Fragments sur la gravitation et la lumière

Bernhard Riemann

Nous publions ici la première traduction française de plusieurs ébauches laissées par Bernhard Riemann après sa mort en 1866. Ces textes ont été compilés sous le titre Fragmente philosophischen Inhalts (Fragments philosophiques) et sont apparus, pour la première fois, en 1876 dans les Gesammelte Mathematische Werke und Wissenschaftlicher Nachlass de Bernhard Riemann, publiés par B.G. Teubner. Nous avons publié les deux premières parties de ces fragments dans Fusion n°92.

La rédaction.

III. Philosophie naturelle

1. Mécanique moléculaire

Le mouvement libre d'un système de points matériels m_1, m_2... dont les coordonnées rectangulaires sont x_1, y_1, z_1 ; x_2, y_2, z_2 ;..., sur lesquels s'exercent les forces X_1, Y_1, Z_1 ; X_2, Y_2, Z_2 ;... parallèlement aux trois axes, s'exprime selon les équations :

$$(1)\quad m_\iota \frac{d^2x_\iota}{dt^2} = X_\iota, m_\iota \frac{d^2y_\iota}{dt^2} = Y_\iota, m_\iota \frac{d^2z_\iota}{dt^2} = Z_\iota.$$

Cette loi peut également s'exprimer de la manière suivante : les accélérations sont telles que l'expression

$$\sum m_\iota \left(\left(\frac{d^2x_\iota}{dt^2} - \frac{X_\iota}{m_\iota} \right)^2 + \left(\frac{d^2y_\iota}{dt^2} - \frac{Y_\iota}{m_\iota} \right)^2 + \left(\frac{d^2z_\iota}{dt^2} - \frac{Z_\iota}{m_\iota} \right)^2 \right)$$

devient minimale ; du fait que cette fonction des accélérations prend sa plus petite valeur 0 si les accélérations sont collectivement déterminées selon l'équation (1), c'est-à-dire que les grandeurs $\frac{d^2x_\iota}{dt^2} - \frac{X_\iota}{m_\iota}$ ... sont collectivement égales à 0, et elles prennent aussi leurs valeurs minimales seulement dans ce cas ; car si l'une de ces grandeurs, par exemple $\frac{d^2x_\iota}{dt^2} - \frac{X_\iota}{m_\iota}$, n'était pas égale à 0, alors $\frac{d^2x_\iota}{dt^2}$ pourrait changer de manière continue de telle sorte que sa valeur absolue et donc son carré diminuerait. La fonction deviendrait donc plus petite si les autres accélérations étaient simultanément laissées inchangées.

Cette fonction des accélérations ne diffère de

$$\sum m_\iota \left(\left(\frac{d^2x_\iota}{dt^2} \right)^2 + \left(\frac{d^2y_\iota}{dt^2} \right)^2 + \left(\frac{d^2z_\iota}{dt^2} \right)^2 \right)$$

$$-2\sum \left(X_\iota \frac{d^2x_\iota}{dt^2} + Y_\iota \frac{d^2y_\iota}{dt^2} + Z_\iota \frac{d^2z_\iota}{dt^2} \right)$$

que par une constante, c'est-à-dire d'une grandeur indépendante des accélérations.

Si les forces entre les points ne résultent que d'attractions et de répulsions, qui sont des fonctions de la distance, et que le l-ième point et le l'-ième point séparés par une distance r, se repoussent réciproquement d'une force $f_{\iota,\iota'}(r)$, ou s'attirent réciproquement d'une force $-f_{\iota,\iota'}(r)$, alors, comme on le sait, les composantes des forces peuvent s'exprimer par les dérivées partielles d'une fonction des coordonnées de tous les points

$$P = \sum_{\iota,\iota'} F_{\iota,\iota'}\left(r_{\iota,\iota'}\right)$$

où $F_{\iota,\iota'}(r)$ est une fonction dont la dérivée est $f_{\iota,\iota'}(r)$, et pour ι et ι' deux indices différents.

Si ces valeurs des composantes

$$X_\iota = \frac{\partial P}{\partial x_\iota},\ Y_\iota = \frac{\partial P}{\partial y_\iota},\ Z_\iota = \frac{\partial P}{\partial z_\iota}$$

sont substituées dans la fonction des accélérations ci-dessus, et sont multipliées par $\frac{dt^2}{4}$, par quoi les positions de leurs maxima et de leurs minima restent inchangées, nous obtenons alors une expression dont la différence avec

$$\frac{1}{4}\sum \left(\left(d\frac{dx_\iota}{dt}\right)^2 + \left(d\frac{dy_\iota}{dt}\right)^2 + \left(d\frac{dz_\iota}{dt}\right)^2\right) - P_{(t+dt)}$$

est une grandeur indépendante des accélérations. Si la position et la vitesse des points est donnée à un instant t, alors cette position est déterminée pour un instant t + dt de telle sorte que cette grandeur devienne aussi petite que possible. En conséquence, cette grandeur tend à atteindre un minimum.

Cette loi peut s'expliquer sur la base d'actions qui tendent à rendre les termes individuels de cette expression aussi petits que possible si nous supposons que *les efforts travaillant les uns contre les autres sont rendus tels que la somme des grandeurs que les actions individuelles tendent à maintenir à un minimum, devient elle-même un minimum*.

Si nous supposons que les masses des points m_1, m_2, ..., m_n, sont en rapport avec les nombres entiers k_1, k_2, ..., k_n, de telle sorte que $m_\iota = k_\iota \mu$, alors l'expression, qui devient aussi petite que possible, consiste en la somme des grandeurs

$$\frac{\mu}{4}\left(\left(d\frac{dx_\iota}{dt}\right)^2 + \left(d\frac{dy_\iota}{dt}\right)^2 + \left(d\frac{dz_\iota}{dt}\right)^2\right)$$

pour la totalité des particules matérielles μ et de la grandeur $-P_{t+dt}$. Si, par conséquent, nous considérons avec Gauss la grandeur

$$\left(d\frac{dx_\iota}{dt}\right)^2 + \left(d\frac{dy_\iota}{dt}\right)^2 + \left(d\frac{dz_\iota}{dt}\right)^2$$

comme étant la mesure de la variation de l'état de mouvement de la masse μ à l'instant t + dt par rapport à son état de mouvement à l'instant t, alors l'analyse de l'action totale en relation avec chaque masse donne une action qui tend à rendre la variation de son état de mouvement à l'instant t + dt aussi petit que possible relativement à son état de mouvement à l'instant t, ou un effort de préserver son état de mouvement, et en plus, une action qui tend à garder la grandeur –P aussi petite que possible.

Cette action peut être analysée en efforts visant à garder les termes individuels de la somme $\sum_{\iota,\iota'} F_{\iota,\iota'}\left(r_{\iota,\iota'}\right)$ aussi petits que possible, c'est-à-dire en attractions et répulsions entre deux points quelconques, et cela nous ramène à l'explication habituelle des lois du mouvement à partir de la loi d'inertie et de l'attraction-répulsion ; mais cela peut également nous ramener, pour toutes les forces naturelles que nous connaissons, aux forces qui agissent entre des éléments spatiaux contigus, comme cela sera expliqué dans l'article suivant sur la gravitation.

2. Nouveaux principes mathématiques de philosophie naturelle*

Bien que le titre de cet essai aura du mal à donner à la plupart des lecteurs une impression favorable, il me semble néanmoins correspondre à la meilleure expression de la direction générale de l'essai. Son objectif est de rentrer, au-delà des fondations de l'astronomie et de la physique établies par Galilée et Newton, à l'intérieur de la nature. En ce qui concerne l'astronomie, ces spéculations ne pourront certainement pas avoir d'utilité pratique immédiate, mais j'espère que cette circonstance ne conduira pas les lecteurs de cette publication à s'en désintéresser. [...]

Le fondement des lois générales du mouvement des corps pondérables qui sont présentées au début des *Principia* de Newton, se trouve dans l'état interne de ces corps. Essayons de former une analogie entre ceux-là et nos propres modes internes de perception. De nouvelles masses d'images surviennent sans arrêt en nous et disparaissent très rapidement de notre conscience. Nous observons une activité constante de notre esprit. Chaque acte mental repose sur quelque chose de durable, qui se manifeste (par la mémoire) à certaines occasions, sans exercer d'influence durable sur le monde des phénomènes. Ainsi (à chaque acte de pensée) quelque chose de durable entre continuellement dans notre esprit, et cependant n'exerce pas d'influence durable sur le monde des phénomènes. Chaque acte mental repose, de ce fait, sur quelque chose de durable, qui entre dans notre esprit avec l'acte, mais qui au même moment disparaît complètement du monde des phénomènes.

Guidé par ce fait, je forme l'hypothèse qu'il existe une sorte de substance qui remplit l'espace qui s'écoule continuellement dans les atomes pondérables et, là, disparaît du monde des phénomènes (le monde corporel). [1]

Les deux hypothèses peuvent être remplacées par une seule, à savoir que dans tous les atomes pondérables, une substance venant du monde corporel entre continuellement dans le monde de l'esprit. La raison pour laquelle la substance y disparaît est à chercher dans la matière pensée qui a été formée dans la période juste précédente ; et les corps pondérables sont en conséquence l'endroit où le monde de l'esprit se lie

* Découverts le 1er mars 1853.

au monde corporel**.

On sait bien que l'effet de la gravitation universelle – la première chose à expliquer par cette hypothèse – est totalement déterminé pour chaque partie de l'espace, si la fonction potentiel P de toute masse pondérable pour cette partie de l'espace est donnée ou, en d'autres termes, s'il existe une fonction de position P, telle que les masses pondérables contenues dans la surface fermée S sont $\frac{1}{4\pi}\int\frac{\partial P}{\partial p}dS$.

Si nous supposons maintenant que la substance qui remplit l'espace est un fluide homogène incompressible, sans inertie, et qu'une quantité proportionnelle à la masse de chaque atome donné entre dans ce dernier pendant des durées égales, alors à l'évidence, la pression exercée sur l'atome pondérable (sera proportionnelle à la vitesse de la substance au lieu qu'occupe l'atome (?)). [2]

Donc, l'effet de la gravitation universelle sur un atome pondérable peut être exprimé par (et cependant pensé comme dépendant de) la pression de cette substance remplissant l'espace dans le voisinage immédiat de l'atome.

Il suit nécessairement de notre hypothèse que la substance remplissant l'espace doit propager les vibrations que nous percevons comme étant la lumière et la chaleur.

Si nous considérons un simple rayon polarisé, et désignons par x la distance d'un point indéterminé de ce rayon à une origine fixe, et y son déplacement à l'instant t, alors l'équation qui suit doit être pratiquement satisfaite, du fait que la vitesse de propagation des vibrations dans l'espace libre d'atomes pondérables est dans toutes les conditions très proche d'une constante ($=\alpha$) :

$y = f(x + \alpha t) + \varphi(x - \alpha t)$.

Pour qu'elle soit strictement satisfaite,

$$\frac{\partial y}{\partial t} = \alpha\alpha\int^{t}\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}d\tau$$

devrait s'appliquer ; cependant, il est clair que dans la pratique, nous pouvons nous satisfaire de l'équation

$$\frac{\partial y}{\partial t} = \alpha\alpha\int^{t}\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\varphi(t-\tau)d\tau$$

même si $\varphi(t - \tau)$ n'est pas égal à 1 pour toutes les valeurs positives de $t - \tau$ (qui diminue *ad infinitum* lorsque $t - \tau$ augmente) tant que pour des périodes de temps suffisamment longues cette expression reste très proche de 1. [...]

On exprime les positions des points de la substance à un instant t donné par un système de coordonnées rectilinéaire et les coordonnées d'un point O indéterminé par x, y, z. De même, on exprime les coordonnées d'un point O' par x', y', z', par rapport à un système de coordonnées rectilinéaire. Les coordonnées x', y', z' sont alors fonctions de x, y, z, et $ds'^2 = dx'^2 + dy'^2 + dz'^2$ sera égal à une expression homogène quadratique de dx, dy, dz. Selon un théorème bien connu, les expressions linéaires de dx, dy, dz

$\alpha_1 dx + \beta_1 dy + \gamma_1 dz = ds_1$
$\alpha_2 dx + \beta_2 dy + \gamma_2 dz = ds_2$
$\alpha_3 dx + \beta_3 dy + \gamma_3 dz = ds_3$

peuvent maintenant toujours être déterminées d'une manière et d'une seule de telle sorte que

$dx'^2 + dy'^2 + dz'^2 = G_1^2 ds_1^2 + G_2^2 ds_2^2 + G_3^2 ds_3^2$

lorsque

$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 = ds_1^2 + ds_2^2 + ds_3^2$.

Les grandeurs G_1-1, G_2-1, G_3-1 désignent alors les déformations principales de la particule de substance en O, pendant la transition d'une forme à la suivante. Je les désigne par λ_1, λ_2, λ_3.

Je suppose ensuite qu'une force résulte de la différence entre les formes précédentes de la particule de substance et sa forme à l'instant t, qui tend à la transformer ; et, toutes autres choses étant égales, que l'influence d'une forme précédente deviendra d'autant moindre que la durée écoulée depuis l'instant t où elle s'est produite s'allonge. Il y a donc une limite avant laquelle toutes les formes précédentes peuvent être ignorées. Je suppose de plus que les états qui manifestent encore une influence détectable diffèrent si peu de l'état à l'instant t, que les déformations peuvent être considérées comme infiniment petites. Les forces qui tendent à rendre λ_1, λ_2, λ_3 petits peuvent alors être considérées comme des fonctions linéaires de λ_1, λ_2, λ_3 ; et en effet, du fait de l'homogénéité de l'éther pour le moment total de ces forces (la force qui tend à rendre λ_1 petit doit être une fonction de λ_1, λ_2, λ_3, qui reste inchangée quand on permute λ_2 et λ_3, et les forces restantes doivent s'en déduire, quand λ_2 est permuté avec λ_1, et λ_3 avec λ_1), nous obtenons l'expression suivante :

$$\delta\lambda_1(a\lambda_1 + b\lambda_2 + b\lambda_3) + \delta\lambda_2(b\lambda_1 + a\lambda_2 + b\lambda_3) + \delta\lambda_3(b\lambda_1 + b\lambda_2 + a\lambda_3)$$

ou, en changeant légèrement la signification des constantes :

$$\delta\lambda_1\left(a(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)+b\lambda_1\right)+\delta\lambda_2\left(a(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)+b\lambda_2\right)+\delta\lambda_3\left(a(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)+b\lambda_3\right)$$
$$=\frac{1}{2}\delta\left(a(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)^2+b(\lambda_1^2+\lambda_2^2+\lambda_3^2)\right)$$

Le moment de la force qui tend à changer la forme de la particule de substance infiniment petite en O peut maintenant être considéré comme résultant des forces qui tendent à changer la longueur des éléments linéaires dont l'extrémité est en O. Nous arrivons donc à la loi d'action suivante : si dV est le volume d'une particule de substance infiniment petite au point O et à l'instant t, et dV' le volume de la même particule à l'instant t', alors la force résultant de la différence entre les deux états de la substance, qui tend à allonger ds, s'exprime par :

$$a\frac{dV-dV'}{dV}+b\frac{ds-ds'}{ds}.$$

Le premier membre de cette expression dérive de la

**A chaque instant, une quantité définie de substance, proportionnelle à la force de gravitation, entre dans chaque atome pondérable et y disparaît.
Le fait que la substantialité ne revient pas à l'esprit mais à chaque image individuelle qui s'y forme, est une conséquence de la psychologie basée sur le travail d'Herbart.

force avec laquelle une particule de substance résiste à un changement de volume sans changement de forme, le second de la force avec laquelle un élément physique linéaire résiste à un changement de longueur.

Par ailleurs, il n'y a aucune raison de supposer que les effets des deux causes changent dans le temps selon la même loi ; donc, si nous faisons la somme des effets de toutes les formes précédentes d'une particule de substance sur le changement de l'élément linéaire ds à l'instant t, alors la valeur de $\frac{\delta ds}{dt}$ qu'ils tendent à déterminer, devient :

$$= \int_{-\infty}^{t} \frac{dV' - dV}{dV} \psi(t-t')\delta t' + \int_{-\infty}^{t} \frac{ds' - ds}{ds} \varphi(t-t')\delta t'.$$

Comment alors les fonctions ψ et φ doivent-elles être constituées pour que la gravitation, la lumière et le rayonnement de la chaleur soient des propagations dans la substance de l'espace ?

Les effets de la matière pondérable sur la matière pondérable sont les suivants :

(1) Forces attractives et répulsives inversement proportionnelles au carré de la distance.

(2) Lumière et rayonnement de chaleur.

Les deux classes de phénomènes peuvent s'expliquer si nous supposons que la totalité de l'espace infini peut être remplie avec une substance homogène et que chaque particule de cette substance agit directement sur son seul voisinage immédiat.

La loi mathématique en accord avec laquelle cela se produit peut être pensée comme étant divisée en :

(1) la résistance d'une particule de substance à un changement de volume, et

(2) la résistance d'un élément physique linéaire à un changement de longueur.

Sur la première partie sont fondées la gravitation et l'attraction et la répulsion électrostatiques ; sur la seconde sont fondées la propagation de la lumière et de la chaleur, et l'attraction et la répulsion électrodynamiques ou magnétiques.

3. Gravitation et lumière

L'explication newtonienne du mouvement gravitationnel et des mouvements des corps célestes consiste dans la supposition des causes suivantes :

1. Il existe un espace infini dont les propriétés sont assignées par la géométrie, et il existe des corps pondérables qui changent leurs positions dans cet espace seulement de manière continue.

2. Pour chaque point matériel, il existe à chaque moment une cause déterminée en grandeur et en direction, en vertu de laquelle le point matériel a un mouvement déterminé (matière dans un état de mouvement déterminé). La mesure de cette cause est la vitesse*.

Les phénomènes qu'il faut expliquer ici ne conduisent cependant pas à la supposition de masses différentes pour les corps pondérables.

3. Pour chaque point de l'espace, il existe à chaque moment une cause (force accélérante), déterminée en grandeur et en direction, qui communique un mouvement déterminé à chaque point matériel présent et, en fait, le même mouvement à chacun, qui se combine géométriquement avec le mouvement qu'il possède déjà.

4. Pour chaque point matériel de l'espace, il existe une cause (gravité absolue) déterminée en grandeur, qui se combine géométriquement avec toutes les autres forces accélérantes présentes à cet endroit. En vertu de cette cause, il existe à chaque point de l'espace une force accélérante inversement proportionnelle au carré de la distance de ce point matériel et directement proportionnelle à sa force gravitationnelle**.

La cause, déterminée en grandeur et en direction (force gravitationnelle accélérante) qui, selon 3., est localisée en chaque point de l'espace, je la cherche sous la forme d'un mouvement d'une substance qui se propage de manière continue à travers tout l'espace infini. En fait, je suppose que la direction du mouvement est égale à la direction de la force par laquelle il doit être expliqué, et que la vitesse est proportionnelle à l'amplitude de la force. Par conséquent, cette substance peut être représentée comme un espace physique dont les points se déplacent dans un espace géométrique.

Selon cette supposition, tous les effets provoqués par les corps pondérables sur les corps pondérables à travers l'espace vide doivent être propagés par cette substance. De ce fait, toutes les formes de mouvement dans lesquelles consistent la lumière et la chaleur, que les corps célestes se transmettent les uns aux autres, doivent également être des formes de mouvement de cette substance. Cependant, ces deux phénomènes – la gravitation et le mouvement de la lumière à travers l'espace vide – sont les seuls qui doivent être *uniquement* expliqués au moyen des mouvements de cette substance.

Je suppose maintenant que le mouvement réel de la substance dans l'espace vide est combiné avec le mouvement que l'on doit supposer pour expliquer la gravitation et celui que l'on doit supposer pour expliquer la lumière.

La poursuite du développement de cette hypothèse peut être divisée en deux parties dans lesquelles ce qui suit doit être déterminé :

1. Les lois du mouvement de la substance qui doit être supposé pour l'explication des phénomènes.

2. Les causes par lesquelles ces mouvements peuvent être expliqués.

---

*S'il était seul dans l'espace, chaque corps matériel garderait inchangée sa position dans l'espace ou se déplacerait en ligne droite selon une vitesse constante.
Cette loi du mouvement ne peut être expliquée au moyen du Principe de la Raison Suffisante : le fait que le corps poursuive son mouvement, doit avoir une cause qui ne peut être cherchée que dans l'état interne de la matière.

**Le même point matériel subit des changements dans son mouvement entre deux points, dont les directions coïncident avec les directions des forces et dont les amplitudes sont proportionnelles aux forces.
Par conséquent, la force divisée par le changement de mouvement donne toujours le même rapport pour le même point matériel. Ce quotient est différent pour des points matériels différents, et on l'appelle leur masse.

Le premier sujet est mathématique, le second métaphysique. En ce qui concerne ce dernier, je note d'ores et déjà que le but ne sera pas considéré être une quelconque explication sur la base de causes qui tendent à changer la distance entre deux points de substance. Cette méthode d'explication au moyen de forces attractives et répulsives ne doit son application générale dans la physique à aucune preuve directe (ou conformité spécifique à la raison) ni, en dehors de l'électricité et de la gravité, à sa facilité particulière mais, au contraire, au fait que la loi newtonienne d'attraction, en contradiction avec l'opinion de son auteur, a jusqu'à présent été considérée comme ne nécessitant pas d'explication supplémentaire*.

I. Lois du mouvement de la substance qui, selon notre supposition, est la cause des phénomènes de la gravitation et de la lumière.

Exprimant la position d'un point dans l'espace au moyen des coordonnées rectilinéaires x_1, x_2, x_3, je désigne les composantes de la vitesse – parallèles aux coordonnées à l'instant t – du mouvement qui est la cause des phénomènes gravitationnels par u_1, u_2, u_3, celles du mouvement qui est la cause des phénomènes de la lumière par w_1, w_2, w_3, et celles du mouvement réel par v_1, v_2, v_3, de sorte que $v = u + w$. Comme cela va apparaître des lois du mouvement elles-mêmes, la substance, si elle est partout également dense à un point dans le temps, maintient cette même densité partout à tous les instants. Je supposerai donc qu'elle est partout égale à 1 à l'instant t.

a. Le mouvement qui n'est la cause que des phénomènes gravitationnels.

La force gravitationnelle est déterminée pour tous les points par la fonction potentiel V, dont les dérivées partielles $\frac{\partial V}{\partial x_1}, \frac{\partial V}{\partial x_2}, \frac{\partial V}{\partial x_3}$ sont les composantes de la force gravitationnelle, et ce V est lui-même déterminé par les conditions suivantes (sans tenir compte de la constante additionnelle) :

1. A l'extérieur du corps attracteur $dx_1dx_2dx_3\left(\frac{\partial V}{\partial x_1^2}, \frac{\partial V}{\partial x_2^2}, \frac{\partial V}{\partial x_3^2}\right) = 0$, et a pour chaque élément pondérable matériel une valeur constante. C'est le produit de –4p par la valeur absolue de la force attractive selon la théorie de l'attraction ; on le désigne par dm.

2. Si tous les corps attracteurs sont dans un espace fini, les quantités $r\frac{\partial V}{\partial x_1}, r\frac{\partial V}{\partial x_2}, r\frac{\partial V}{\partial x_3}$ sont infiniment petites pour un point de l'espace se trouvant à une distance r infinie.

Selon notre hypothèse, nous avons donc $\frac{\partial V}{\partial x} = u$ et par conséquent

$$dV = u_1dx_1 + u_2dx_2 + u_3dx_3.$$

Ceci inclut les conditions suivantes :

$$(1)\ \frac{\partial u_2}{\partial x_3} - \frac{\partial u_3}{\partial x_2} = 0,\ \frac{\partial u_3}{\partial x_1} - \frac{\partial u_1}{\partial x_3} = 0,\ \frac{\partial u_1}{\partial x_2} - \frac{\partial u_2}{\partial x_1} = 0,$$

$$(2)\ \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3}\right)dx_1dx_2dx_3 = -4\pi dm,$$

$$(3)\ ru_1 = 0,\ ru_2 = 0,\ ru_3 = 0, \text{ pour } r = \infty.$$

Inversement, si les grandeurs u satisfont ces conditions, elles sont égales aux composantes de la force gravitationnelle. Ceci du fait que les conditions (1) contiennent la possibilité d'une fonction U de laquelle vient la différentielle $dU = u_1dx_1 + u_2dx_2 + u_3dx_3$ et donc les dérivées $\frac{\partial U}{\partial x} = u$, et les autres nous donnent U = V + constante*.

b. Le mouvement qui n'est la cause que des phénomènes de la lumière.

Le mouvement que l'on doit supposer dans l'espace vide pour expliquer les phénomènes de la lumière peut être considéré (selon un théorème) comme composé d'ondes planes, c'est-à-dire de mouvements tels que la forme du mouvement est constante le long de chaque plan d'une famille de plans parallèles (ondes planes).

---

*Newton dit : « *Que la gravité soit innée, inhérente et essentielle à la matière, et qu'un corps puisse agir sur un autre à distance à travers un vide sans médiation de quoi que ce soit d'autre, à travers lequel leur action et leur force soient transmises de l'un à l'autre, est pour moi d'une si grande absurdité, que je crois que personne ayant en philosophie une faculté de penser avec compétence ne puisse jamais tomber là-dedans.* » Voir la troisième lettre à Bentley.

*Cette fonction U est par conséquent donnée par l'observation (de mouvements relatifs) au moyen des lois générales du mouvement, mais seulement sans prendre en compte une fonction linéaire des coordonnées, car nous ne pouvons observer que des mouvements relatifs.

La détermination de cette fonction repose sur le théorème mathématique suivant : une fonction V de la position est déterminée dans un espace fini (en ignorant une constante) si elle n'est pas discontinue suivant une surface et si, pour tous ses éléments $\left(\frac{\partial^2 V}{\partial x_1^2}, \frac{\partial^2 V}{\partial x_2^2}, \frac{\partial^2 V}{\partial x_3^2}\right)dx_1dx_2dx_3$ à la limite, soit V soit sa dérivée est donné pour un changement de position vers l'intérieur perpendiculaire à la limite. De cela il faut noter que :

1. Si cette dérivée à l'élément limite ds est désignée par $\frac{\partial^2 V}{\partial p}$, alors dans ce cas $\int\sum \frac{\partial^2 V}{\partial x^2}dx_1dx_2dx_3$ doit être égal à $-\int\frac{\partial V}{\partial p}$ dans tout l'espace à cause de sa limite ; sinon, dans les deux cas, tous les éléments déterminants peuvent être pris arbitrairement et sont de ce fait nécessaires à la détermination.

2. Pour un élément spatial où $\int\sum \frac{\partial^2 V}{\partial x^2}$ devient infiniment grand, le produit des deux doit être remplacé par $-\int\frac{\partial V}{\partial p}$ ds en relation à la limite de cet élément.

3. Si $\int\sum \frac{\partial^2 V}{\partial x^2}$ a une autre valeur que zéro seulement dans un espace fini, alors la condition aux limites peut être remplacée par la proposition selon laquelle à une distance infinie R d'un point dans cet espace $R\frac{\partial V}{\partial x}$ devient infiniment petit.

Chacun de ces systèmes d'ondes consiste donc (en accord avec l'observation) en mouvements parallèles à l'onde plane qui sont propagés perpendiculairement à l'onde plane avec une vitesse constante c qui est la même pour toutes les formes de mouvement (types de lumières).

Si ξ_1, ξ_2, ξ_3 sont les coordonnées rectangulaires d'un point dans l'espace pour un tel système d'ondes, la première étant parallèle, les autres étant perpendiculaires à l'onde plane, et si ω_1, ω_2, ω_3 sont les composantes de la vitesse à ce point parallèles aux coordonnées à l'instant t, alors nous avons :

$$\frac{\partial\omega}{\partial\xi_2}=0, \frac{\partial\omega}{\partial\xi_3}=0.$$

Selon l'observation, nous avons d'abord

$\omega_1 = 0$,

ensuite, le mouvement est composé de mouvements dont la vitesse est c, l'un se propageant selon le sens positif de l'onde plane et le second selon le sens négatif. Si les composantes de la vitesse du premier sont ω' et celles du second ω'', alors les ω' restent inchangées si t augmente de dt et ξ_1 augmente de cdt, et les ω'' restent inchangées si t augmente de dt et ξ_1 de –cdt, et nous avons ω = ω' + ω''. De ceci, il suit que

$$\left(\frac{\partial\omega'}{\partial t}+c\frac{\partial\omega'}{\partial\xi_1}\right)dt=0, \left(\frac{\partial\omega''}{\partial t}-c\frac{\partial\omega''}{\partial\xi 1}\right)dt=0,$$

$$\frac{\partial^2\omega'}{\partial t^2}=-c\frac{\partial^2\omega'}{\partial\xi_1\partial t}=cc\frac{\partial^2\omega'}{\partial\xi_1^2}, \frac{\partial^2\omega''}{\partial t^2}=c\frac{\partial^2\omega''}{\partial\xi_1\partial t}=cc\frac{\partial^2\omega''}{\partial\xi_1^2}$$

et donc

$$\frac{\partial^2\omega}{\partial t^2}=cc\frac{\partial^2\omega}{\partial\xi_1^2}.$$

Ces équations nous donnent les résultats symétriques suivants :

$$\frac{\partial\omega_1}{\partial\xi_1}+\frac{\partial\omega_2}{\partial\xi_2}+\frac{\partial\omega_3}{\partial\xi_3}=0,$$

$$\frac{\partial^2\omega}{\partial t^2}=cc\left(\frac{\partial^2\omega}{\partial\xi_1^2}+\frac{\partial^2\omega}{\partial\xi_2^2}+\frac{\partial^2\omega}{\partial\xi_3^2}\right),$$

qui, exprimés dans le système de coordonnées d'origine, donnent des équations de la même forme, c'est-à-dire

$$(1)\quad \frac{\partial w_1}{\partial x_1}+\frac{\partial w_2}{\partial x_2}+\frac{\partial w_3}{\partial x_3}=0,$$

$$(2)\quad \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}=cc\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial x_3^2}\right),$$

Ces équations sont valides pour toute onde plane passant par les points (x_1, x_2, x_3) à l'instant t et il en est par conséquent de même pour tout mouvement combiné de telles ondes planes.

c. Le mouvement qui est la cause des deux types de phénomènes.

Des conditions établies pour u et w, il découle les conditions suivantes pour v, c'est-à-dire les lois du mouvement de la substance dans l'espace vide :

$$(\mathrm{I})\quad \frac{\partial v_1}{\partial x_1}+\frac{\partial v_2}{\partial x_2}+\frac{\partial v_3}{\partial x_3}=0,$$

$$\left(\partial^2 t-cc\left(\partial^2 x_1+\partial^2 x_2+\partial^2 x_3\right)\right)\left(\frac{\partial v_2}{\partial x_3}-\frac{\partial v_3}{\partial x_2}\right)=0$$

$$(\mathrm{II})\quad \left(\partial^2 t-cc\left(\partial^2 x_1+\partial^2 x_2+\partial^2 x_3\right)\right)\left(\frac{\partial v_3}{\partial x_1}-\frac{\partial v_1}{\partial x_3}\right)=0$$

$$\left(\partial^2 t-cc\left(\partial^2 x_1+\partial^2 x_2+\partial^2 x_3\right)\right)\left(\frac{\partial v_1}{\partial x_2}-\frac{\partial v_2}{\partial x_1}\right)=0,$$

comme cela s'obtient facilement si l'on effectue les opérations.

Ces équations montrent que le mouvement d'un point de la substance ne dépend que de mouvements dans les régions contiguës de l'espace et du temps, et leurs causes (complètes) peuvent être cherchées dans les effets dans leur voisinage.

L'équation (I) prouve notre affirmation ci-dessus selon laquelle la densité de la substance reste inchangée au cours de son mouvement ; du fait que

$$\left(\frac{\partial v_1}{\partial x_1}+\frac{\partial v_2}{\partial x_2}+\frac{\partial v_3}{\partial x_3}\right)dx_1dx_2dx_3dt,$$

qui comme conséquence de cette équation est égal à 0, exprime la masse de la substance qui entre dans l'élément spatial dx_1 dx_2 dx_3 pendant l'élément temporel dt, et que la masse contenue dans cet élément spatial reste par conséquent constante.

Les conditions (II) sont identiques à la condition que

$$\left(\partial^2 t-cc\left(\partial^2 x_1+\partial^2 x_2+\partial^2 x_3\right)\right)\left(v_1dx_1+v_2dx_2+v_3dx_3\right)$$

est égal à une différentielle complète dW. Donc

$$\left(\partial^2 t-cc\left(\partial^2 x_1+\partial^2 x_2+\partial^2 x_3\right)\right)\left(w_1dx_1+w_2dx_2+w_3dx_3\right)=0$$

et par conséquent

$$dW=\left(\partial^2 t-cc\left(\partial^2 x_1+\partial^2 x_2+\partial^2 x_3\right)\right)\left(u_1dx_1+u_2dx_2+u_3dx_3\right)$$

$$=\left(\partial^2 t-cc\left(\partial^2 x_1+\partial^2 x_2+\partial^2 x_3\right)\right)dV$$

ou du fait que $\left(\partial^2 x_1+\partial^2 x_2+\partial^2 x_3\right)dV=0$

$$=d\frac{\partial^2 V}{\partial t^2}\qquad ....$$

d. Expression commune pour les lois du mouvement de la substance et l'effet de la gravité sur le mouvement des corps pondérables.

Les lois de ces phénomènes peuvent être réunies à la condition que la variation de l'intégrale

$$\frac{1}{2}\int\left[\sum\left(\frac{\partial\eta_\iota}{\partial t}\right)^2 - cc\left[\left(\frac{\partial\eta_2}{\partial x_3}-\frac{\partial\eta_3}{\partial x_2}\right)^2+\left(\frac{\partial\eta_3}{\partial x_1}-\frac{\partial\eta_1}{\partial x_3}\right)^2 + \left(\frac{\partial\eta_1}{\partial x_2}-\frac{\partial\eta_2}{\partial x_1}\right)^2\right]dx_1\,dx_2\,dx_3\,dt\right]$$

$$+\int V\left(\sum\frac{\partial^2\eta_\iota}{\partial x_\iota\partial t}dx_1dx_2dx_3+4\pi dm\right)dt$$

$$+2\pi\int dm\sum\left(\frac{\partial x_\iota}{\partial t}\right)^2 dt$$

devient nulle sous les conditions aux limites appropriées.

Dans cette expression, les deux premières intégrales sont calculées sur tout l'espace géométrique, la dernière sur tous les éléments des corps pondérables, mais les coordonnées de tous les éléments des corps pondérables sont à déterminer comme fonctions du temps, et η_1, η_2, η_3,V comme fonctions de x_1, x_2, x_3 et t, de sorte qu'une variation satisfaisant leurs conditions aux limites ne produise qu'une variation du second ordre de l'intégrale.

Les quantités $\frac{\partial\eta}{\partial t}$ (= v) sont alors égales aux composantes de la vitesse du mouvement de la substance et V est égal au potentiel à l'instant t au point (x_1, x_2, x_3).

Notes du traducteur

1. Ici Riemann traite de la question de la substance qui remplit l'espace, qu'il appelle également « *éther* » en un autre endroit. Dans cette traduction, il en est également question dans l'expression « *particule de substance* », et parfois simplement sous le mot « *substance* », après que le concept de substance qui remplit l'espace ait été introduit. Ces expressions de substance qui remplit l'espace sont donc distinctes de « *atomes pondérables* », « *masses pondérables* » ou « *corps pondérables* ».

2. Le point d'interrogation et les parenthèses apparaissent dans l'allemand sans explication. S'agit-il d'indications de Riemann, ou est-ce que cela indique une incertitude concernant la lecture du manuscrit ?

FUSION

La science, passionnément !

Directeur de publication
Christophe Lavernhe

Directeur de la rédaction
Philippe Messer

Rédacteur en chef
Emmanuel Grenier

Rédaction
Christine Bierre, Pierre Bonnefoy, Benoit Chalifoux, Marsha Freeman, Pierre-Yves Guignard, Laurence Hecht, Marjorie Hecht, Lothar Komp, Yves Paumier, Rémi Saumont, Ralf Schauerhammer, Gil Rivière-Wekstein, Charles Stevens, Jonathan Tennenbaum.

Conseillers de la rédaction
Jacques Cheminade, Dino De Paoli.

Ont participé à ce numéro
Philippe Jamet, Ramtanu Maitra, Timothy Rush.

Dépôt légal
1er bimestre 2003
Commission paritaire n° 63876
ISSN 0293-5880
Imprimerie Stedi - 75018 Paris

Fusion
53 rue d'Hauteville
75010 Paris
Tél. : 01.42.46.72.67
Fax : 01.42.46.72.60
E. mail : fusion_e@club-internet.fr

Fusion est publié par les
Editions Alcuin, 53 rue d'Hauteville - 75010 Paris

Crédit photo
Archiv Preussicher Kulturbesitz : p.48 ; NASA : couv., p.4, p.14, pp.22-23, p.29, pp.30-31, pp.33-34, pp.36-41 ; Siemens : p.1 ; Caltech : p.5, p.12 ; NIOT : p.19 ; Institut de physique de Stockholm : p.16 ; Granger Collection : p.42 ; Library of Congress : p.44 ; Stiftung Stadtmuseum Berlin : p.28 ; NOOA Central Library : p.53 ; Santha Faiia : p.20 ; Université de Vienne : p.27 ; Mark Wade ; p.26 ; Dan Roam : p.25.