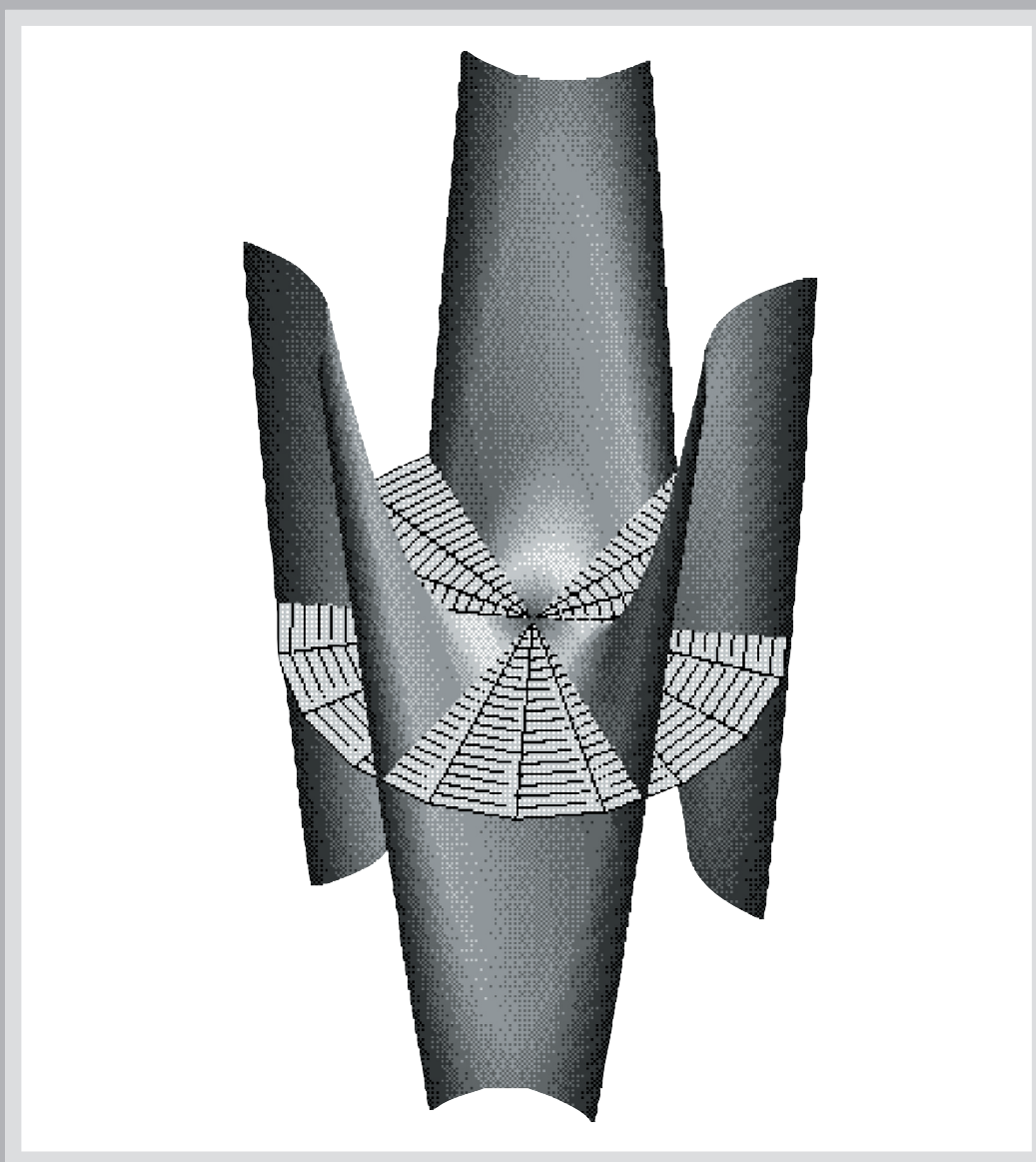


La réalité physique des nombres « impossibles »



Gauss contre l'empirisme



Comme Lyndon La-Rouche l'a souvent souligné dans ses écrits, la dissertation de Carl Friedrich Gauss de 1799 intitulée le *Théorème fondamental de l'algèbre* a constitué une réfutation dévastatrice des principales autorités scientifiques de son époque, en particulier Jean-Louis Lagrange et Leonard Euler.

Dans cet écrit, Gauss commence par attirer l'attention sur les erreurs fondamentales des prétendues preuves de ce théorème avancées successivement par d'Alembert, Euler et Lagrange. Il montre en effet que toutes reposent sur des suppositions arbitraires et n'ont pas véritablement établi la proposition qu'elles prétendent avoir démontré. Il présente ensuite sa preuve rigoureuse, basée sur des principes différents.

De quoi il en retourne ? Il est clair que par le simple fait d'exposer les « lacunes » se trouvant dans les preuves de d'Alembert, Euler et Lagrange, Gauss créait un scandale car ceci suggérait, comme il l'indique lui-même clairement, une légèreté conceptuelle choquante de la part de ces hommes considérés comme des modèles de rigueur scientifique. De plus, la preuve concise de Gauss, allant au cœur du problème en quelques pages, contraste avec les traités prolixes et volumineux de Lagrange et Euler, que Gauss a analysés à part dans la première moitié de sa dissertation.

JONATHAN TENNENBAUM

Cependant, il ne s'agit pas d'un problème de mathématique en tant que tel mais plutôt de principe physique. Une approche *préliminaire* de ce problème demande que l'on mette de côté les aspects particuliers du *Théorème fondamental* (bien qu'ils soient importants et indispensables) et que l'on commence par se poser la question suivante : *pourquoi* d'Alembert, Lagrange et Euler ont-ils *échoué* ? Autrement dit, qu'y a-t-il d'erroné dans leur *manière de penser* ?

On pourrait être tenté de répondre que Gauss était déjà un génie à 20 ans, mais en quoi consistait réellement ce génie ? La preuve de Gauss est-elle extraordinairement intelligente, compliquée et ingénieuse ? Pas du tout ! Elle est assez

simple, naturelle et directe, à partir du moment où l'on maîtrise les principes de bases en jeu. D'un point de vue purement *formel et technique*, rien dans la preuve de Gauss ne se trouve en dehors du domaine de ce que Lagrange, Euler et beaucoup d'autres auraient pu facilement réaliser.

Dans ce cas, qu'est-ce qui les a empêchés d'en faire autant ? Ah ! Nous avons affaire ici exactement au même « mécanisme »

qui provoque l'effondrement d'empires qui semblent, à première vue, tout-puissants. Il s'agit d'empires possédant en apparence de considérables ressources matérielles et intellectuelles, mais ils s'effondrent tout de même. Comment se fait-il qu'à des moments décisifs de l'histoire, les élites régnant sur ces empires, flanquées de leurs armées de conseillers, d'analystes et autres « serviteurs » parfois très talentueux, qualifiés et sélectionnés dans la crème de la crème de la population, *ne réussissent-elles jamais* à mettre en œuvre des mesures qui auraient pu éviter, ou du moins fortement retarder, l'effondrement de leur système ? Comment se fait-il que le facteur clef à l'origine de la destruction de ces empires réside finalement toujours dans leur obstination à dépenser la dernière miette de ressource et de talent pour tenter de faire « fonctionner » un système intrinsèquement *défectueux* ? Ils

son sont même déterminés à s'opposer aux lois de l'univers plutôt que d'accepter de *changer* les axiomes sous-jacents erronés de ce système.

De même, nous pouvons considérer que Lagrange et Euler, tous deux des mathématiciens très doués, très savants et très expérimentés, beaucoup plus que la plupart des autorités universitaires actuelles, ont indiscutablement *échoué* là où Gauss a *réussi*. Le cas d'Euler est particulièrement instructif parce qu'il était à tous points de vue extrêmement industrieux et, dans un certain sens, perspicace, ainsi que doué d'une maîtrise virtuose des méthodes de l'algèbre. De plus, Euler a fait un certain nombre de découvertes expérimentales non négligeables, notamment dans la théorie des nombres, comme Gauss lui-même le fait remarquer. Toutefois, Euler était également, en termes philosophiques, un vulgaire philistin et surtout un *empiriste* fanatique, dans le sens du terme tel que Lyndon LaRouche le précise : « *L'empirisme a la forme d'une synthèse de trois éléments de catégories qui, en apparence, s'excluent mutuellement :*

« 1. *L'empiriste suppose qu'aucune connaissance expérimentalement vérifiable n'existe en dehors des limites du simple témoignage des sens.*

« 2. *De ce fait, toute relation de cause à effet qui ne peut pas être explicitement localisée dans un agent accessible aux sens, est rattachée à un domaine de formes d'influences qui s'exercent sur le comportement statistique d'événements observables, ou à un certain agent auquel ni le témoignage des sens, ni la raison cognitive ne donnent accès.*

« 3. *Le deuxième élément laisse la porte ouverte pour créer l'illusion de l'existence de puissances spirituelles purement magiques, opérant entièrement en dehors du domaine accessible par les sens, mais capables d'effectuer des interventions arbitraires, même capricieuses, dans le domaine du témoignage des sens.* »

Comparons cette caractérisation avec la description clinique qu'Euler nous donne de son propre cas. Considérons, à cette fin, l'article qui constitue la cible immédiate des critiques de Gauss dans sa dissertation de 1799. Il s'agit des « Recherches sur les racines imaginaires des équations » d'Euler publiées dans les *Mémoires de l'Académie des sciences*

de Berlin en 1749.

Euler commence par écrire la forme générale d'une équation algébrique à une inconnue, « x ». Par équation algébrique, Euler veut dire toute formule construite à partir de l'inconnue et de certains nombres spécifiques (entiers, fractions ou irrationnels) avec les opérations algébriques que sont l'addition, la soustraction, la multiplication et la division, et cette formule est posée égale à zéro. Par exemple, $2x^2 - 5x + 10 = 0$ ou $x^3 + 3x^2 - 5x + 21 = 0$.

Des cas plus compliqués peuvent se présenter faisant intervenir des divisions, tels que $(x^4 - 4)/x = 0$. Il apparaît que ces divisions peuvent être éliminées en manipulant les équations algébriques mais ces aspects techniques ne sont pas importants pour le sujet qui nous intéresse ici.

Le problème, tel qu'Euler le comprend, est de trouver un nombre ou une grandeur spécifique, tel que si on le met à la place de x dans la formule, celle-ci donne bien la valeur zéro lorsque les additions, soustractions, multiplications et divisions sont effectuées. On appelle de tels nombres, les « solutions » ou « racines de l'équation ». Ainsi, l'équation $x^2 - 4 = 0$ a deux racines : 2 et -2. Faisant implicitement référence aux travaux de Cardan au XVI^e siècle, Euler écrit : « *Il arrive (en général) que les racines ne soient pas toutes des quantités réelles, et que certaines d'entre elles, ou même toutes, soient des quantités imaginaires.* » (C'est nous qui soulignons.)

Ainsi, par exemple, l'équation $x^2 + 1 = 0$ ne semble pas avoir de racines dans les grandeurs qu'Euler considèrerait comme « réelles », c'est-à-dire des quantités positives ou négatives correspondant à des positions à droite ou à gauche de zéro sur l'« axe des nombres » des manuels de mathématiques standards. Dans la mesure où x^2 est toujours positif, que x soit positif ou négatif, alors $x^2 + 1$ sera toujours égal à 1 ou plus grand, quelle que soit la valeur de x . Ainsi, une racine de l'équation $x^2 + 1 = 0$, s'il est permis de parler d'une telle chose, ne peut être qu'une entité « imaginaire » si l'on se place du point de vue d'un algébriste formel, se contentant de manipuler des symboles et raisonnant de la manière suivante :

$$x^2 + 1 = 0 \Rightarrow x^2 = -1 \Rightarrow x = \sqrt{-1}.$$

Toutefois, une telle valeur de x ne

pourrait avoir d'existence réelle car elle ne correspond à aucun point sur l'« axe des nombres ». Euler écrit : « *On dit d'une grandeur qu'elle est imaginaire lorsqu'elle n'est ni plus grande que zéro, ni plus petite que zéro, ni égale à zéro. On aurait donc quelque chose d'impossible, en écrivant par exemple $\sqrt{-1}$, ou plus généralement $a + b\sqrt{-1}$, car une telle quantité n'est ni plus grande, ni plus petite, ni égale à zéro.* »

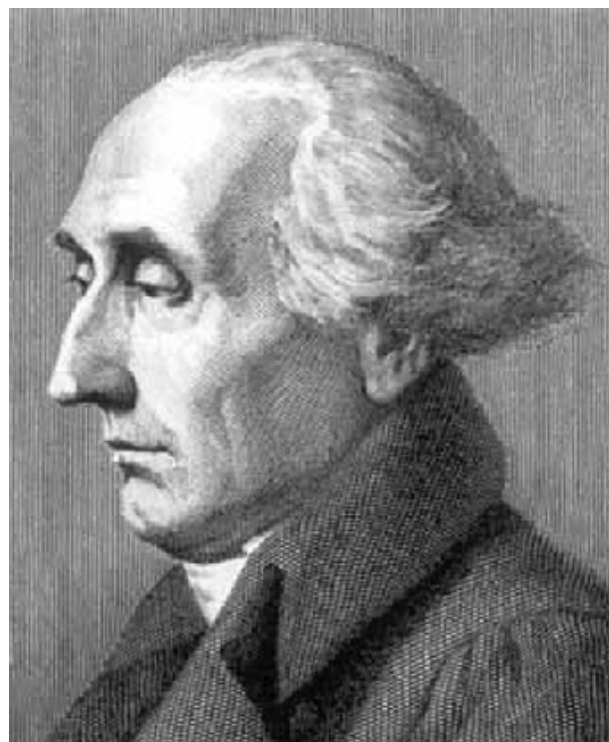
Ainsi, pour Euler, une grandeur telle que $\sqrt{-1}$, qui n'est ni plus grande, ni plus petite, ni égale à zéro, se trouve en dehors du domaine du témoignage des sens, et est par conséquent « impossible » ou « imaginaire ». Cependant, un peu plus loin dans son texte, Euler ajoute que les mathématiciens doivent étudier et utiliser ces quantités qu'il qualifie d'« impossibles » ! Euler écrit : « *Bien qu'il semble que la connaissance des racines imaginaires d'une équation ne soit d'aucune utilité du fait qu'elles ne fournissent aucune solution (réelle) d'aucun problème, il est néanmoins très important en analyse de se familiariser avec les quantités imaginaires. Parce que non seulement nous obtenons par cela une connaissance plus parfaite de la nature des équations ; mais aussi parce que l'analyse de l'infini peut en tirer des bénéfices considérables.* »

Euler précise que plusieurs méthodes pour le calcul des intégrales et d'autres problèmes mathématiques nécessitent l'utilisation de « quantités imaginaires », même si lui-même a dénoncé ces quantités comme étant impossibles ! On retrouve ici les deuxième et troisième points de la caractérisation de l'empirisme par LaRouche, et ils sont curieusement incohérents avec le premier point : un mathématicien doit apprendre à communiquer avec des *fantômes* – des « quantités imaginaires » qui ne sont pas réelles mais qui donnent cependant au mathématicien des *pouvoirs magiques* pour manipuler l'univers visible !

Euler révèle ici son problème empiriste. Il pense qu'il est impossible de connaître un véritable principe physique, lequel ne peut être engendré que sous la forme d'une *idée* dans un esprit souverain. Il n'y a au contraire que les perceptions sensorielles, d'une part, et les entités de « l'autre monde » avec leurs pouvoirs magiques, d'autre part.

« On ne trouvera point de figures dans cet ouvrage. Les méthodes que j'y expose ne demandent ni constructions, ni raisonnements géométriques ou mécaniques, mais seulement des opérations algébriques, assujetties à une marche régulière et uniforme. Ceux qui aiment l'analyse, verront avec plaisir la mécanique en devenir une nouvelle branche, et me sauront gré d'en avoir ainsi étendu le domaine. »

**Jean-Louis Lagrange,
Mécanique analytique, 1788.**



Surtout, le formalisme lui-même est supposé, comme un rituel religieux, posséder des pouvoirs magiques à l'instar, par exemple, des physiciens modernes qui attribuent des pouvoirs merveilleux au formalisme de la mécanique quantique. Un autre exemple révélateur de ce problème s'observe dans les contorsions auxquelles se livre Euler pour justifier les « règles » concernant la multiplication des nombres négatifs, dans son texte sur l'algèbre de 1770 : « *Il reste encore à résoudre le cas où – est multiplié par – ou, par exemple –a par –b. Il est tout d'abord évident qu'en ce qui concerne les lettres, le produit sera ab ; mais on peut encore douter si c'est le signe + ou – que l'on devra placer devant le produit ; tout ce que l'on sait, c'est que ce sera soit l'un, soit l'autre de ces signes. Cependant, je dis que ce ne peut être le signe – ; parce que –a par +b donne –ab et –a par –b ne peut pas donner le même résultat que –a par +b ; mais il doit résulter le signe opposé, c'est-à-dire +ab ; par conséquent nous avons cette règle : + multiplié par + donne +, tout comme – multiplié par –.* »

Ce charabia mystique est devenu un paradigme dans l'enseignement des mathématiques, produisant ainsi des générations successives d'esprits mutilés.

Jean-Louis Lagrange, dont la célèbre *Mécanique analytique* de 1788 est devenue un prototype pour

« l'analyse des systèmes » moderne, est à peine moins ouvertement occulte. Lagrange écrit dans sa préface : « *On ne trouvera point de figures dans cet ouvrage. Les méthodes que j'y expose ne demandent ni constructions, ni raisonnements géométriques ou mécaniques, mais seulement des opérations algébriques, assujetties à une marche régulière et uniforme. Ceux qui aiment l'analyse, verront avec plaisir la mécanique en devenir une nouvelle branche, et me sauront gré d'en avoir ainsi étendu le domaine.* »

Lagrange prétendait ainsi faire de la physique une branche des mathématiques formelles – exactement ce à quoi Leibniz s'était opposé, ainsi que Nicolas de Cues et Platon avant lui. Ce que Lagrange et Euler ont en commun, c'est leur exigence pour qu'aucun principe physique ne soit autorisé à faire intrusion dans le domaine des mathématiques ! Cependant, il est facile de démontrer qu'il existe chez le physicien contemporain typique et l'étudiant en physique, une certaine qualité de croyance fanatique dans les pouvoirs magiques supposés du fameux « lagrangien ».

Certes, Lagrange prétend « corriger » les défauts de la « preuve » d'Euler du Théorème fondamental de l'algèbre. Toutefois, Gauss fait remarquer que le mathématicien français maintient la supposition

implicite d'Euler, et dépourvue de fondement, selon laquelle toutes les racines d'une équation algébrique « réelles » ou « imaginaires » seraient susceptibles d'une représentation algébrique formelle, en termes d'addition, de soustraction, de multiplication, de division et d'extraction de racines (racines carrées, cubiques, etc.). Or c'est exactement l'impossibilité d'une telle formule universelle pour les racines d'une équation qui a été la clef permettant à Gauss de comprendre la signification du domaine complexe.

Gauss mentionne lui-même à plusieurs reprises la différence fondamentale de méthode entre son approche et l'empirisme d'Euler, en particulier dans ses premiers écrits. Il écrit ainsi dans l'introduction de ses *Disquisitiones Arithmeticae* : « [...] lorsqu'en 1795, j'ai commencé à m'appliquer à ce genre de considérations [théorie des nombres], je n'avais absolument aucune idée de tout ce qui avait été fait sur ce sujet, même par les modernes [Euler, Lagrange, Legendre, etc.]. [...] Occupé dans ce temps d'une autre matière, je tombai par hasard sur une vérité importante de l'Arithmétique (c'était, si je ne me trompe, le théorème du numéro 108 ^[1]) ; comme elle me sembla très belle par elle-même, et que je la soupçonnais liée à d'autres plus importantes, j'employai toute la contention d'esprit dont j'étais susceptible,

à découvrir les principes sur lesquels elle s'appuyait, et à en trouver une démonstration rigoureuse ; le succès ayant répondu à mes vœux, je me sentis tellement entraîné par l'attrait de ces questions, qu'il me fut impossible de les abandonner, et comme une vérité me conduisait à une autre, la plus grande partie des quatre grandes sections [de ce livre] était déjà terminée avant que j'eusse rien vu des travaux des autres géomètres sur ce sujet. »

Dans une lettre à son ancien maître au Carolineum, E.A.W. Zimmernmann, d'octobre 1795, peu de temps après son entrée à l'université de Göttingen, Gauss écrit : « J'ai vu la bibliothèque et j'espère en tirer une contribution considérable pour une heureuse existence à Göttingen.

J'ai déjà à la maison de nombreux volumes des Comptes-rendus de l'Académie de Pétersbourg [par Euler], et j'en ai parcourus encore beaucoup d'autres. Je ne peux nier qu'il m'est très déplaisant de voir que la plus grande part de mes découvertes dans l'analyse indéterminée a été découverte pour la seconde fois. Ce qui me réconforte, c'est ceci : toutes les découvertes d'Euler que j'ai trouvées jusqu'à présent, je les avais déjà faites moi-même, en plus d'autres. J'ai trouvé un point de vue plus général et, je crois, plus naturel, et un champ infini [pour des découvertes ultérieures] s'étend devant moi ; Euler a fait ses découvertes en une période de plusieurs années, et seulement après de nombreuses tentaminibus [tentatives]

successives. »

L'attitude d'Euler envers les nombres « imaginaires » ou « impossibles » reflète exactement son propre problème de pensée estropiée : pour lui, les idées – des principes physiques saisis par l'esprit – ne pouvaient pas réellement exister en tant qu'objets de délibération consciente. Il en a donc été réduit à renifler dans tous les recoins autour de lui, pour trouver une sorte de formule magique qui lui aurait permis de manipuler le monde. En se concentrant sur la question des principes, Gauss a surpassé, en moins d'un an, ce qu'Euler a réalisé en l'espace de sa vie entière avec ses recherches par tâtonnements sur la théorie des nombres. ■

Note

1. Il n'est pas inutile de donner ici quelques repères brefs sur le sujet de l'Article 108 des *Disquisitiones Arithmeticae*, car il est étroitement lié à la genèse du Théorème fondamental de l'algèbre de Gauss.

Gauss appelle un nombre entier donné N , un « résidu quadratique » relatif à un nombre premier p , s'il existe un « nombre carré » – c'est-à-dire le carré d'un nombre entier : 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, etc. – tel que p divise la différence entre ce nombre et N . Dans le langage de Gauss des congruences, cette dernière condition est exprimée en disant que « N est congruent à un certain carré modulo p ». Bien entendu, les nombres carrés eux-mêmes remplissent toujours cette condition, mais le cas le plus intéressant c'est lorsque N n'est pas le carré d'un nombre entier. Par exemple, nous pouvons vérifier facilement que 2 est un résidu quadratique du nombre premier 7 : 7 divise la différence entre 9 (le carré de 3) et 2. 2 est également un résidu quadratique de 17 : 36 (le carré de 6) est congruent à 2 modulo 17 ; et à toute une série d'autres nombres premiers. Par contre, 2 n'est pas un résidu quadratique de 5, ni de 11, ni de 13, ainsi que de toute une série de nombres premiers. Ainsi, il y a deux séries ou espèces de nombres premiers : ceux pour lesquels 2 est congruent à un certain carré et ceux pour lesquels 2 n'est congruent à aucun carré. Si, à la place de 2, on prend pour N n'importe quel autre nombre non carré, on obtient une autre division des nombres premiers en espèces. (Les interrelations harmoniques de ces espèces sont le sujet d'une découverte extraordinaire, qui est la clef de voûte des *Disquisitiones Arithmeticae*, en l'occurrence la fameuse « loi de la réciprocité quadratique ».)

Une autre manière de voir cela est de considérer le domaine des congruences relatives à un nombre premier donné comme définissant un *domaine géométrique* d'un type particulier. Dans ce domaine, les nombres congruents sont considérés comme ayant la même « forme » et comme étant équivalents. Ainsi, par exemple, au lieu de dire que 2 est congruent à un carré modulo 7, on considérera 2 comme étant lui-même un carré dans le domaine de congruence défini par 7. Dans cet exemple, 2 et 9 sont considérés comme équivalents et ne peuvent pas être distingués l'un de l'autre. Ainsi, 2 sera un carré (ou « de la puissance deux ») dans certains domaines premiers, mais pas dans d'autres. Les nombres premiers p – les « modules » – ne sont donc pas des nombres simples mais des *caractéristiques* topologiques.

Qu'en est-il maintenant du nombre -1 ? Ce cas spécial, qui s'avère être d'une importance cruciale dans toute l'« arithmétique supérieure » de Gauss, constitue le sujet de l'Article 108 en question. Comme nous l'avons vu ci-dessus, le critère pour que -1

soit un résidu quadratique relatif à un nombre premier donné p , est que p divise la différence entre un certain carré et -1 . Cependant, enlever -1 à un nombre est la même chose que lui ajouter $+1$; donc, la condition ci-dessus est équivalente à dire qu'il existe un nombre carré tel que lorsqu'on lui ajoute 1, le résultat est divisible par p . Des exemples sont faciles à trouver. Par exemple $4 + 1$ est divisible par 5, donc -1 est un résidu quadratique de 5. De la même façon, -1 est un résidu quadratique de 17. De même, $25 + 1 = 26$ est divisible par 13, donc -1 est aussi un résidu quadratique de 13, ainsi que d'une certaine série de nombres premiers. Par contre, -1 n'est pas un résidu quadratique de 7, ni de 23, ni de 29, ni de toute une autre série de nombres premiers.

En ré-échissant un peu, on peut également caractériser les deux espèces de nombres premiers de la manière suivante : prenez la série des nombres carrés 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100, 121, etc., et additionnez 1 à chacun d'entre eux, ce qui donne 2, 5, 10, 17, 26, 37, 50, 65, 82, 101, 122, etc. Les nombres premiers de la première espèce – ceux pour lesquels -1 est un résidu quadratique – sont ceux qui divisent au moins un nombre de cette dernière série. Les nombres premiers qui ne divisent aucun des nombres 2, 5, 10, 17, 26, 37, 50, etc., forment la seconde espèce. (De combien de termes de la série avez-vous besoin de vérifier, pour dire si un nombre premier donné divise l'un d'entre eux ?) Pour la première espèce de nombres premiers, -1 est un nombre carré dans le domaine de congruence correspondant, c'est-à-dire que $\sqrt{-1}$ correspond à une valeur spécifique dans le domaine (par exemple, 5 est équivalent à $\sqrt{-1}$ dans le domaine de congruence modulo 13), alors que pour la seconde espèce, l'introduction de $\sqrt{-1}$ demande de sortir du domaine.

Deux ans avant sa découverte de sa première preuve du Théorème fondamental de l'algèbre, Gauss avait découvert la loi harmonique gouvernant la distribution des nombres premiers entre ces deux espèces : ceux de la première espèce sont les nombres premiers qui donnent un reste de 1 lorsqu'ils sont divisés par 4 (tels 5, 13, 17, 29, etc.), et ceux de la seconde espèce sont les nombres premiers qui laissent un reste de 3 lorsqu'ils sont divisés par 4 (tels 3, 7, 11, 19, 23, etc.).

Il est des plus significatif que le *principe limitant* en question est, par nature, physique et n'a rien à voir avec une quelconque formule ou procédure formelle. Ainsi, par exemple, dans le cas des nombres premiers de la première espèce, l'existence d'une valeur pour $\sqrt{-1}$ est « contrainte », comme singularité, par la géométrie générale du domaine, alors que la valeur spécifique de $\sqrt{-1}$ dans ce domaine doit être découverte *a posteriori* par l'observation directe.