vitesse.

Si nous substituons au rayon de lumière un corps en chute, dont la vitesse varie en fonction d'une loi semblable à celle déterminant la densité du milieu dans lequel se déplace la lumière, et puisque dans les deux cas le trajet doit correspondre au temps le plus court, la courbe sera la même, peu importe la nature de l'agent responsable de l'accélération.

Bernoulli cherche ici, en faisant fi dans un premier temps de la loi déterminant l'accélération, à déterminer la forme mathématique de la courbe décrivant le trajet du corps en chute.

D'abord, il essaie de déterminer l'équation mathématique de la courbe tracée par le rayon de lumière.

Bernoulli explique : « De cette façon, nous pouvons résoudre notre problème de manière générale, indépendamment de la loi déterminant l'accélération. Cela revient plus particulièrement à rechercher la courbe tracée par la lumière dans un milieu dont la rareté varie de façon arbitraire. Supposons, par conséquent, que FDG est le milieu, limité par la ligne horizontale FG, sur laquelle le point rayonnant A est situé. Considérons la verticale AD comme l'axe de la courbe AHE, à laquelle ont associe la longueur HC, qui détermine la rareté du milieu à la hauteur AC, ou la vitesse du rayon, ou corpuscule, au point M. Le trajet du rayon de lumière lui-même sera représenté par la courbe AMB. Appelons AC, x ; CH, t ; CM, y ; le différentiel Cc, dx ; le différentiel nm, dy ; le différentiel Mm, dz. Puis posons a comme constante arbitraire. »

Bernoulli montre ensuite que le sinus de l'angle α sera dy/dz, et que son rapport avec la rareté t du milieu sera toujours constant.

Nous avons donc : $\dfrac{dy/dz}{t} = \dfrac{1}{a}$

$a^2dy^2 = t^2dz^2$

$a^2dy^2 = t^2dx^2 + t^2dy^2$

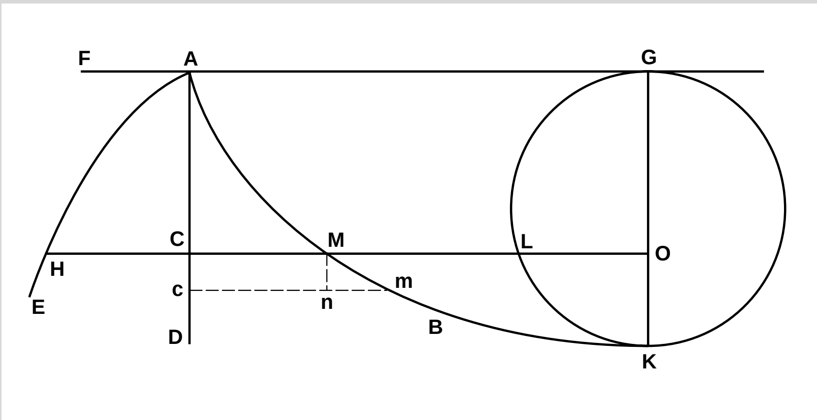
$dy^2(a^2 - t^2) = t^2dx^2$

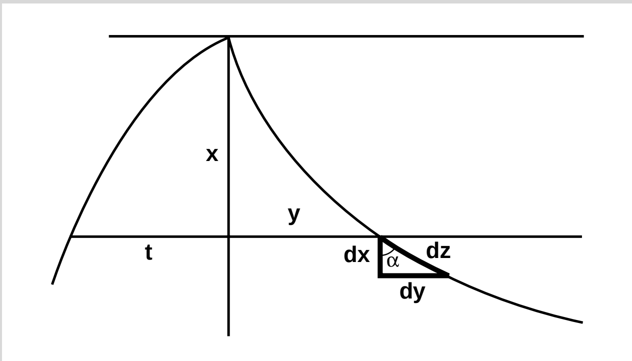
Puis finalement : $dy = tdx/\sqrt{(a^2 - t^2)}$ qui est l'équation différentielle de la courbe recherchée.

Pour le cas d'un corps en chute, si la vitesse t s'accroît selon le carré de la distance x, selon l'hypothèse de Galilée, alors la variation de t, qui est aussi, par analogie, la rareté du milieu par rapport à x, sera décrite par la parabole $t^2 = ax$.

Lorsque que nous remplaçons t par $\sqrt{ax}$ dans l'équation <u>précédente</u>, nous obtenons la courbe de la cycloïde : $dy = \sqrt{(x/(a - x))}$.

Ainsi, Bernoulli a démontré que la cycloïde est en même temps isochrone et brachistochrone dans le cas d'un corps chutant d'un point à un autre situé sur une verticale différente. Cela signifie qu'elle décrit, en termes de temps, le trajet le plus court.





Pour un rayon lumineux, si la rareté s'accroît selon la même loi (le carré de la distance), nous obtenons aussi une cycloïde, ce qui répond à la question laissée en suspens par Fermat et Huygens.

Bernoulli s'exclame : « Ainsi j'ai réussi, d'un seul coup, à résoudre deux problèmes remarquables, l'un concernant l'optique et l'autre la mécanique, et j'ai accompli plus que ce que j'avais demandé aux autres ; j'ai montré que les deux problèmes, tirés de deux champs entièrement distincts des mathématiques, sont néanmoins de même nature. »

Benoit Chalifoux

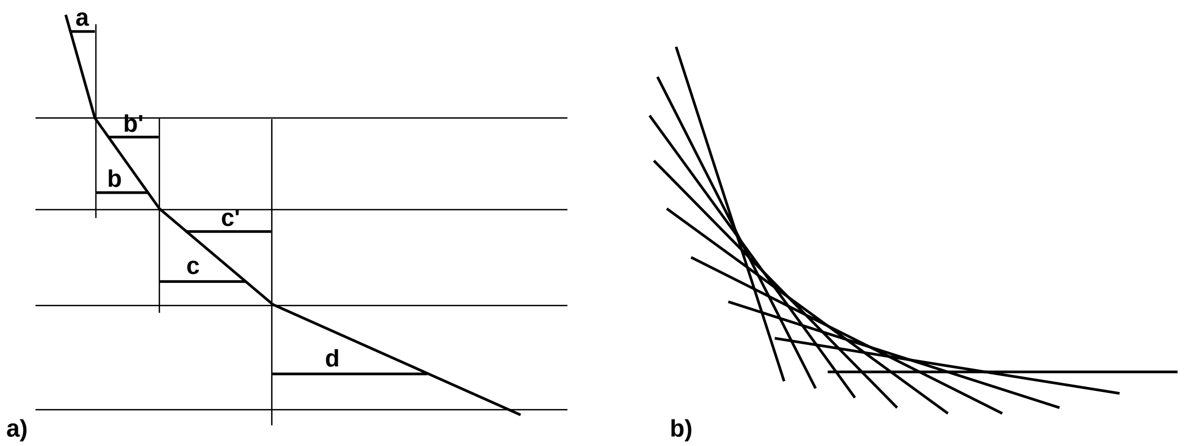


Figure 4. **Quand la lumière passe d'un milieu à un autre, elle est réfractée de façon différente quand elle franchit la limite. a) La proportion a/b est différente que b'/c, elle-même différente que c'/d. b) Le milieu change constamment et il en est de même pour la direction de la lumière. Ces directions qui changent constamment enveloppent la courbe le long de laquelle la lumière se déplace.**

parcours de moindre temps.

Fermat a montré que lorsque la lumière se déplace dans un milieu devenant plus dense, elle ralentit et son trajet se rapproche de la verticale. Si, par exemple, la lumière passe de l'air vers l'eau, l'angle de sa trajectoire avec la verticale change à la limite entre les deux milieux. Si l'angle formé par sa trajectoire dans l'air et la verticale change, alors l'angle de sa trajectoire dans l'eau avec la verticale change aussi, mais pas dans la même proportion. Le changement se fait plutôt de telle sorte que les sinus des deux angles gardent toujours le même rapport (figure 3).

Ainsi, à chaque « moment de devenir » le long du chemin emprunté par la lumière, la vitesse et la trajectoire de la lumière changent de telle sorte que le sinus de l'angle formé par le chemin pris par la lumière est toujours proportionnel au sinus formé par ce même chemin mais au moment précédent (figure 4).

Pour trouver la brachistochrone, Bernoulli conçut le milieu de la manière suivante : *« Si nous considérons maintenant un milieu comme étant non pas de densité non uniforme mais comme étant divisé par un nombre infini de feuilles horizontales superposées, et dont les interstices sont remplis d'une matière transparente de densité croissante ou décroissante selon une loi donnée ; alors il devient évident qu'un rayon peut être vu comme une petite sphère voyageant non pas en ligne droite mais le long d'un parcours courbé. Ce parcours est tel qu'une particule le suivant avec une vitesse qui augmente ou diminue de manière continue, selon la densité du milieu, passe d'un point à l'autre dans le laps de temps le plus court. »*

Selon cette idée, à chaque feuille horizontale, la vitesse et la direction de la lumière changent. Le principe selon lequel elles changent est ce que Leibniz a appelé le différentiel. La totalité de ces différentiels, que Leibniz appelait « intégrale », est la brachistochrone recherchée.

D'un « moment de devenir » à l'autre, la position de la lumière change, alors qu'elle passe verticalement d'une densité à l'autre. Chaque changement vertical de position est accompagné d'un changement horizontal, correspondant au sinus de l'angle d'inclinaison (encadré). Bernoulli a adopté ici la notation de Leibniz, appelant le changement vertical dy, le changement horizontal dx et le changement résultant dans le parcours de la lumière dz. Le rapport entre le changement vertical et le changement horizontal, dy:dx, et le changement résultant, dz, sont une fonction du taux auquel la densité du milieu change.

Bernoulli montre que si la rareté du milieu change selon le taux auquel un corps tombe sous l'effet de son propre poids, ce qui signifie ici que la vitesse (qui est, ne l'oublions pas, proportionnelle à la rareté du milieu) change selon la racine carrée de la distance verticale, alors la courbe recherchée est la cycloïde. Il écrit : *« (...) vous serez pétrifié d'étonnement lorsque je vous dirai que cette cycloïde, la tautochrone de Huygens, est la brachistochrone recherchée. »*

Bernoulli insista qu'il ne s'agissait pas seulement de la découverte d'un phénomène physique particulier, mais la découverte métaphysique d'un principe universel : *« Avant de conclure, je ne peux m'empêcher d'exprimer mon étonnement lorsque je découvrit l'identité insoupçonnée de la tautochrone de Huygens et de la brachistochrone. De plus, je pense qu'il est utile de reconnaître que cette identité ne peut être trouvée que par l'hypothèse de Galilée, de sorte que nous pouvons imaginer que la nature voulait qu'il en soit ainsi. Car puisque la nature a l'habitude d'agir de la manière la plus simple, ici aussi elle accomplit deux services différents avec une seule et même courbe, alors que sous toute autre hypothèse nous aurions besoin de deux courbes différentes, l'une pour les oscillations de durée égale [d'un pendule], et l'autre pour la descente la plus rapide. Si, par exemple, la vitesse d'un corps en chute variait non pas comme la racine carrée mais comme la racine cubique de la distance verticale parcourue, alors la brachistochrone serait algébrique, et la tautochrone transcendantale ; mais si la vitesse variait [simplement] comme la distance parcourue, alors les deux courbes seraient algébriques, l'une un cercle et l'autre une droite. »* ■