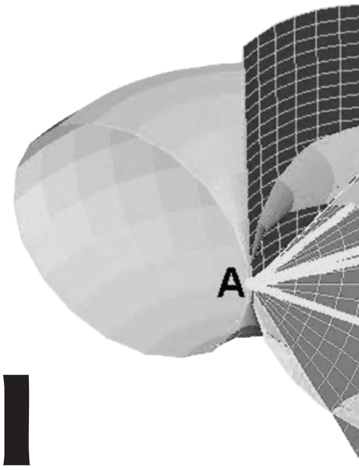


Pourquoi les mathématiciens modernes ont du mal à comprendre Archytas

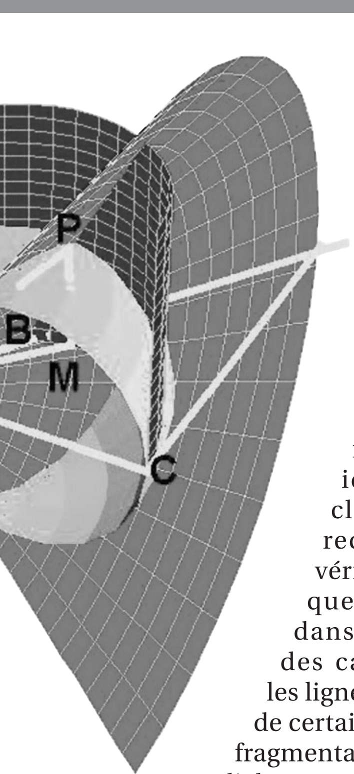
JONATHAN TENNENBAUM

« Mais pour moi, je ne chérissais les mathématiques que parce que j'y trouvais les traces de l'art d'inventer en général, et il me semble que je découvris à la fin que M. Descartes lui-même n'avait pas encore pénétré le mystère de cette grande science. Je me souviens qu'il dit en quelque endroit que l'excellence de sa méthode qui ne paraît que probablement dans la physique, est démontrée dans sa géométrie. Mais j'avoue que c'est dans sa géométrie même que j'en ai reconnu principalement l'imperfection. [...] Je prétends donc qu'il y a encore une toute autre analyse en géométrie que celles de Viète et de Descartes, qui ne sauraient allez assez avant, puisque les problèmes les plus importants ne dépendent point des équations, auxquelles se réduit toute la géométrie de M. Descartes. » [1] [Gottfried Leibniz, *Lettre à la Princesse Elisabeth*, fin 1678.]

En regardant les représentations conventionnelles actuelles de la fameuse construction d'Archytas pour doubler le cube, vous comprendrez que les mathématiques modernes sont tombées bien en dessous du niveau de réflexion qui prévalait dans l'entourage de Platon il y a plus de deux mille trois cents ans ! A titre indicatif, consultez cette page web sur le doublement du cube réalisée par J.J. O'Connor et E.F. Robertson [2]. Bien que ce document contienne quelques références et citations intéressantes, les auteurs, dès qu'ils abordent concrètement la construction d'Archytas, retournent sans honte à leur routine scolaire consistant à « utiliser la géométrie de coordonnées pour vérifier si Archytas est correct ». Imposant un système de coordonnées cartésiennes, ils écrivent les équations algébriques en x, y et z pour chacune des trois surfaces de révolution intersectées – cône, cylindre et tore – et combinent les équations pour montrer que les proportionnalités recherchées « apparaissent pour une raison ou pour une autre ». Magique ! Les lecteurs entreprenant cet exercice formel auront non seulement appris moins que rien sur la réalité de la découverte d'Archytas mais, pire encore, les processus cognitifs de leur esprit auront été par la même occasion « débranchés ».

Quand on considère la formidable sophistication de la méthode de géométrie synthétique d'Archytas, on se rend compte que la façon conventionnelle d'aborder aujourd'hui les mathématiques grecques antiques est extrêmement inadéquate et que les conceptions physiques réelles ayant servi de base à ses travaux ont été supprimées. En fait, la plupart des documents originaux importants de la science grecque ont été soit perdus soit détruits, au moment où l'« âge des ténèbres » imposé sous l'Empire romain brisait la continuité vivante de la science grecque. En tant que conséquence directe de ce processus, la version des fameux *Eléments* d'Euclide ayant survécu – un abrégé dont le mode de présentation axiomatico-déductif rend obscure les idées essentielles et le processus historique du développement de la science grecque – est devenue par la suite, ou on en a fait, la source presque exclusive de la géométrie grecque classique et, en même temps, un modèle pour l'enseignement des mathématiques élémentaires pendant de longs siècles. Entre autres choses, les *Eléments* d'Euclide inverse l'ordonnancement naturel de développement, et cela même en géométrie visuelle, en commençant par la *géométrie plane* et les concepts supposés évidents en soi de « point » et de « ligne droite » en tant qu'entités irréductibles, et en abordant qu'aux derniers chapitres les constructions de ce que l'on appelle la géométrie des solides. Et pourtant, la première et la plus « élémentaire » géométrie visuelle n'est en aucune manière la géométrie *plane* « plate » mais plutôt la géométrie *sphérique* – la forme de géométrie associée à l'astronomie, la plus ancienne science de l'humanité.

Cet état des choses, entre autres,



explique pourquoi les plus grands penseurs de la science depuis la Renaissance jusqu'à Kepler et Leibniz se sont efforcés de retrouver l'« âme » des mathématiques grecques classiques, en reconstituant sa véritable méthode que l'on pouvait, dans le meil-leur des cas, lire « entre les lignes » d'Euclide et de certains autres textes fragmentaires, et dont les dialogues connus de Platon constituent la source unique la plus importante.

Ce qui a été décisif pour ce processus, c'est la redécouverte, pendant la Renaissance, du principe isopérimétrique de la géométrie circulaire et sphérique ainsi que celle de l'importance des cinq solides réguliers. A ce titre, il faut mentionner la manière exemplaire dont la *Divine Proportion* de Luca Pacioli et Léonard de Vinci a remis « Euclide à l'endroit », en soulignant la primauté du fameux livre XIII des *Eléments* d'Euclide. Kepler porta la polémique plus avant, en élaborant une première ébauche d'une véritable géométrie physique sur la base de l'importance fondamentale des solides réguliers. Cela incita directement Fermat, Pascal et Leibniz à retravailler des sujets tels que ceux abordés dans *Les coniques* d'Apollonios, dans un contexte où ces scientifiques s'intéressèrent de plus en plus au concept de variétés multiplement connexes d'ordre supérieur, lequel apparaît, à l'évidence, être le centre des discussions parmi les collaborateurs scientifiques de Platon. Par conséquent, il existe un lien direct entre les travaux d'Archytas et d'Apollonios et ceux de Gauss et Riemann.

De ce point de vue, je propose, à ceux qui sont impatients de creuser le sujet, les observations suivantes sur la construction d'Archytas pour le doublement du cube. Bien que celles-ci soient quelque peu techniques et qu'elles ne cherchent pas à donner un aperçu complet de sa découverte, elles devraient nous aider à emprunter un chemin fructueux afin de réparer quelques-uns des dégâts causés par les mauvaises représentations modernes.

Les moyennes proportionnelles et le doublement du cube

Après la découverte d'Hippocrate de Chios, Archytas s'attaqua au problème du doublement du cube en résolvant le problème plus général de la construction de deux « moyennes proportionnelles » entre deux longueurs données a et b.

Pour résumer, par « deux moyennes proportionnelles », nous entendons deux grandeurs x et y telles que, a et b étant donnés (a est supposé plus grand que b), $b : x = x : y = y : a$. Le doublement du cube correspond au cas spécial ou $a = 2$ et $b = 1$. La première des moyennes proportionnelles (x) correspond à l'arête du cube dont le volume est double de celui du cube unité. La seconde moyenne (y) correspond à l'aire d'un côté du nouveau cube.

Pour voir d'où vient la double moyenne, imaginons un cube unité se transformant en cube double par le processus suivant : d'abord, « étirons » le cube dans sa largeur (c'est-à-dire horizontalement), sans changer sa hauteur et sa profondeur, de sorte qu'elle devienne égale à x (longueur du côté du cube de volume double). Cette opération augmente le volume par le facteur x proportionnellement au volume unité de départ. Ensuite, étirons en profondeur ce solide par le même facteur x, en gardant la largeur égale à x et la hauteur égale à 1. Enfin, étirons en hauteur ce solide par le facteur x, tout en gardant largeur et profondeur égales à x. Le résultat final est un cube de côté x, le cube de volume double.

Puisque chacune de ces trois transformations a accru le volume par le même facteur, la proportion de chaque volume par rapport au précédent sera la même (en l'occurrence x). Puisque le volume initial est

Archytas de Tarente (430-350 avant J.-C.). Ami de Platon, il s'intéressa aussi bien à la physique, à l'astronomie, à la musique et aux mathématiques.

1 et le volume final 2, les volumes intermédiaires N et M constituent une série de moyennes proportionnelles $1 : N = N : M = M : 2$. Etant donné que chaque opération « d'étirement » décrite ci-dessus augmente le volume par le facteur x, on a : $N = x \cdot 1 = x$ et $M = x \cdot N = x^2$.

Alors, la proportion résultante est $1 : x = x : x^2 = x^2 : 2$. En particulier, la longueur x du côté du cube double est la première des deux moyennes proportionnelles entre 1 et 2.

La géométrie des événements physiques

Dès le départ, on peut mentionner qu'en obtenant les deux moyennes proportionnelles par l'intersection d'un tore, d'un cylindre et d'un cône, Archytas situe explicitement le problème dans le domaine de l'action circulaire « polyphonique » multiplement connexe. On peut remarquer, dans son commentaire classique sur la construction d'Archytas, comment le géomètre Eudème met l'accent sur l'*action verbale* : *« Soit les deux longueurs données OA [= a] et b ; il est demandé de construire deux moyennes proportionnelles entre a et b. Tracez le* *cercle OBA de diamètre OA où OA est la plus grande [des deux longueurs] ; inscrivez OB [en tant que corde du cercle] de longueur b, et prolongez-la pour rencontrer en C la tangente du cercle en A. [...] Imaginez qu'un demi-cylindre s'élève perpendiculairement sur le demi-cercle OBA, et que sur OA est dressé perpendiculairement un demi-cercle reposant sur la [base] du demi-cylindre. Quand on déplace ce demi-cercle de A vers B, l'extrémité O du diamètre restant immobile, il coupera la surface cylindrique lors de son mouvement et y tracera ainsi clairement une certaine courbe. [Ce dernier mouvement génère une section du tore, NdA.] Puis, si OA reste fixe et si le triangle OCA pivote autour de OA dans un mouvement inverse à celui du demi-cercle, cela produira une surface conique au moyen de la ligne OC qui, lors de son déplacement, rencontrera la courbe tracée sur le cylindre en un point particulier P. [...] »*

Quel contraste entre cette conception polyphonique de la géométrie et l'effet soporifique que produit sur notre esprit la « théorie des ensembles » contemporaine ! Dans la construction d'Archytas, P n'apparaît pas comme l'intersection d'« ensembles de points » statiques, mais comme le lieu d'un *événement* physique dont le processus de génération nécessite trois (ou plutôt six) degrés d'action simultanés. Archytas a conçu le processus de telle manière que l'événement ainsi produit possède exactement les relations « projectives » requises, en particulier les deux « moyennes proportionnelles » requises OQ et OP, où Q est la projection de P – tel que construit ci-dessus – sur le plan du cercle d'origine OBA.

Toutefois, avant d'essayer de réaliser la construction d'Archytas par vous-même, examinons le cas plus simple de la relation entre la moyenne géométrique et l'action circulaire.

Proportions harmoniques et action circulaire

La rotation circulaire fournit le cas le plus simple et le plus caractéristique pour générer, en tant que « projections » résultant d'actions d'ordre supérieure, des proportions harmoniques entre ce qui semble être des grandeurs scalaires (des segments de droites, par exemple).

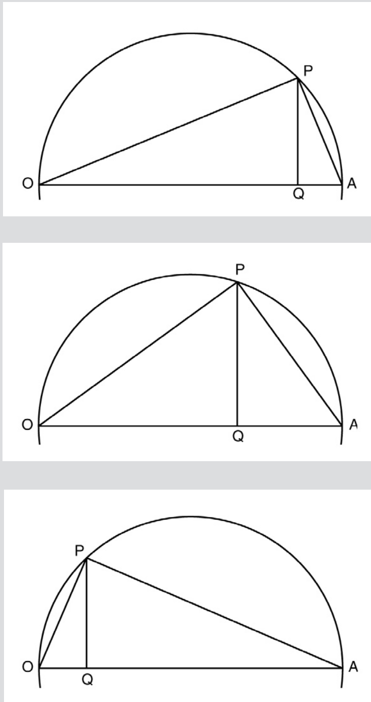


Figure 1.

Construisons un cercle avec un diamètre donné OA. Un point P se déplaçant le long du cercle entre O et A fera apparaître tout un ensemble de proportions harmoniques invariantes de la manière suivante (**figure 1**). En reliant le point P aux extrémités du diamètre, O et A, on produit un triangle OPA dont la forme change avec la position de P mais dont l'angle en P est toujours droit. Ensuite, projetons perpendiculairement P sur la ligne OA, et nommons le point de projection Q. A l'évidence, le triangle OPQ est aussi rectangle (angle droit en Q), et il partage un angle en O avec le triangle rectangle d'origine OPA. Les deux triangles restent donc constamment similaires lors du mouvement de P, et les rapports correspondants de leurs côtés restent égaux, en particulier OQ : OP = OP : OA. Cela revient à dire que la longueur OP est la *moyenne géométrique* entre OQ et OA. En inversant le procédé, nous pouvons construire la moyenne géométrique de n'importe quelles longueurs données OA et OQ en utilisant le cercle. Vous n'avez qu'à projeter le point Q sur la circonférence du cercle pour obtenir le point P.

La moyenne géométrique était aussi connue dans la Grèce antique sous le nom de « moyenne unique entre deux extrêmes ». Doubler un *carré* requiert la construction d'une telle moyenne (géométrique) entre 1 et 2. Cependant, pour doubler un cube, nous avons besoin de *deux* moyennes entre 1 et 2 ou, en d'autres termes, d'une série de proportions simultanées sous la forme

1 : OQ = OQ : OP = OP : 2.

Alors, la construction du cercle telle que nous l'avons faite, appliquée à un cercle de rayon OA = 2, génère déjà la « moitié » de la proportion requise, à savoir

OQ : OP = OP : 2.

En réfléchissant à cela, la stratégie suivante s'impose d'elle-même : introduisons un *second* degré de rotation générant « l'autre moitié » de la double proportion, c'est-à-dire 1 : OQ = OQ : OP. Il nous faudra alors combiner d'une manière ou d'une autre les deux actions circulaires afin qu'elles produisent un *événement* lors duquel les deux conditions se réalisent *simultanément* ; cela nous donnera la double moyenne recherchée : 1 : OQ = OQ : OP et en même temps OQ : OP = OP : 2.

Mettre en place cette stratégie nous mène vers une construction pour la double moyenne, bien qu'elle soit critiquable. Nous vous la présentons rapidement car elle ouvre la voie de l'action multiplement connexe.

Une avancée préliminaire

Pour obtenir la proportion 1 : OQ = OQ : OP de la manière suggérée, nous aurions besoin d'un *second* cercle de diamètre OP, remplissant les conditions suivantes (**figure 2**) :

a) Le point Q (projection de P sur le diamètre du premier cercle) doit aussi être un point du second cercle.

b) Q doit se projeter en B sur le second diamètre OP de telle sorte que la distance OB ait la longueur requise 1.

Un petit peu de géométrie nous montre que la condition (a) est

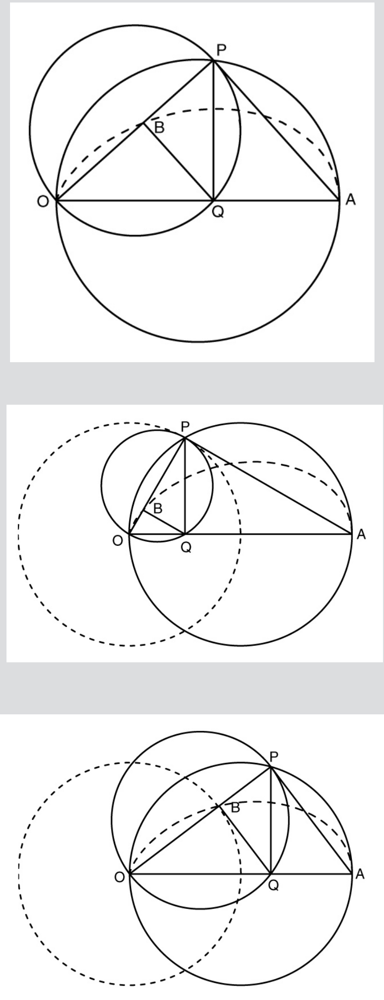


Figure 2.

remplie pour *toutes* les positions de P sur le premier cercle mais que la condition (b) n'est remplie que pour *une seule* position de P (plus son image symétrique). Comment pourrions-nous générer ce lieu en tant qu'*événement* constructible ?

Simple, en principe ! Imaginons que l'on construise, pour chaque position de P (celui-ci se déplaçant sur le premier cercle), un cercle correspondant autour du diamètre OP. En procédant de la sorte, nous obtenons une *famille* continue de cercles dont le diamètre OP change d'angle et de longueur selon le mouvement de P.[3] Pour chaque cercle de ce type, générons les points correspondants Q et B, comme indiqué en (a) et (b) ci-dessus. Quand P traverse la circonférence du premier cercle, le mouvement de la courbe B traverse une certaine courbe à l'intérieur du cercle. Traçons maintenant un troisième cercle de rayon 1 autour du point O. Il est facile de voir que la courbe tracée par B coupera le troisième cercle en un certain endroit. En ce point, OB = 1, les conditions (a) et (b) sont remplies, et pour les positions correspondantes de P et Q les proportions désirées 1 : OQ = OQ : OP sont établies. Une fois relié avec la proportion OQ : OP = OP : 2, cela détermine OQ et OP à être les deux moyennes proportionnelles entre 1 et 2. Le problème est résolu !

Toutefois, on pourrait objecter, non sans raison, qu'aucune véritable méthode n'est présentée permettant de *tracer* réellement la courbe définissant les points B. Il va de soi qu'il n'est pas suffisant de simplement demander : « Marquez, sur chaque cercle appartenant à la famille infinie de cercles, le point correspondant B. » En effet, si nous commencions à marquer les cercles et les points un par un, nous n'aurions jamais plus qu'un ensemble discret et nous n'arriverions jamais à une courbe continue.[4]

D'un autre côté, il est possible avec un peu d'ingéniosité de construire un *mécanisme physique* relativement simple permettant de tracer la courbe requise, laquelle sera obtenue par le mouvement de P sur la circonférence du cercle d'origine. La méthode ainsi développée est similaire à la tactique utilisée par Nicomède quand il dessina mécaniquement une courbe – la *conchoïde* – pour doubler le cube.

Revenons à Archytas

A partir de ce que nous avons vu, nous pouvons mieux apprécier la percée singulière d'Archytas, dépassant largement la méthode « ad hoc » ci-dessus. Pour résoudre ce problème, il découvrit en effet une approche d'un ordre supérieur, anticipant de plus de deux millénaires les travaux de Gauss de 1799 sur le domaine complexe !

En partant du premier cercle de diamètre OA, Archytas applique un nouveau degré de rotation pour générer un *tore*. De cette façon, Archytas nous mène implicitement dans un *univers entièrement nouveau*. Au lieu d'essayer de bâtir la solution « du bas vers le haut », comme on a essayé ci-dessus, nous pouvons maintenant procéder « du haut vers le bas ».

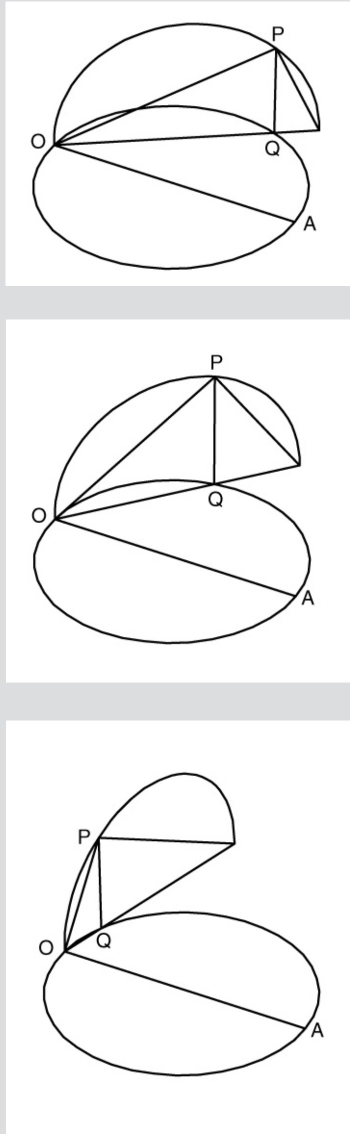


Figure 3.

Le tore en question est obtenu par la rotation du cercle original (de diamètre OA = 2) dans le plan vertical (avec OA fixe), puis par la rotation de ce cercle autour de l'axe vertical passant par le point O. Pour tout point P sur le tore, la coupe verticale par l'axe du tore est un cercle de diamètre 2. Si Q est la projection de P sur le diamètre horizontal de ce cercle, la proportion OQ : OP = OP : 2 sera valable, et cela comme relation invariante pour *toute la surface* du tore (**figure 3**).

Signalons que Q se trouve dans le

plan horizontal du cercle original et coïncide avec la projection verticale de P sur ce plan.

Il est maintenant aisé d'introduire des nouveaux degrés d'action circulaire, engendrant de nouvelles relations harmoniques. Une voie choisie par Archytas consiste à couper le tore avec le cylindre vertical dont la base est le cercle original de diamètre OA (de longueur 2). Tout point P, sur l'intersection du tore et du cylindre, appartient automatiquement à *deux* cercles :

a) La coupe verticale du tore par P, décrite précédemment, produisant la relation OQ : OP = OP : 2.

b) La coupe horizontale du cylindre en P (**figure 4**).

Si l'on projette cette coupe circulaire du cylindre sur le plan ho-

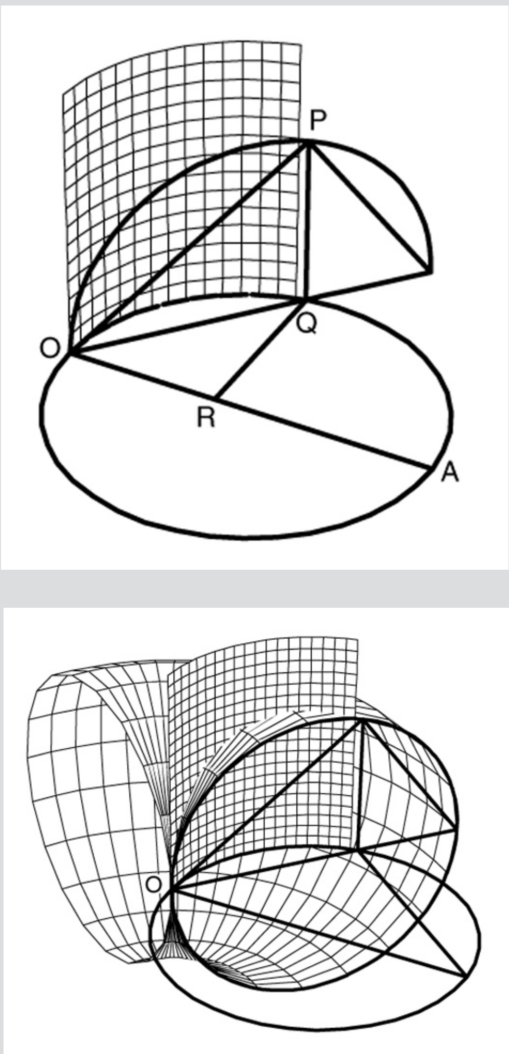
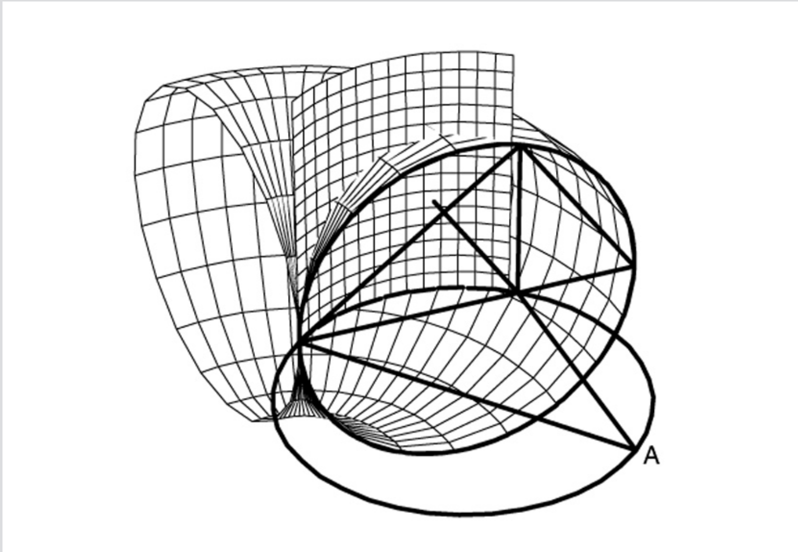
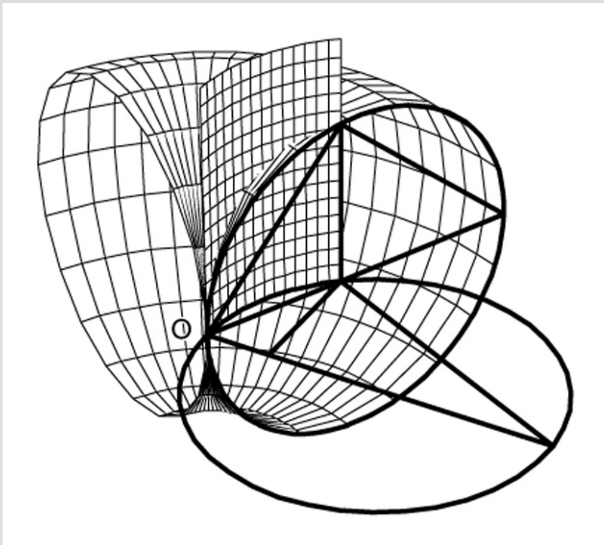


Figure 4.





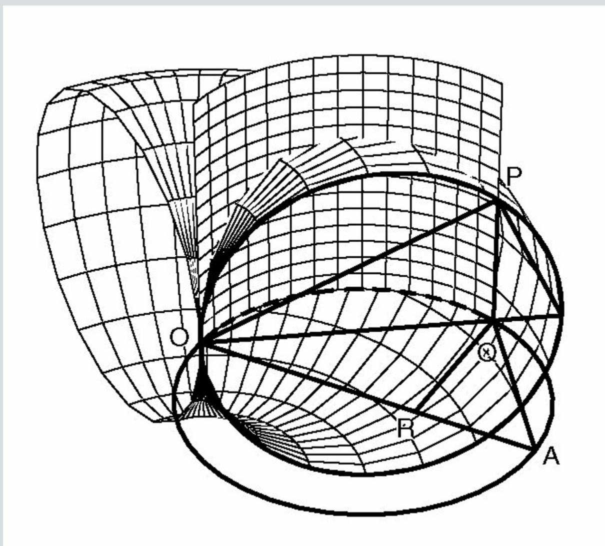


Figure 5.

rizontal original, alors P se projette sur le point Q susmentionné, et la coupe cylindrique se projette sur un cercle dans le plan, avec Q sur sa circonférence. Q produit ensuite un *second* ensemble de relations harmoniques sous la forme OR : OQ = OQ : 2, où R est la projection de Q sur OA (**figure 5**).

Rappelons que nous essayons de créer un événement au cours duquel la relation 1 : OQ = OQ : OP est établie. Serait-il possible, en générant un *troisième* degré d'action, de lier OR avec OP de sorte que cette nouvelle relation découle automatiquement de la précédente ?

D'abord, notons que OR : OQ = OQ : 2 est équivalent à la relation inverse 2 : OQ = OQ : OR. Qu'est-ce que cela nous apprend sur la proportion 1 : OQ ? A l'évidence, le facteur de proportionnalité nécessaire pour transformer la longueur unité 1 en longueur OQ, est deux fois plus grand que le facteur transformant 2 en OQ. En appliquant ce facteur doublé à OQ, nous obtiendrons 2 · OR plutôt que OR. Alors, de 2 : OQ = OQ : OR suit

1 : OQ = OQ : (2 · OR)

Pour obtenir la proportion désirée 1 : OQ = OQ : OP, nous aurions besoin que OP soit égal à 2. Quel événement produirait cette relation additionnée aux autres ?

Considérons comment jusqu'à présent sont reliés OP et OR l'un à l'autre dans notre construction. C'est très simple, comme chacun peut le constater : R est, d'une part, la projection de Q sur OA et, d'autre part, la projection perpendiculaire directe de P sur OA, c'est-à-dire le point par où le plan vertical passant par P, tracé perpendiculairement à l'axe OA, intersecte cet axe. En soi (mis à part les autres contraintes sur P), l'exigence selon laquelle OP égale à deux fois OR revient à dire que P appartient à un certain *cône* dont le sommet est O et l'axe est OA (**figure 6**). Le cône dont on a besoin peut facilement être construit ; ceci est, en fait, l'étape préliminaire qu'Eudème décrit. L'événement requis est donc la triple intersection du tore, du cylindre et du cône (**figure 7**).

Nous sommes arrivés à la construction d'Archytas. Cette fois non pour la vérifier mais pour la maîtriser par nous-même. ■

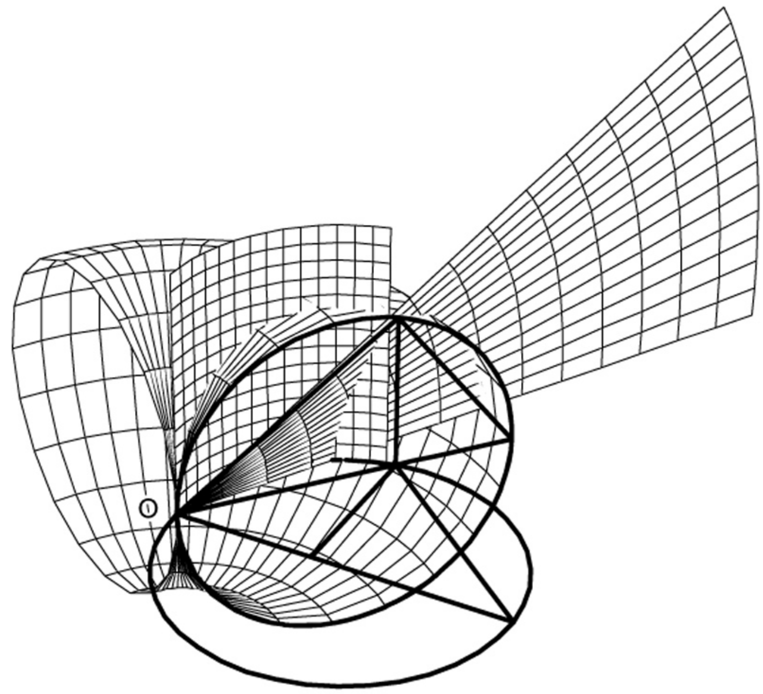


Figure 7.

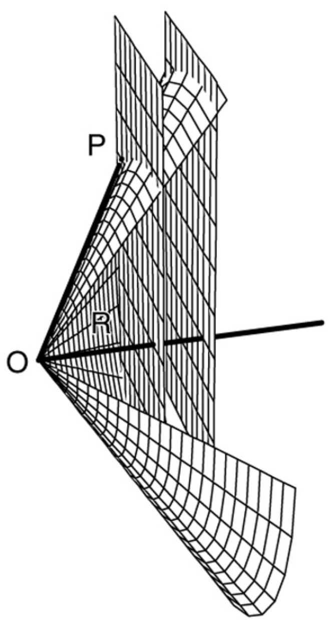


Figure 6.

Notes

1. La chaînette, par exemple, qui nécessite de la *substance physique* pour être générée, ne pourrait pas exister dans le monde de Descartes, Lagrange et Euler !

2. Voir http://www-gap.dcs.st-and.ac.uk/~history/HistTopics/Doubling_the_cube.html#s5.

3. Les lecteurs alertes remarqueront ici les traces de l'*action conique*, qui deviendra plus explicite chez Archytas pour finalement émerger en pleine clarté dans le domaine complexe de Gauss.

4. Pour des raisons similaires, les mathématiques telles qu'on les conçoit généralement ne peuvent pas représenter d'une vraie continuité. Elles peuvent au mieux décrire certains *résultats* de l'action continue. L'orientation de développement des mathématiques telle qu'elle a été établie par Leibniz dans son élaboration originale du calcul différentiel, et poursuivie par Riemann, est la seule qui puisse nous fournir une piste pour faire progresser les mathématiques afin que celles-ci représentent de façon toujours plus adéquate la réalité de l'action continue dans l'univers. Le cas de la chaînette est exemplaire.