Le Théorème fondamental de l'algèbre de Carl Gauss

1. LA DÉCLARATION D'INDÉPENDANCE DE GAUSS

BRUCE DIRECTOR

En septembre 1798, après trois ans d'études qu'il avait lui-même organisées, le grand mathématicien Carl Gauss, alors âgé de 21 ans, quitta l'université de Göttingen sans diplôme. Il retourna dans sa ville natale de Brunswick, pour y commencer la rédaction de ses *Disquisitiones Arithmeticae*. Sans perspective de trouver un emploi, il espérait continuer à recevoir sa bourse d'étudiant. Après avoir vécu à crédit pendant plusieurs mois, Gauss apprit du Duc que sa bourse serait maintenue sous réserve qu'il obtienne le doctorat en philosophie – une tâche que Gauss désirait retarder car elle le détournerait de ses travaux. Néanmoins, il saisit cette opportunité pour déclarer son indépendance par rapport au monde des mathématiques déductives, en soumettant à la faculté de l'université d'Helmstedt une thèse sur une nouvelle preuve du Théorème fondamental de l'algèbre. Quelques mois plus tard, il recevait son doctorat sans avoir dû se présenter à l'examen oral.

Précisant son intention à Wolfgang Bolyai, son ancien camarade de promotion, Gauss écrit : *« Le titre [théorème fondamental] indique clairement l'objectif de cet essai. Cependant, seul un tiers de l'ensemble correspond à cet objectif ; le reste contient principalement l'histoire et une critique des travaux faits sur le même sujet par d'autres mathématiciens (c'est-à-dire d'Alembert, Bougainville, Euler, de Foncenex, Lagrange et les encyclopédistes [...] lesquels n'auraient sans doute pas apprécié celle-là), avec des commentaires nombreux et variés sur l'esprit superficiel si présent dans les mathématiques d'aujourd'hui. »*

Les travaux de Gauss consistaient essentiellement à défendre et à approfondir un principe qui remonte à Platon, selon lequel ce n'est que l'action physique, et non pas un ensemble de suppositions arbitraires, qui définit notre notion de grandeur. Tout comme Platon, Gauss avait compris qu'il ne suffisait pas d'énoncer simplement cette découverte mais qu'il fallait aussi lancer une polémique contre les erreurs aristotéliciennes si répandues parmi ses contemporains.

Cinquante ans plus tard, Gauss déclare à propos de sa dissertation : *« La démonstration est présentée en utilisant des expressions empruntées à la géométrie de position ; de cette manière, on obtient la plus grande précision et la plus grande simplicité. Fondamentalement, le contenu essentiel de l'ensemble de l'argument appartient à un domaine supérieur, indépendant de l'espace [c'est-à-dire un domaine anti-euclidien, NdA], dans lequel les concepts abstraits et généraux de grandeurs sont étudiés comme des grandeurs connectées par continuité : un domaine qui, jusqu'à présent, n'a été que peu développé et dans lequel on ne peut se passer d'un langage emprunté à des images spatiales. »*

Mon intention est de donner ici un résumé de l'histoire de cette idée et de son développement par Gauss. Ce résumé ne prétend pas être exhaustif mais il cherche à préciser les étapes qui devraient servir de base pour des discussions pédagogiques.

Grandeur multiplement étendue

Un concept physique de grandeur avait déjà été développé par Platon et ses associés, exprimé sous sa forme la plus explicite dans les dialogues *Ménon*, *Théétète* et *Timée*. Platon et ses associés ont démontré ce concept d'une manière pédagogique en utilisant les paradoxes qui surviennent dès que l'on considère l'unicité des cinq solides réguliers, ainsi qu'en travaillant sur les problèmes qui s'y rattachent comme le doublement de la ligne, du carré et du cube. Comme Platon l'explique, chaque espèce d'action engendre une espèce différente de grandeur. Il désigne ces grandeurs par le terme grec de *dunamais*, un terme similaire à l'utilisation par Leibniz du mot *Kraft*, que l'on traduit en français par *puissance*.

En d'autres termes, une grandeur linéaire a la *puissance* de doubler une ligne, alors que seule une grandeur d'une espèce différente a la *puissance* de doubler un carré et qu'une espèce encore différente a la *puissance* de doubler un cube (**figures 1a-1c**). Dans les termes de Bernhard Riemann, ces grandeurs

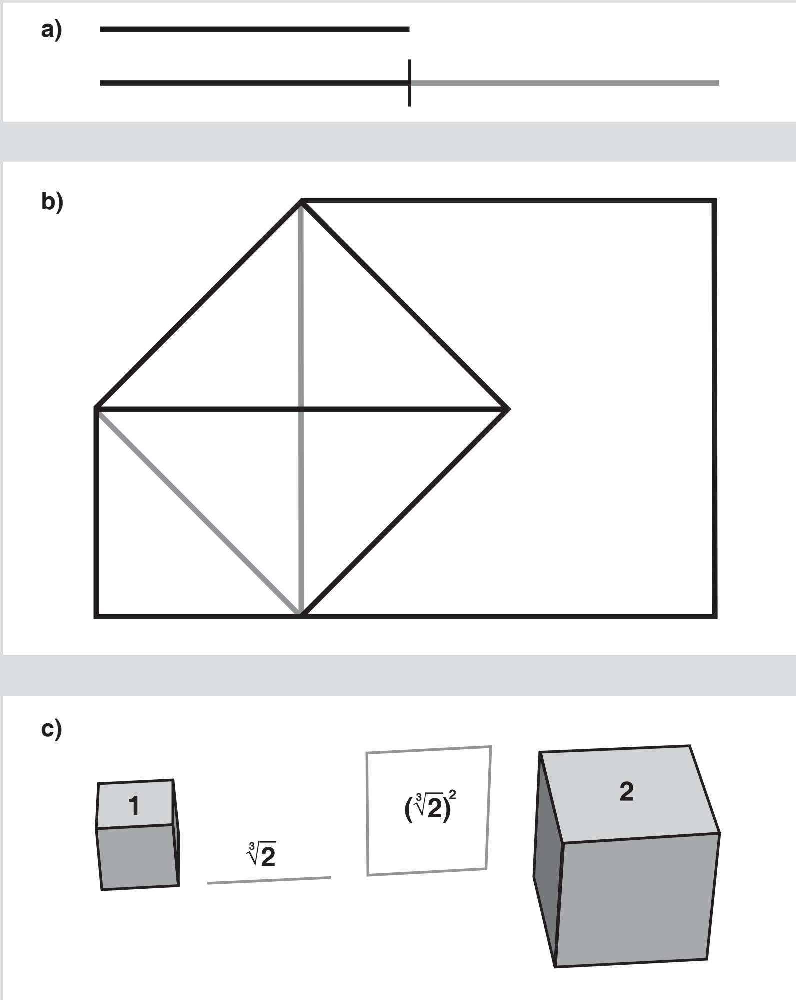

Figure 1. **a) La grandeur qui a la « puissance » de doubler la longueur d'une ligne est produite par une simple extension de la ligne.**
b) La grandeur qui a la « puissance » de produire un carré d'une surface double est la diagonale du petit carré. On l'appelle « moyenne géométrique » des deux carrés. La grandeur de la longueur de la diagonale est incommensurable à la grandeur de la longueur de la ligne.
c) La grandeur qui a la « puissance » de produire un cube dont le volume est double est différente de la grandeur qui a la « puissance » de doubler un carré ou une ligne. Cette grandeur est la plus petite de deux moyennes géométriques entre deux cubes. Cette grandeur est incommensurable aux deux puissances inférieures.

sont qualifiées respectivement de simplement étendue, doublement étendue et triplement étendue. Platon et ses associés insistent sur le fait que des grandeurs de moindre extension n'ont pas la capacité d'engendrer des grandeurs d'une extension supérieure. Cette constatation donne l'idée d'une succession de « puissances supérieures ».

N'essayons pas ici de penser selon les termes d'une utilisation déductive du mot *dimension*. Bien que le mot *dimension* soit parfaitement correct, il est malheureusement trop souvent associé, dans le langage moderne, au concept kantien d'espace euclidien formel, selon lequel l'espace est considéré comme une combinaison de trois dimensions indépendantes simplement étendues.

Pensons plutôt en termes de *grandeur physique*. Une ligne est produite par une action physique de simple extension. Une surface peut se délimiter par des lignes mais elle n'est pas faite de lignes ; par contre, une surface est, de manière irréductible, doublement étendue. De même, un volume peut être délimité par des surfaces, qui à leur tour sont délimitées par des lignes, mais il est, de manière irréductible, triplement étendu.

Ainsi, une ligne, un carré ou un cube unitaires peuvent tous être caractérisés par le nombre Un, mais chaque Un est une espèce d'une puissance différente.

Les cercles de Platon ont également insisté sur le fait que cette succession de grandeurs de puissances supérieures était engendrée par une succession de différents types d'action. Ainsi, les grandeurs simplement étendues étaient produites par l'*action linéaire*, les grandeurs doublement étendues par l'*action circulaire* et les grandeurs triplement étendues par l'*action circulaire étendue*, telle que les actions de rotation qui produisent le cône, le cylindre et le tore. Ceci est illustré de manière pédagogique par Platon dans le *Ménon*, en ce qui concerne les grandeurs doublement étendues, et dans le *Timée*, en ce qui concerne l'unicité des cinq solides réguliers et le problème du doublement du cube. Archytas, un ami de Platon, a montré que la grandeur par laquelle le cube est doublé, n'est pas engendrée par l'action circulaire mais par l'action circulaire étendue (**figures 2a-2b**).

C'est Apollonios de Perga (262-200 avant J.-C.) qui donna un exposé complet de la génération de grandeurs de puissances supérieures dans ses travaux sur les *Coniques*. Son approche consistait à étudier de manière exhaustive la génération de grandeurs doublement et triplement étendues, qu'il distinguait en lieux plans (cercle et ligne) et lieux solides (ellipse, parabole, hyperbole).

Comme Abraham Gotthelf Kästner l'indique dans son *Histoire des mathématiques* (1797), la recherche sur les relations entre puissances supérieures a donné naissance à ce que l'on a désigné par le mot arabe *algèbre* et, à partir de Gottfried Leibniz (1646-1716), par *analyse*. Ici, les relations entre les grandeurs de la puissance deuxième (carrés) et de la puissance troisième (cubes) ont été respectivement étudiées sous la forme d'équations algébriques quadratiques et cubiques. Cependant, les équations d'un degré supérieur à 3 ont pris une signification for-

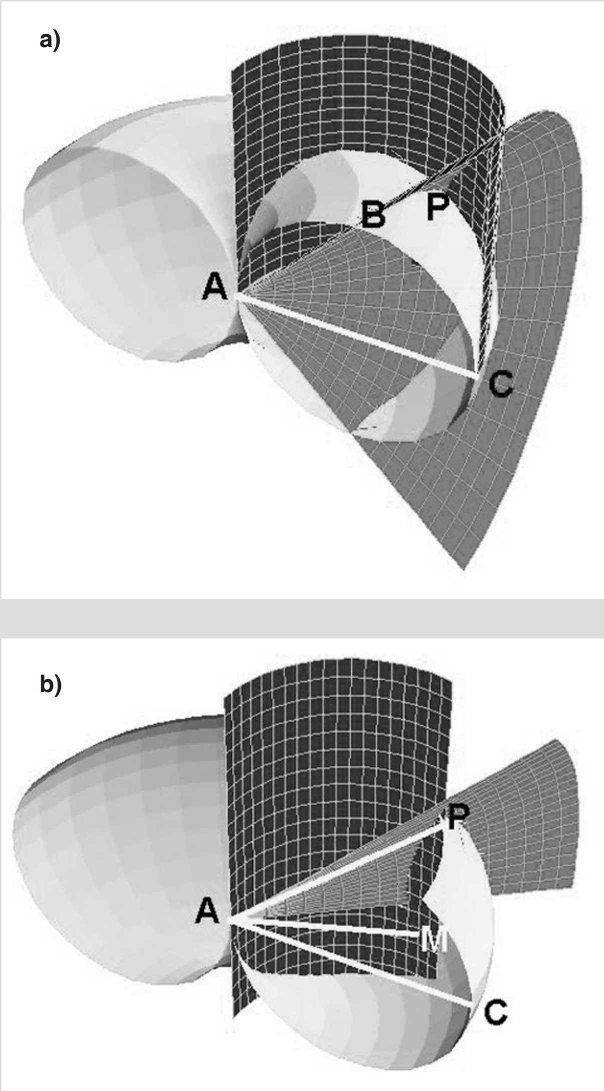

Figure 2. **a) Archytas a développé une construction permettant de trouver deux moyennes géométriques entre deux grandeurs. La longueur la plus grande est AC, le diamètre d'un cercle. Ce cercle tourne autour de A pour former un tore. Un cylindre est ensuite construit perpendiculairement au tore, dont le diamètre est également AC. La longueur la plus courte AB est tracée comme étant une corde d'une section transversale du tore. AB est prolongée jusqu'à intersecter le cylindre, formant ainsi un triangle qui, lorsqu'il tourne autour de son côté AC, produit un cône. Les trois surfaces ont pour intersection le point P. b) Il s'agit d'une coupe de la figure 2a. M est déterminé en abaissant une perpendiculaire au plan de symétrie du tore passant par P ; ce plan contient M et AC. Archytas a montré que AM est la plus petite des moyennes entre AB et AC, et AP est la plus grande. Ce qui se traduit par : AB:AM::AM:AP::AP:AC. Donc, si AB = 1 et AC = 2, alors AM = $\sqrt{3}(2)$ et AP = $(\sqrt{3}(2))^2$.**

melle mais n'avaient pas la relation physique que l'on pouvait trouver dans les équations quadratiques et cubiques.

Jérôme Cardan (1501-1576) et plus tard Leibniz ont montré qu'il y avait un « trou » dans toutes les formes d'équations algébriques, comme on pouvait le constater avec l'apparition de racines carrées de nombres négatifs dans les solutions de telles équations. Scrutant à travers ce « trou », Leibniz s'est rendu compte que l'algèbre ne pouvait rien nous apprendre sur la physique mais qu'un principe général de physique sous-tendait toutes les équations algébriques de quelque degré que ce soit.

Ecrivant vers 1675 une lettre à Christiaan Huygens (1629-1695) sur les racines carrées de nombres négatifs, Leibniz ajoute qu'il avait inventé une machine qui produisait exactement l'action requise de ce principe général de physique : *« Il me semble qu'après cet instrument, il ne reste presque rien de plus à désirer pour l'usage que l'algèbre peut ou pourra avoir en mécanique et en pratique. On peut penser que ceci était le but de la géométrie des anciens (au moins celui d'Apollonios) et l'objectif du* loci *qu'il avait introduit, car il a reconnu que quelques lignes déterminent instantanément ce que de longs calculs dans les nombres ne peuvent accomplir qu'après un long travail capable de décourager le plus travailleur. »*

Bien qu'il ait trouvé l'action physique qui engendre une succession de puissances supérieures, Leibniz laissa cependant ouverte la question de savoir quelle action physique produit les racines carrées de nombres négatifs.

La preuve de Gauss du Théorème fondamental de l'algèbre

A l'époque où il quitta Göttingen, Gauss avait déjà développé son concept de la réalité physique des racines carrées de nombres négatifs, qu'il avait appelées *nombres complexes*. Adoptant la méthode de la métaphore de la caverne de Platon dans *La République*, Gauss considérait ses nombres complexes comme étant des ombres reflétant un complexe d'actions physiques (action agissant sur l'action). Cette action complexe reflétait une puissance plus grande que l'action triplement étendue qui caractérise la variété de l'espace visible.

L'apport exceptionnel de Gauss réside dans sa conception d'une métaphore à partir de laquelle il représente ces formes supérieures d'actions physiques, afin que ces actions puissent être représentées, par leurs reflets, dans le domaine visible.

Dans sa dissertation de 1799, Gauss a brillamment choisi de développer sa métaphore, d'une manière polémique, sur le flanc le plus vulnérable de ses opposants – celui des équations algébriques. Tout comme Leibniz, Gauss rejeta l'approche déductive consistant à étudier les équations algébriques dans leurs propres termes, insistant au contraire sur le fait que c'était l'action physique qui déterminait les caractéristiques des équations.

Un exemple simple aidera à illustrer ce point. Pensez à la signification physique de l'équation $x^2 = 4$. De toute évidence, x fait référence au côté d'un carré dont l'aire est égale à 4. Donc, 2 est une solution de cette équation. Pensez maintenant à la signification physique de l'équation $x^2 = -4$. D'un point de vue déductif formel, cette équation fait référence au côté d'un carré dont l'aire est égale à –4. Comment un carré pourrait-il avoir une aire égale à –4 ? Formellement, la seconde équation peut se résoudre en introduisant le nombre $2\sqrt{-1}$, ou 2i, qui lorsqu'il est élevé au carré donne –4. Toutefois, la question demeure : quelle est la signification physique de $\sqrt{-1}$?

Une réponse consiste à dire que $\sqrt{-1}$ n'a aucune signification physique et que l'équation $x^2 = -4$ n'a aucune solution. A cela, Euler et Lagrange ont ajouté le sophisme, amplement tourné en dérision par Gauss dans sa dissertation, selon lequel l'équation $x^2 = -4$ a une solution mais que celle-ci est impossible !

Gauss a démontré que $\sqrt{-1}$ a une signification physique, non pas dans le domaine visible des carrés mais dans le domaine cognitif du principe d'élever au carré.

Cela peut s'illustrer de manière pédagogique en dessinant un carré dont nous dirons que l'aire vaut 1. Tracez ensuite la diagonale de ce carré et tracez un nouveau carré utilisant cette diagonale comme côté. L'aire du nouveau carré sera 2. Répétez ensuite cette action pour engendrer un carré dont l'aire est 4 (**figure 3**).

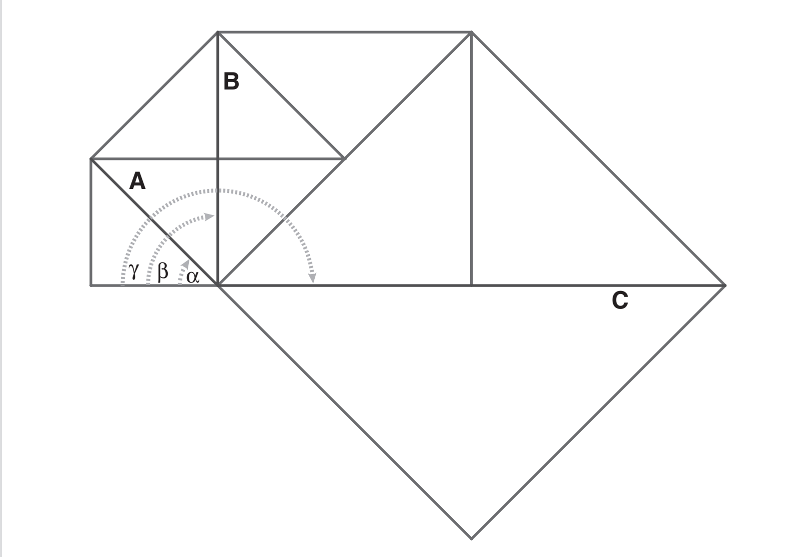

Figure 3. Le principe « d'élever au carré » se traduit par le doublement de l'angle de rotation et l'élévation au carré de la longueur. L'angle β est le double de l'angle α. L'angle γ est le double de l'angle β. De plus, la longueur de B est le carré de la longueur de A, et la longueur de C est le carré de la longueur de B.

Quel est le principe d'élever au carré tel que nous l'avons illustré ? L'action qui a engendré la grandeur qui a produit le carré dont l'aire est 2, est une rotation de 45° et une extension de longueur de 1 à $\sqrt{2}$. Pour produire le carré dont l'aire est 4, la rotation de 45° a été doublée à 90° et l'extension a été élevée au carré pour devenir 2. En répétant ce processus plusieurs fois, on voit que ce principe d'élever au carré peut être considéré comme l'action physique combinée de doubler une rotation et d'élever une longueur au carré. La racine carrée est simplement l'opération inverse, c'est-à-dire diviser par deux l'angle de rotation et extraire la racine carrée de la longueur.

Traçons maintenant un cercle et un diamètre, et appliquons cette action physique d'élever au carré à chaque point du cercle. Prenons chaque point du cercle et traçons le rayon reliant ce point au centre du cercle. Ce rayon forme un angle avec le diamètre que nous avons tracé. Pour « élever un point au carré », doublons l'angle entre le rayon et le diamètre, puis élevons la longueur au carré. En répétant cette action avec plusieurs points, nous constaterons bientôt que les points du premier cercle se projettent tous sur des points d'un autre cercle concentrique, dont le rayon est le carré du cercle original. Il se produit cependant quelque chose de curieux. Du fait que nous avons doublé l'angle chaque fois que nous avons élevé un point au carré, le cercle original va se projeter deux fois sur le cercle « au carré » ! (**figure 4**).

Il existe une illustration physique de ce processus. Prenons un barreau aimanté et faisons tourner une boussole autour de l'aimant. Quand la boussole se déplace du pôle nord au pôle sud de l'aimant (180°), son aiguille effectue une rotation complète (360°). Lorsqu'elle se retourne du pôle sud au pôle nord, l'aiguille effectue une autre rotation complète. On peut dire en quelque sorte que l'aimant « élève la boussole au carré » (**figure 5**).

Gauss associait ses nombres complexes à ce type d'action physique composée (une rotation combinée avec une extension). Il les a rendues visibles, d'une manière métaphorique, sous la forme d'action spirale projetée sur une surface. Chaque point de cette surface représente un nombre complexe. Chaque nombre désigne une combinaison unique d'une rotation et d'une extension. Le point de l'origine de l'action désigne une singularité physique, au même titre que le point le plus bas d'une chaînette, ou les pôles de la Terre en rotation, ou le centre de l'aimant.

Dans l'exemple ci-dessus, le cercle original devient un cercle unité dans le domaine complexe. Le centre du cercle est l'origine, désigné par

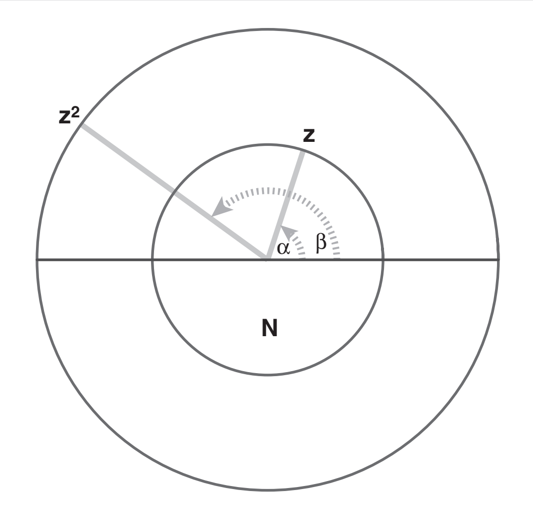

Figure 4. **Le principe général « d'élever au carré » peut être réalisé sur un cercle. z^2 est produit à partir de z en doublant l'angle α pour obtenir l'angle β et en élevant au carré la distance de z au centre du cercle.**

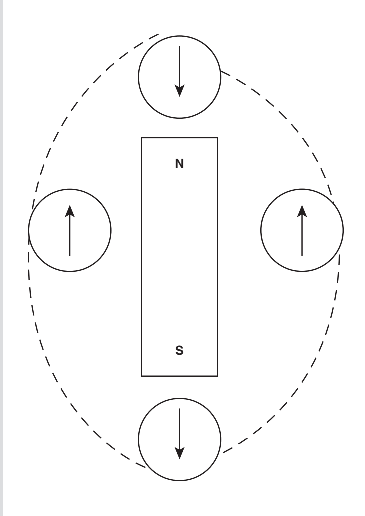

Figure 5.

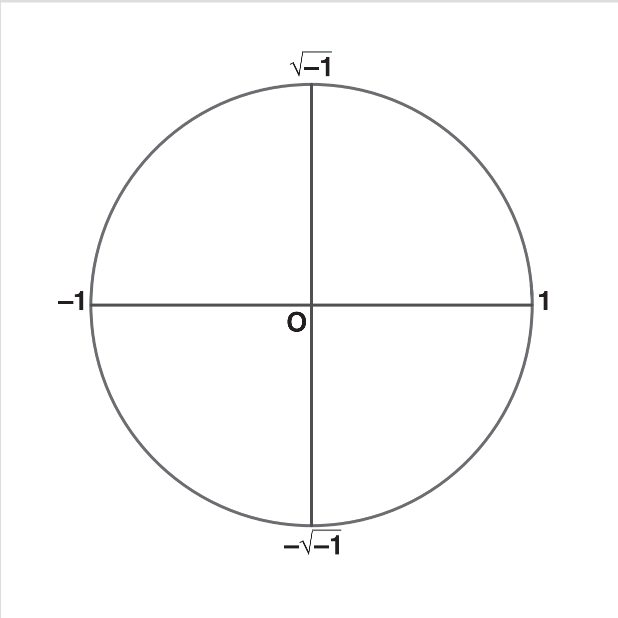

Figure 6.

O ; les extrémités du diamètre sont désignées par 1 et –1. On trouve la racine carrée de –1 en divisant par deux la rotation entre 1 et –1, et en extrayant la racine carrée du rayon. En réfléchissant un peu, on se rend compte que $\sqrt{-1}$ et $-\sqrt{-1}$ sont représentés par les points de la circonférence qui se trouvent à mi-chemin entre 1 et –1 (**figure 6**).

Gauss a démontré que toute puissance algébrique, de quelque degré que ce soit, lorsqu'elle est projetée sur son domaine complexe, peut se représenter par une action similaire à celle que l'on vient de montrer pour l'élévation au carré. Par exemple, l'action d'élever au cube un nombre complexe s'obtient en triplant l'angle de rotation et en élevant la longueur au cube. On projette ainsi trois fois le cercle original sur un cercle dont le rayon est le cube du rayon du cercle original. L'action associée à la puissance biquadratique (quatrième degré) correspond à la multiplication par quatre de l'angle de rotation et à l'élévation au carré du carré de la longueur. On projette ainsi quatre fois le cercle original sur un cercle dont le rayon est élevé deux fois au carré, et ainsi de suite pour toutes les puissances supérieures.

Bien que les variétés d'action associées à ces puissances supérieures existent en dehors de la variété triplement étendue de l'espace visible, Gauss a réussi, dans son domaine complexe, à rendre visible la caractéristique d'action qui les produit.

2. FAIRE MONTER L'INVISIBLE À LA SURFACE

Lorsqu'en écrivant à Wolfgang Bolyai en 1798, Carl Friedrich Gauss critiquait l'*« esprit superficiel »* qui régnait dans les mathématiques d'alors, il parlait dans un sens littéral – et cela reste valable aujour-d'hui. Comme à notre époque, il était devenu très populaire chez les « savants » d'ignorer, et même de tourner en dérision, tout effort visant à chercher des principes physiques universels, restreignant ainsi le domaine de la recherche scientifique à la tâche apparemment plus pratique de décrire seulement ce qui se trouve à la surface. Ironiquement, comme Gauss l'a démontré dans sa dissertation doctorale de 1799 sur le Théorème fondamental de l'algèbre, ce qui se trouve à la surface n'est révélé que si l'on sait ce qu'il y a en dessous.

La méthode de Gauss n'était pas nouvelle. Elle a été rendue célèbre par la métaphore de la caverne de Platon et elle a été développée ultérieurement par la mise en application par Kepler de la méthode de Nicolas de Cues de la *docte ignorance*. Pour chacun d'entre eux, le travail du scientifique consiste à rendre visible les principes physiques sous-jacents qui ne peuvent pas être vus directement – l'invisible qui guide le visible.

A titre d'exemple, considérez la découverte par Pierre de Fermat du principe selon lequel la lumière réfractée suit le chemin de moindre temps, au lieu de suivre le chemin de moindre distance comme la lumière réfléchie. Le principe de moindre distance est un principe qui se trouve « à la surface » et qui peut être démontré dans le domaine visible. Par contre, le principe de moindre temps se trouve pour ainsi dire « en dessous » du visible, et ne peut être mis en lumière que dans l'esprit. Avec un peu de réflexion, on se rend compte que le principe de moindre temps était déjà présent, contrôlant de manière invisible le principe de moindre distance. Dans le langage de Platon, nous dirions que le principe de moindre temps est d'une « puissance supérieure » à celle du principe de moindre distance.

La découverte de Fermat est une référence utile pour saisir le concept gaussien de domaine complexe. Gauss a lui-même déclaré sans équivoque que ce concept n'a rien à voir avec le concept formel superficiel d'Euler des nombres *« impossibles »* (un fait ignoré de la plupart des « experts » actuels en mathématiques). Au contraire, le concept de Gauss de domaine complexe, tout comme le principe de moindre temps de Fermat, fait monter à la surface un principe qui était déjà présent mais caché à la vue.

Gauss a encore souligné, lorsqu'il a retravaillé sur sa dissertation de 1799 cinquante ans plus tard, que le concept de domaine complexe est un « domaine supérieur », indépendant de tout concept d'espace *a priori*. Cependant, c'est un domaine *« dans lequel on ne peut se passer d'un langage emprunté à des images spatiales »*.

Le problème que Gauss se posait, tout comme Leibniz avant lui, était de trouver un principe général qui caractériserait ce que l'on appelait grandeurs « algébriques ». Celles-ci, initialement associées à l'extension des lignes, des carrés et des cubes, relevaient du concept platonicien de *dunamais* ou *puissance*.

Leibniz a démontré qu'alors que le domaine de toutes les grandeurs « algébriques » consistait en une succession de puissances supérieures, l'ensemble du domaine algébrique était lui-même dominé par un domaine d'une puissance encore supérieure, que le savant de Hanovre appela *« transcendantal »*. La relation entre le domaine inférieur des grandeurs algébriques et le domaine supérieur non algébrique des grandeurs transcendantales, est reflétée dans ce que Jacques Bernoulli découvrit au sujet de la spirale équiangle (**figure 7**).

Par la suite, Leibniz et Jean Bernoulli (le frère de Jacques) montrèrent que ce domaine transcendantal supérieur n'existe pas comme principe purement géométrique, mais qu'il trouve son origine dans l'action physique associée à la courbe formée par une chaînette suspendue par ses deux extrémités (**figure 8**). Ainsi, l'univers physique lui-même montre que les grandeurs « algébriques » associées à l'extension ne sont pas engendrées par extension. Les grandeurs algébriques sont engendrées par un principe physique qui, au-delà de la simple extension, existe dans le domaine transcendantal et supérieur.

Dans ses preuves du Théorème fondamental de l'algèbre, Gauss a montré que, bien que ce principe physique transcendantal soit en dehors du domaine visible, il projette néanmoins une ombre qui peut être rendue visible dans ce que Gauss appelle le domaine complexe.

Comme nous l'avons vu ci-dessus, la découverte d'un principe général pour les grandeurs « algébriques » a été découvert en regardant à travers le « trou » représenté par les racines carrées de nombres négatifs, qui pouvaient apparaître comme des solutions d'équations algébriques, mais à qui il manquait apparemment une signification physique. Par exemple, dans l'équation algébrique $x^2 = 4$, « x » signifie le côté d'un carré dont l'aire vaut 4, alors que dans l'équation $x^2 = -4$, « x » signifie le côté d'un carré dont l'aire vaut –4, une impossibilité apparente. Pour le premier cas, il est simple de voir qu'une ligne dont la longueur est 2 peut être le côté d'un carré dont l'aire vaut 4. Cependant, du point de vue de l'équation algébrique, une ligne dont la longueur est –2, produit également le carré désiré.

A première vue, une ligne dont la longueur est –2 semble tout aussi impossible qu'un carré dont l'aire est –4. Cependant, si vous tracez un carré dont l'aire est 2, vous verrez qu'il a deux diagonales dont chacune a la puissance de produire un

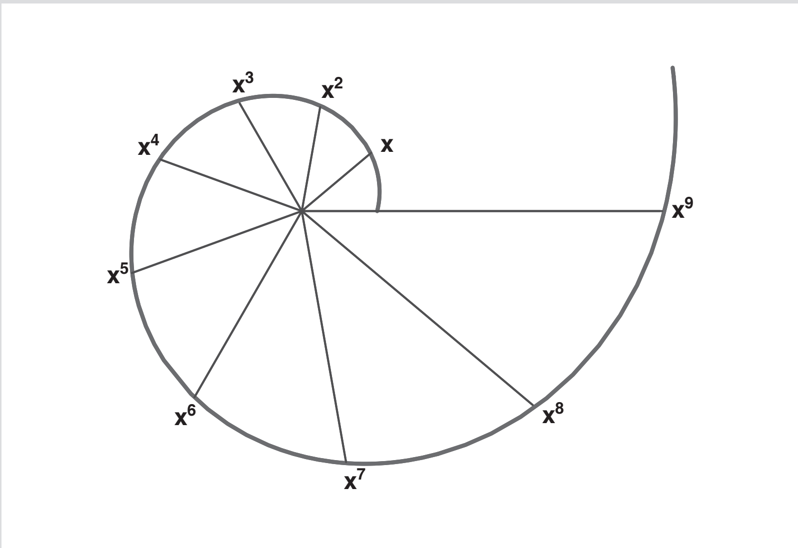

Figure 7. Une succession de puissances algébriques est engendrée par une spirale autosimilaire. Pour des angles de rotation égaux, les longueurs des rayons correspondants sont élevées aux puissances suivantes.

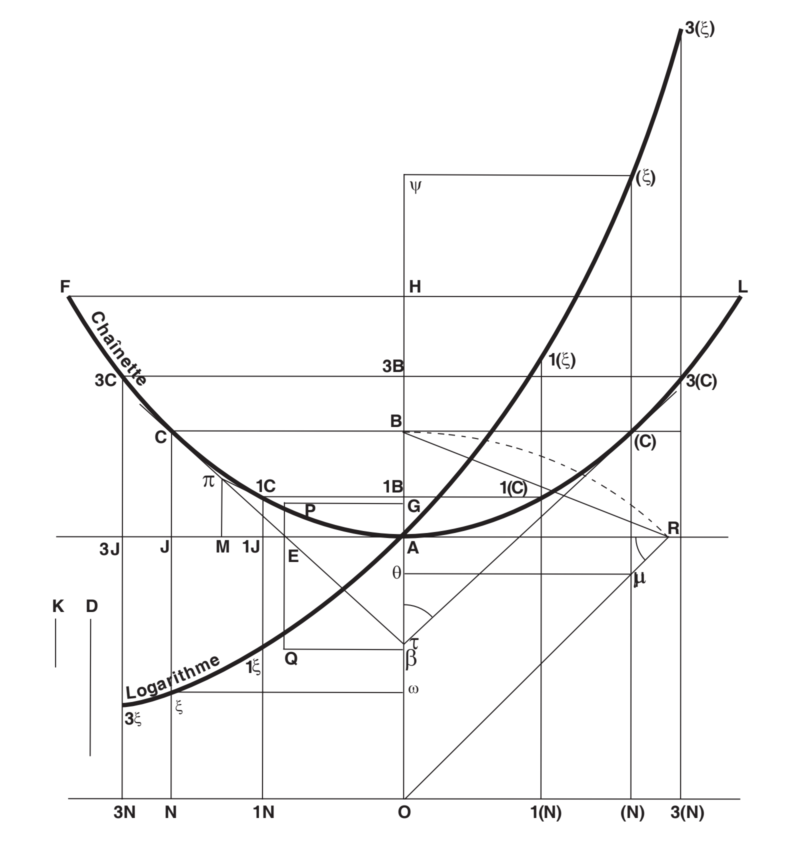

Figure 8. Construction par Leibniz des puissances algébriques à partir de la chaînette : « Soit ON une droite indéfinie parallèle à l'horizon, OA un segment perpendiculaire égal à O3N, et au-dessus de 3N, un segment vertical 3N3ξ, ayant avec OA le rapport de D à K. Cherchons la moyenne proportionnelle 1N1ξ de OA et 3N3ξ, puis de 1N1ξ et 3N3ξ, puis à son tour la moyenne proportionnelle de 1N1ξ et OA ; à mesure qu'on cherche ainsi des moyennes proportionnelles, puis à partir d'elles des troisièmes proportionnelles, prolongeons le tracé d'une courbe ξξ(A)(ξ)(ξ), telle qu'en prenant pour 3N3ξ, 1NO, O1(N), 1(N)3(N) etc. des intervalles égaux, les ordonnées 3N3ξ, 1N1ξ, OA, 1(N)1(ξ), 3(N)3(ξ) soient en progression géométrique continue, courbe que j'ai coutume d'appeler logarithme. Dès lors en prenant ON et O(N) égaux, élevons au-dessus de N et (N) les segments NC et (N)(C) égaux à la demi-somme de Nξ et (N)(ξ), C et (C) seront des *points de la chaînette* FCA(C)L dont nous pouvons ainsi déterminer géométriquement autant de points que nous le désirons.

« Inversement, si la chaînette est construite physiquement, en suspendant un fil ou une chaîne, nous pouvons grâce à elle établir autant de moyennes proportionnelles que nous souhaitons, et trouver les logarithmes de nombres, ou les nombres de logarithmes, donnés. Cherche-t-on par exemple le logarithme du nombre Oω, c'est-à-dire, ce qui revient au même, le logarithme du rapport entre OA et Oω, celui de OA (que je choisis comme unité et que j'appellerai aussi *paramètre*) étant posé égal à 0, il faut prendre la troisième proportionnelle Oψ de Oω et OA, puis choisir comme abscisse la demi-somme OB de Oω et Oψ, l'ordonnée correspondante BC ou ON sur la chaînette, sera le *logarithme qu'on cherchait correspondant au nombre proposé*. Réciproquement, si un logarithme ON est donné, il faut prendre le double du segment vertical NC abaissé de la chaînette et le couper en deux segments dont la moyenne proportionnelle soit égale à OA qui est donné (l'unité), (c'est un jeu d'enfant) ; les deux segments seront les *nombres qu'on cherchait*, l'un supérieur, l'autre inférieur à un, *correspondant au logarithme proposé*. »

nouveau carré dont l'aire est 4. Ces deux grandeurs se distinguent l'une de l'autre simplement par leur direction, donc l'une est désignée par 2 et l'autre par –2.

Poursuivons maintenant avec le cas du cube. Dans l'équation algébrique $x^3 = 8$, il ne semble y avoir qu'un seul nombre, en l'occurrence 2, qui satisfasse l'équation, et ce nombre signifie l'arête d'un cube dont le volume est 8. Ce nombre semble être la seule solution de cette équation, du fait que –2 × –2 × –2 = –8.

L'anomalie de l'existence de deux solutions, qui apparaissait dans le cas de l'équation quadratique, disparaît apparemment dans le cas du cube pour lequel il ne semble y avoir qu'une seule solution.

Ne concluons pas trop vite. Considérons un autre problème géométrique qui, lorsqu'il est posé en termes algébriques, pose le même paradoxe : la trisection d'un angle arbitraire. Comme dans le cas du doublement du cube, les géomètres grecs n'ont pas pu trouver un moyen pour diviser un angle en trois parties égales à partir de l'action circulaire elle-même. Pour trouver un principe général de trisection d'un angle, les différentes méthodes découvertes (notamment par Archimède et Eratosthène) étaient similaires à celles trouvées par les collaborateurs de Platon pour doubler un cube : cette grandeur ne peut être construite en utilisant simplement le cercle et la ligne droite mais elle nécessite une action circulaire étendue telle qu'une action conique.

Cependant, la trisection d'un angle arbitraire présente un autre type de paradoxe qui n'est pas aussi évident dans le doublement du cube. Pour illustrer cela, faisons l'expérience suivante.

Traçons un cercle et, pour faciliter l'illustration, traçons un angle de 60°. Il est clair qu'un angle de 20° va diviser cet angle en trois parties égales. Ajoutons maintenant une rotation circulaire complète à l'angle de 60°. Nous obtenons un angle de 420°. Ces deux angles semblent être essentiellement les mêmes. Cependant, si l'on divise 420° par 3, on obtient un angle de 140°. Si l'on ajoute encore un angle de 360°, on obtient un angle de 780° qui semble être identique aux angles de 60° et de 420°. Cependant, lorsque l'on divise

780° par 3, on obtient un angle de 260°. En poursuivant l'opération, on constate que le même schéma se reproduit (**figure 9**).

Du point de vue du témoignage des sens, l'angle de 60° ne peut être divisé en trois parties égales que par un seul angle : celui de 20°. Néanmoins, si l'on regarde au-delà des sens, on trouve trois angles qui « résolvent » le problème.

Il s'agit d'un autre exemple de « trou » dans la détermination algébrique de la grandeur. Dans le cas des équations quadratiques, il semble y avoir deux solutions à chaque problème. Dans certains cas, tels que $x^2 = 4$, ces solutions semblent avoir une existence visible, alors que dans le cas de l'équation $x^2 = -4$, il existe deux solutions « imaginaires » n'ayant apparemment pas de signification physique : $2\sqrt{-1}$ et $-2\sqrt{-1}$. En ce qui concerne les équations cubiques, dans certains cas, il existe trois solutions visibles comme dans la trisection d'un angle. Toutefois, dans le cas du doublement du cube ($x^3 = 8$), il semble n'y avoir qu'une solution visible, en l'occurrence 2, mais deux solutions « imaginaires », en l'occurrence $-1-\sqrt{3}\sqrt{-1}$ et $-1-\sqrt{3}\sqrt{-1}$. Les équations biquadratiques (par exemple $x^4 = 16$) qui ne semblent pas avoir de signification physique, peuvent avoir deux solutions « réelles » (2 et –2) et deux solutions « imaginaires » ($2\sqrt{-1}$ et $-2\sqrt{-1}$). Les choses deviennent davantage confuses pour les grandeurs algébriques de degrés encore supérieurs. Cette anomalie pose le problème que Gauss a résolu dans sa preuve de ce qu'il a appelé le Théorème fondamental de l'algèbre : combien de solutions existe-t-il pour une équation algébrique quelconque ?

Les mathématiciens « superficiels » de l'époque de Gauss, tels Euler, Lagrange et d'Alembert, avaient adopté l'approche consistant à affirmer que toute équation algébrique a un nombre de solutions égal à sa puissance, même si ces solutions sont « impossibles », comme par exemple les racines carrées de nombres négatifs. Cet argument sophiste est analogue à celui qui consiste à dire qu'il y a une différence entre l'homme et l'animal, mais que cette différence ne signifie rien.

Dans sa dissertation de 1799, Gauss a exposé de manière polémique l'ineptie que constituait ce sophisme : *« Si quelqu'un disait qu'un triangle rectangle rectilinéaire équilatéral est une chose impossible, personne ne nierait cela. Mais s'il manifestait l'intention de considérer un tel triangle impossible comme une nouvelle espèce de triangles et de lui appliquer d'autres qualités des triangles, quelqu'un pourrait-il s'empêcher de rire ? Ceci reviendrait à jouer avec les mots, ou plutôt, d'en faire un mauvais usage. »*

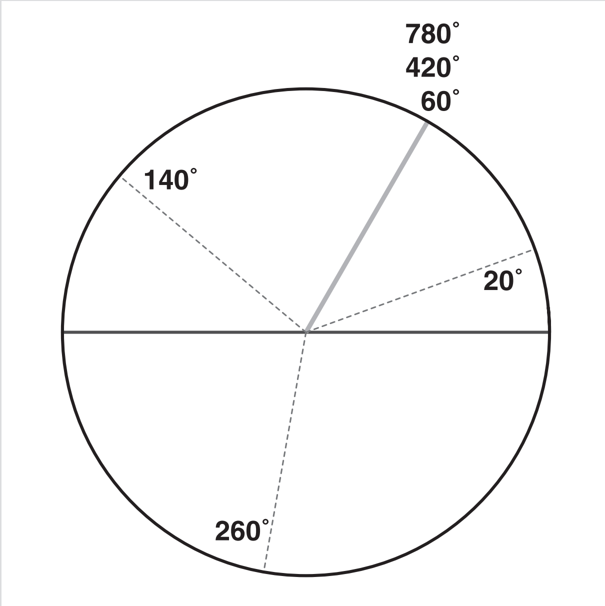

Figure 9. **Un exemple de trois solutions à la trisection d'un angle.**

Pour Gauss, aucune grandeur ne pouvait être admise à moins que son principe de génération ne soit démontré. Pour les grandeurs associées aux racines carrées des nombres négatifs, ce principe était l'action physique complexe de la rotation associée à l'extension. Gauss désigna les grandeurs engendrées par cette action du nom de « nombres complexes », pour lesquels chaque nombre correspond à une rotation combinée avec une extension. L'unité d'action dans le domaine complexe de Gauss est un cercle, lequel est une rotation associée à une extension d'une unité de longueur. Le nombre 1 signifie une rotation complète, –1 une moitié d'une rotation, $\sqrt{-1}$ un quart de rotation et $-\sqrt{-1}$ trois quarts de rotation (**figure 6**).

Ces *« ombres d'ombres »*, comme il les appelait, n'étaient que le reflet visible d'un type supérieur d'action. Ces formes d'action supérieures, bien qu'invisibles, pouvaient néanmoins être mises sous les yeux comme une projection sur une surface.

L'approche de Gauss était cohérente avec celle employée par les cercles de l'Académie de Platon, comme cela est indiqué par leur utilisation du terme « epiphaneia » pour surface ; ce mot a la même racine qu'« épiphanie ». Le concept associé au mot « epiphaneia » est « de faire apparaître quelque chose ».

De ce point de vue, Gauss a démontré dans sa dissertation de 1799 que l'on peut faire apparaître – « épiphanier » pour ainsi dire – le principe fondamental de génération d'une équation algébrique de quelque puissance que ce soit, comme une surface dans le domaine complexe. Ces surfaces étaient des représentations visibles, non pas de ce que les puissances produisaient comme dans le cas des lignes, des carrés et des cubes, mais du principe qui produit les puissances.

Pour construire ces surfaces, Gauss est sorti de la simple représentation visible des puissances, telles que les carrés et les cubes, en cherchant une forme plus générale de puissances, telle qu'on peut le voir dans la spirale équiangle (**figure 10**). Ici, la génération d'une puissance correspond à l'extension produite par un changement angulaire. Par exemple, la génération des carrés correspond à l'extension résultant d'un doublement de l'angle de rotation autour de la spirale et la génération du cube correspond à l'extension résultant du triplement

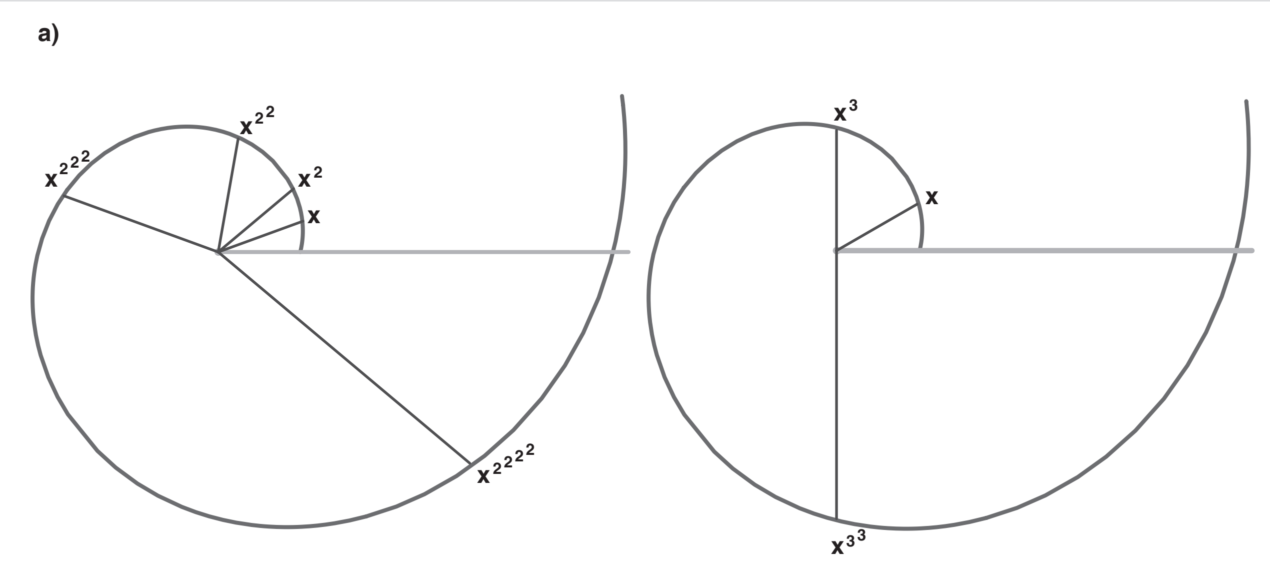

Figure 10. a) Les longueurs des rayons sont élevées au carré lorsque l'angle de rotation est doublé.
b) Les longueurs des rayons sont élevées au cube lorsque l'angle de rotation est triplé.

de l'angle. Ainsi, c'est le principe d'élever au carré qui produit les grandeurs carrées et le principe d'élever au cube qui produit les grandeurs cubiques.

Sur la **figure 11**, par exemple, le nombre complexe z est « élevé au carré » lorsque l'angle de rotation est doublé de x à 2x et la longueur élevée au carré de A à A^2. En procédant de la sorte, le petit cercle se projette deux fois sur le grand cercle « au carré ».

Sur la **figure 12**, le même principe est illustré pour l'élévation au cube. Ici, l'angle est triplé de x à 3x et la longueur élevée au cube de A à A^3. En procédant de la sorte, le petit cercle se projette trois fois sur le grand cercle « au cube ». Et l'on procède ainsi pour les puissances supérieures.

On obtient un principe général qui détermine toutes les puissances algébriques tel que, de ce point de vue, toutes les puissances sont reflétées par la même action. La seule chose qui change à chaque puissance, c'est le nombre de fois que cette action a lieu. Ainsi, chaque puissance se distingue des autres, non pas par une grandeur particulière mais par une caractéristique topologique.

Dans sa dissertation doctorale, Gauss a utilisé ce principe pour engendrer des surfaces qui exprimaient d'une manière encore plus

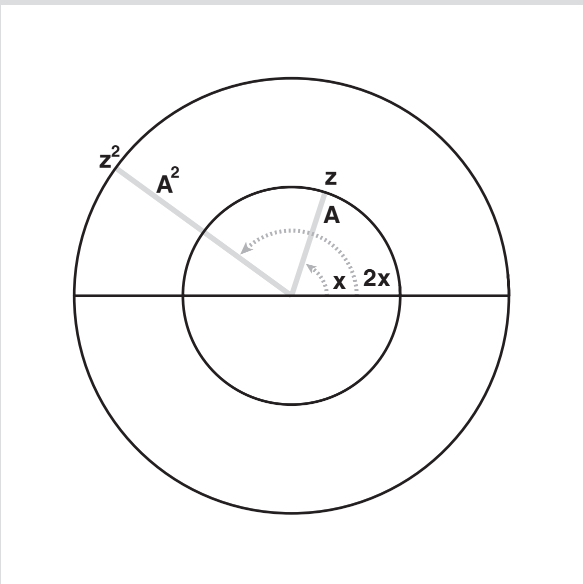

Figure 11. Elévation au carré d'un nombre complexe.

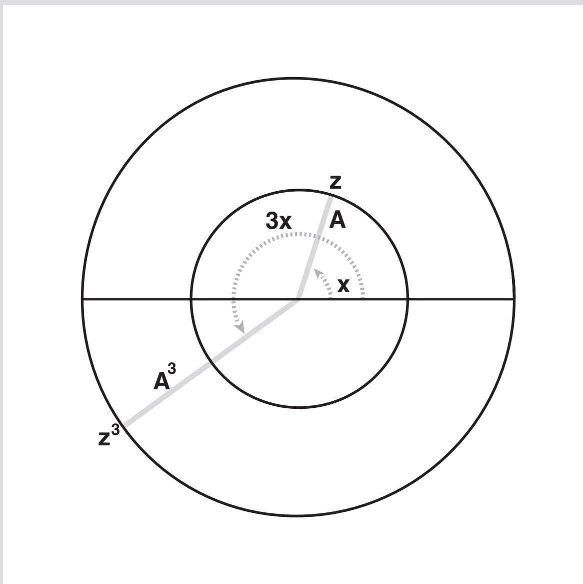

Figure 12. Elévation au cube d'un nombre complexe.

fondamentale les caractéristiques essentielles des puissances. Chaque rotation et extension produit un triangle rectangle caractéristique. Le côté vertical de ce triangle est appelé le sinus et le côté horizontal le cosinus (**figure 13**). Il y a une relation cyclique entre le sinus et le cosinus qui est une fonction de l'angle de rotation. Quand l'angle est égal à 0, le sinus est égal à 0 et le cosinus à 1. Quand l'angle est de 90°, le sinus est égal à 1 et le cosinus à 0. Si l'on considère cette relation sur l'ensemble de la rotation, on constate que le sinus passe de 0 à 1 à 0 à –1 à 0, tandis que le cosinus passe de 1 à 0 à –1 à 0 à 1 (**figure 14**).

Sur cette figure, lorsque z passe de 0 à 90°, le sinus de l'angle varie de 0 à 1 mais, au même moment, l'angle de

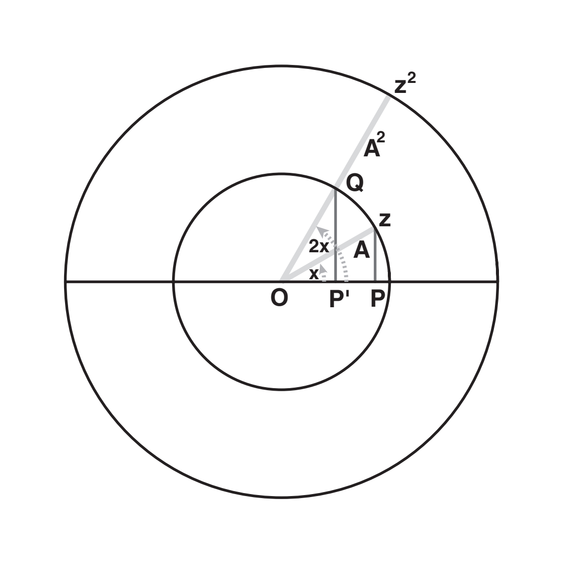

Figure 13. Le sinus de x est ZP et le cosinus de x est OP. Le sinus de 2x est QP' et le cosinus de 2x est OP'.

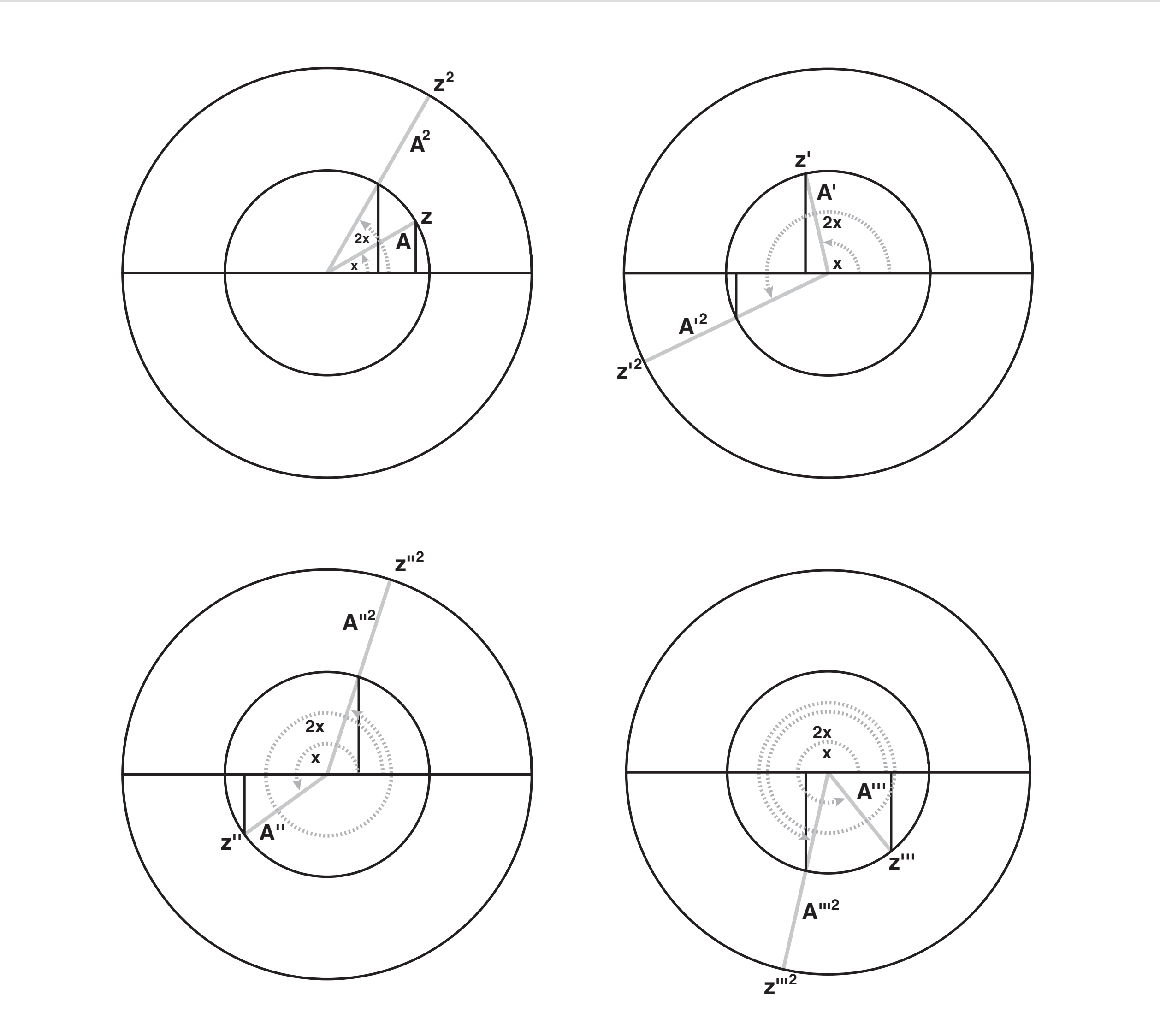

Figure 14. Variations du sinus et du cosinus dans l'élévation au carré d'un nombre complexe.

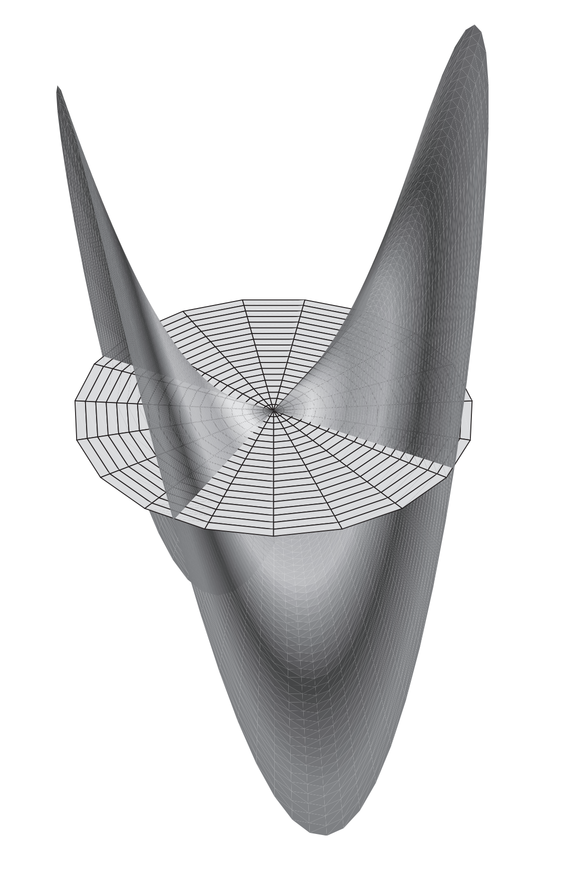

Figure 15. Surface gaussienne pour la puissance deux.

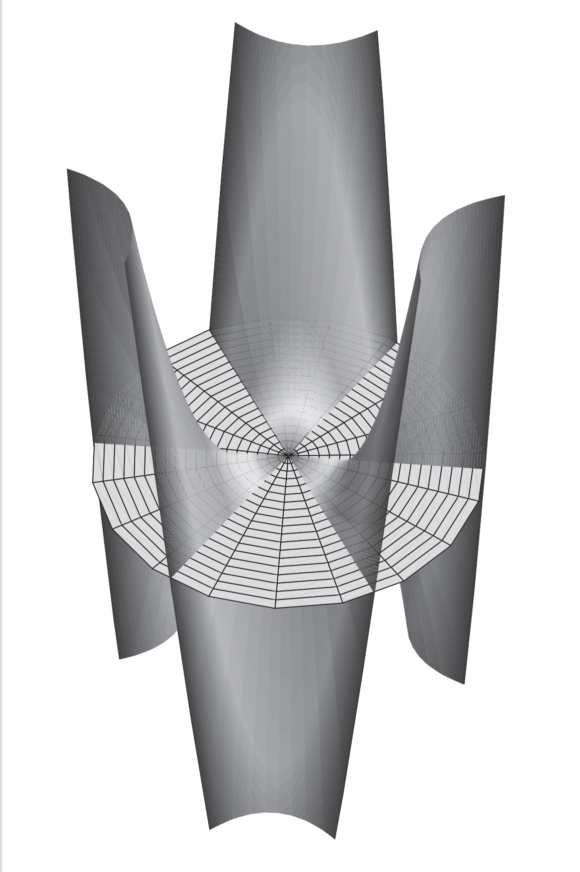

Figure 16. Surface gaussienne pour la puissance trois.

z^2 varie de 0 à 180° et son sinus varie de 0 à 1, puis retourne à 0. Quand, par la suite, z passe de 90° à 180°, son sinus varie de 1 à 0 mais l'angle de z^2 est passé de 180° à 360°, et son sinus a varié de 0 à –1 à 0. Ainsi, en une demi-rotation de z, le sinus de z^2 varie de 0 à 1 à 0 à –1 à 0.

Dans sa dissertation doctorale, Gauss a représenté ce complexe d'actions par une surface courbe (**figures 15**, **16** et **17**). Chaque point de cette surface est déterminé de telle sorte que sa hauteur, au-dessus de la surface plane, soit égale à la distance du centre multipliée par le sinus de l'angle de rotation, lorsque l'angle est augmenté par l'effet de la puissance. En d'autres termes, la puissance d'un point quelconque de la surface plane est représentée par la hauteur de la surface courbe au-dessus de ce point. Ainsi, quand les nombres de la surface plane s'éloignent du centre, la surface courbe s'élève en fonction de la puissance. En même temps, lorsque les nombres tournent autour du centre, le sinus passe de valeurs positives à des valeurs négatives. Du fait que les nombres sur la surface courbe sont les puissances des nombres sur la surface plane, le nombre de fois que le sinus change de signe, de positif à négatif, dépend de combien la puissance change l'angle (double pour les puissances carrées, triple pour les cubiques, etc.). En conséquence, chaque surface aura autant de « bosses » que l'équation a de dimensions : une équation quadratique aura deux « bosses » vers le haut et deux « bosses » vers le bas (**figure 15**), une équation cubique aura trois « bosses » vers le haut et trois « bosses » vers le bas (**figure 16**), une équation du quatrième degré aura quatre « bosses » dans chaque direction (**figure 17**), etc.

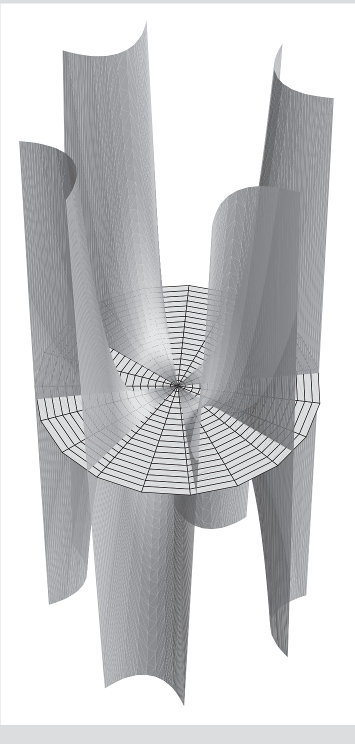

Figure 17. Surface gaussienne pour la puissance quatre.

Gauss a spécifié la construction de deux surfaces pour chaque équation algébrique, une basée sur les variations du sinus, l'autre sur les variations du cosinus (**figure 18**). Chacune de ces surfaces va définir des courbes par leurs intersections avec la surface plane. Le nombre de courbes dépend du nombre de « bos-

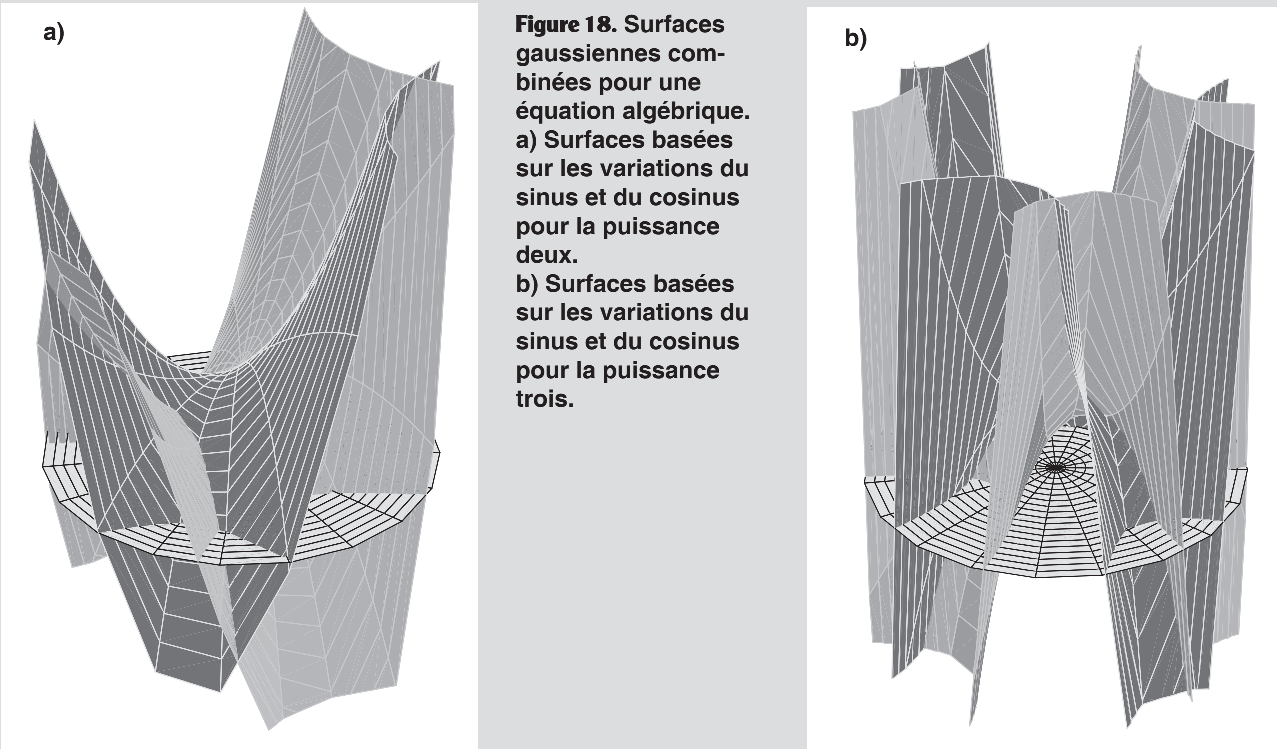

Figure 18. Surfaces gaussiennes combinées pour une équation algébrique.
a) Surfaces basées sur les variations du sinus et du cosinus pour la puissance deux.
b) Surfaces basées sur les variations du sinus et du cosinus pour la puissance trois.

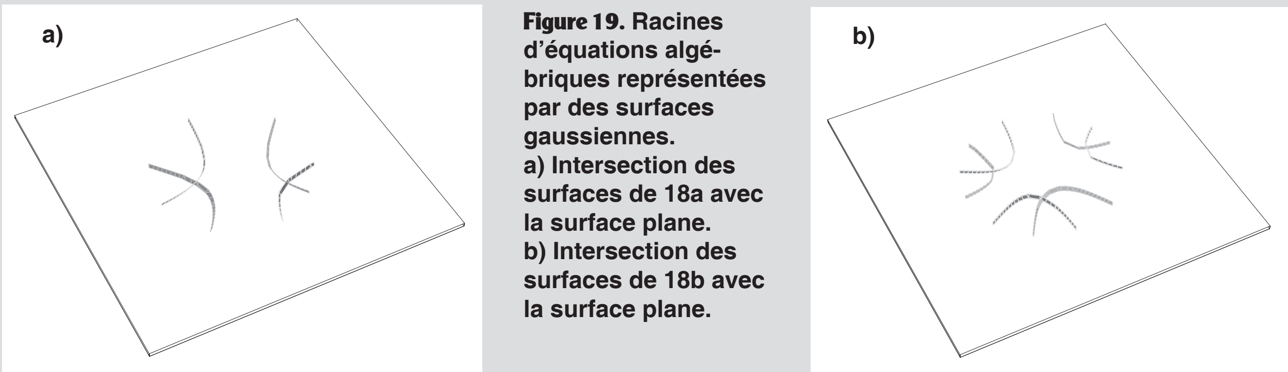

Figure 19. Racines d'équations algébriques représentées par des surfaces gaussiennes.
a) Intersection des surfaces de 18a avec la surface plane.
b) Intersection des surfaces de 18b avec la surface plane.

ses » qui, lui-même, dépend de la puissance la plus élevée. Du fait que chacune de ces surfaces est tournée de 90° par rapport à l'autre correspondante, ces courbes vont se couper les unes les autres et le nombre des intersections va correspondre au nombre des puissances (**figure 19**). Si l'on considère que la surface plane est à la hauteur 0, ces intersections vont correspondre aux solutions ou « racines » de l'équation. On prouve ainsi que le nombre de racines d'une équation algébrique est donné par sa plus haute puissance.

Prenons un peu de recul et regardons ce qui a été accompli. Ces surfaces ont été produites non pas à partir de carrés ou de cubes visibles mais à partir du principe général d'élévation au carré, au cube et aux puissances supérieures. Elles représentent, de manière métaphorique, un principe qui se manifeste physiquement mais qui ne peut être vu. En projetant ce principe – la forme générale des puissances de Platon – sur ces surfaces complexes, Gauss a fait apparaître l'invisible et rendu intelligible quelque chose d'incompréhensible dans le monde superficiel du formalisme algébrique.

Cet effort visant à rendre intelligibles les implications du domaine complexe, a été l'une des tâches pour laquelle Gauss a consacré toute sa vie. Il confie à son ami Hansen le 11 décembre 1825 : « *Ces recherches nous conduisent, en profondeur, vers beaucoup d'autres, je dirais même dans la métaphysique de la théorie de l'espace, et ce n'est qu'avec une grande difficulté que je peux m'extraire des résultats qui en découlent comme, par exemple, la véritable métaphysique des nombres négatifs et des nombres complexes. Le véritable sens de la racine carrée de –1 est bien vivant dans mon esprit, mais il est très difficile à traduire par des mots ; je reste incapable de donner autre chose qu'une image vague qui flotte dans l'air.* »

Et c'est ici que Riemann entre en scène. ■