

Les relations entre nombres, espace et esprit

LAURENCE HECHT

Réprésentons-nous mentalement six objets dont nous souhaiterions étudier les interrelations. Nous nous intéresserons non pas à leur nature en tant qu'objets réels mais seulement à cette qualité qui permet de les concevoir et les distinguer les uns des autres. Il s'agit donc d'objets qui n'existent qu'en pensée. Identifions-les à l'aide de chiffres, de 1 à 6. Nous aurions tout aussi bien pu avoir recours à des lettres ou à tout autre symbole permettant de les garder distincts à l'esprit. Nous voudrions maintenant découvrir les différentes manières avec lesquelles ces six objets peuvent être apparés. L'identification choisie – celle du nombre – nous facilite la tâche. Dressons d'abord la liste de toutes les paires comprenant « 1 » avec les cinq autres chiffres, puis les paires comprenant « 2 », etc. Le résultat est indiqué ci-dessous :

12					
13	23				
14	24	34			
15	25	35	45		
16	26	36	46	56	
<hr/>					
5	4	3	2	1	

En comptant le nombre de paires dans chaque colonne puis en les additionnant, on obtient :

$$5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 15.$$

Prenons une autre forme de représentation en imaginant les six objets comme des points sur un cercle, et considérons comme paire chaque segment de droite reliant deux

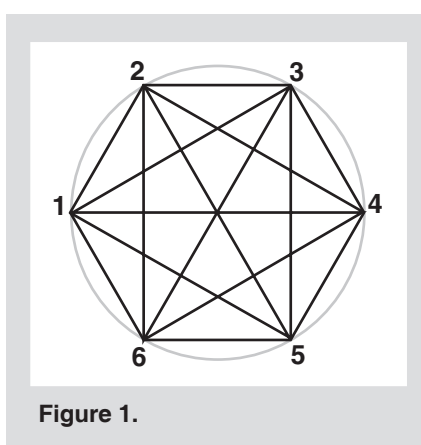


Figure 1.

points. En les dessinant, on crée un hexagone ainsi que tous les segments de droite qui peuvent être tracés entre ses points (**figure 1**). En comptant ces liaisons, on trouve qu'il y en a 15, autant que le nombre de paires trouvées ci-dessus ! L'esprit se réjouit de la découverte de l'équivalence entre ces deux modes de représentation.

Un examen plus poussé de la deuxième forme de représentation révèle pourtant une différence avec la première. Dans la première, rien ne permet de distinguer une paire d'une autre excepté par les symboles qui les constituent. Dans la seconde, nous découvrons trois types distincts de relation entre les paires, chacun caractérisé par un segment de droite de longueur particulière. Nous avons 1) les six segments formant les côtés de l'hexagone ; 2) les six segments de longueur supérieure qui relient deux sommets séparés par un autre point, (par exemple, 13, 24, etc.) ; 3) les trois plus longs segments qui relient les sommets opposés l'un à l'autre (14, 25, 36).

Dans un premier temps, l'esprit s'était réjoui de la similitude,

maintenant il peut se réjouir de la différence entre ces deux formes de représentation. Il est désormais encouragé à rechercher les causes de cette différence. Nous émettons l'hypothèse que cette différence doit résider dans une propriété du mode spatial de représentation. On peut se dire que, parmi les nombreuses façons possibles de disposer ces points dans l'espace, nous avons choisi de les placer régulièrement sur la circonférence d'un cercle. En choisissant une disposition arbitraire sur un plan, nous aurions obtenu des relations entre paires moins ordonnées. Une autre disposition, comme peut-être la spirale, aurait pu produire un ordonnancement plus riche.

Ainsi, en considérant dans notre pensée les relations entre objets, nous avons d'abord décidé d'avoir deux modes de représentation d'interrelations, nous avons ensuite remarqué leurs similitude et différence pour, enfin, s'intéresser aux causes de cette différence. Ayant émis l'hypothèse que cette dernière est un produit du mode spatial de représentation, nous sommes maintenant incités à explorer d'autres modes de représentation.

Parmi la grande variété de choix possibles, nous décidons de sortir du plan afin d'étudier les relations de six points dans un espace à trois dimensions, le décor familier pour notre imagination visuelle. De la même manière que le cercle nous a aidé à répartir les points dans un plan, nous ferons ici appel à son équivalent dans l'espace – la sphère. En répartissant de façon régulière les six points sur la surface d'une sphère, ceux-ci deviennent les sommets d'un

solide platonicien appelé « octaèdre » (**figure 2**). Nous pouvons placer deux points aux pôles Nord et Sud de ce globe, puis quatre autres de telle sorte qu'ils forment un carré inscrit dans le plan de l'équateur. Enfin, en reliant tous les points à leurs voisins les plus proches, nous trouvons 12 segments formant 8 triangles équilatéraux – les faces de l'octaèdre. Cependant, nous n'avons pas encore trouvé toutes les liaisons qu'un espace à trois dimensions nous permet d'obtenir avec six points. En reliant chaque point à son opposé, nous obtenons trois nouveaux segments qui sont des diamètres de la sphère circonscrite au polygone. De nouveau, nous obtenons un total de 15 paires possibles à partir de six objets, mais avec un nouvel ordonnancement comprenant cette fois-ci deux types de liaisons.

Nous pourrions maintenant comparer les trois modes de représentation que notre esprit a inventé pour étudier ces relations par paires :

- Avec les nombres, nous avons produit la série : $1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15$.

- Dans un plan, en utilisant le cercle, nous avons produit trois types de segments reliant les sommets d'un hexagone.

- Dans l'espace, en utilisant une sphère, nous avons produit deux types de segments reliant les sommets d'un octaèdre.

En fait, chacun de ces modes de représentation suggère de nouvelles recherches à entreprendre. Par exemple, considérant le premier mode de représentation (c'est-à-dire les nombres), nous pourrions étudier les combinaisons de paires pour d'autres nombres de choses. On découvrirait rapidement qu'en général, pour « n » choses, le nombre de paires pouvant être formé est égal à $n(n-1)/2$. Ensuite, nous pourrions rechercher l'expression pour les triples, quadruples ou n-tuples combinaisons.

En ce qui concerne le deuxième mode de représentation (la distribution de points sur un cercle et leurs combinaisons), nous découvrons qu'il existe des espèces « au-delà » des polygones réguliers, connues sous le nom de polygones étoilés ou étoiles de Poincaré. Celles-ci ne peuvent pas être générées à partir d'un nombre arbitraire de points mais

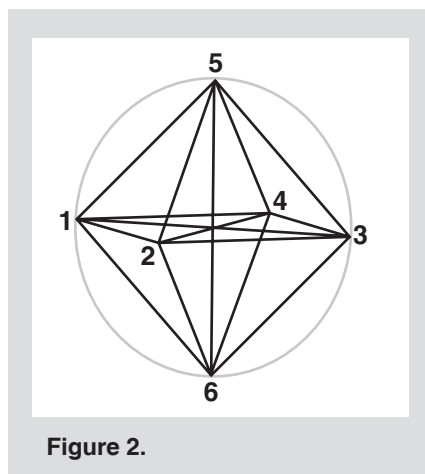


Figure 2.

seulement quand le nombre total de points, ainsi que l'ordre dans lequel on les prend, est premier l'un par rapport à l'autre (c'est-à-dire qu'ils n'ont pas de diviseur commun). La première étoile de Poincaré apparaît quand on prend cinq points sur un cercle et qu'on les relie avec leurs deuxièmes voisins jusqu'à ce que la figure soit fermée, en l'occurrence, de 1 à 3, de 3 à 5, de 5 à 2, de 2 à 4, et de 4 à 1 (**figure 3**). Le résultat, appelé pentagone étoilé ou pentagramme, est décrit comme étant 5/2. Nous pourrions aussi découvrir les 7/2 et 7/3, le 8/3, les 9/2 et 9/4, etc.

Quant au troisième mode de représentation (la répartition de points sur une sphère), un nouveau principe d'ordonnancement apparaît : une répartition dans laquelle tous les points sont parfaitement équidistants n'est uniquement possible que dans les cas où nous avons 4, 6, 8, 12 ou 20 points. Quand on mène une recherche sur ces polygones, on trouve de nouvelles espèces de combinaisons de paires appelées arrêtes, diamètres, diagonales, ainsi

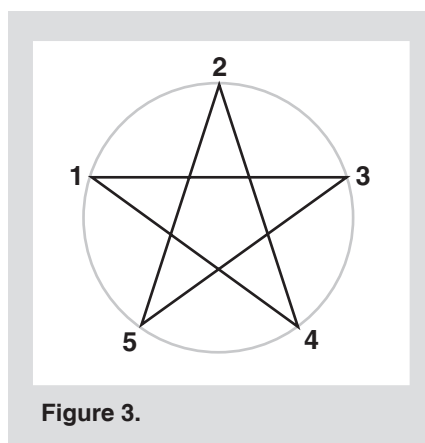


Figure 3.

que quelques autres, la plus grande variété d'espèces apparaissant dans la figure de 20 points.

Réfléchissons maintenant à un principe d'ordonnancement plus élevé. Toutes les représentations que nous avons étudiées, même celles en trois dimensions, sont des créations de l'esprit, des produits de notre imagination arithmétique ou visuelle. Le fait que ces créations de l'esprit nous semblent tellement réelles, nous sommes tentés de nous en émerveiller, tout comme si elles avaient quelque existence en dehors de notre esprit. Vous pourriez rétorquer : « Mais les solides platoniciens sont réels. Je peux les construire ! » Toutefois, quiconque a essayé de les construire, découvre rapidement de la masse là où devraient se trouver des points sans masse, une épaisseur très finie là où devraient se trouver des lignes supposées infiniment fines et des surfaces sans masse. Même l'espace à trois dimensions, le médium indulgent de toutes nos constructions, qui semble si réel et si sûr, est seulement le résultat du travail ingénieux de notre esprit. Tous sont des produits de l'esprit.

Cependant, quand, dans la nature, l'esprit découvre des formes telles que nous venons d'en créer, (ou plutôt imaginer), mises là non par nous mais par quelque chose comme nous dans notre esprit, en bien plus vaste, alors nous pouvons vraiment nous émerveiller et dire : ce qui fait la nature, nous fait. Ce que nous faisons dans l'esprit – penser –, c'est alors la nature, sans doute sous une forme supérieure à ce que nous percevons en dehors de nous. (La preuve de cette vérité, bien connue par nos lecteurs, n'a pas besoin d'être répétée ici.) Ainsi, dans l'ordonnancement, le nombre, l'espace et l'esprit, l'esprit se tient aux deux limites de ces séries, comme créateur de ses propres images et percepteur des autres ; l'une est appelée imagination, l'autre réalité. Toutefois, elles sont toutes deux réelles comme nous l'avons montré, et en même temps imaginées, dans la mesure où ce qui est perçu du monde extérieur est connu seulement à travers les images de l'esprit.

Avec de telles considérations, la véritable science commence. ■