La quadrature du cercle

de Nicolas de Cues, cardinal, légat et évêque de Brixen[1]

Nicolas de Cues a écrit une dizaine de traités de mathématique dont la plupart concernent le problème de la quadrature du cercle. Nous remercions Jean-Marie Nicolle de nous avoir aimablement autorisé à publier sa traduction du De Quadratura circuli (1450) de Nicolas de Cues, d'après les Opera édités à Bâle par Henri Pétri en 1565.

Jean-Marie Nicolle est professeur agrégé de philosophie en « Lettres Supérieures » et chargé de cours à l'université de Rouen en épistémologie. Il est l'auteur d'une thèse intitulée Mathématiques et métaphysique dans l'oeuvre de Nicolas de Cues *ainsi que d'une* Histoire des méthodes scientifiques *(Paris, Bréal, 1994).*
Il a par ailleurs réalisé un site internet consacré à Nicolas de Cues :

http://perso.wanadoo.fr/jm.nicolle/cusa

Nous avons depuis quelque temps tiré de l'étude de la géométrie la spéculation la plus élevée et l'utilité la plus générale ; cependant, parmi les soucis innombrables et sérieux que requiert une légation apostolique, il s'est glissé, au cours de conversations agréables entre gens de sciences, l'assertion selon laquelle il est possible de connaître la quadrature du cercle, mais qu'elle n'a pas été trouvée. Nous y avons récemment réfléchi, comme toujours à cheval, et nous avons consigné ce à quoi nous sommes parvenus.

Nous lisons que personne n'est parvenu plus près de cette connaissance qu'Archimède[2] qui, le premier, montra l'égalité d'un rectangle et d'un cercle dans lequel le demi-diamètre est multiplié par la demi-circonférence : s'il en est bien ainsi, si cette évaluation est égale, il est nécessaire de démontrer qu'elle n'est ni plus grande, ni plus petite. Car dans tous les polygones réguliers – isopleures et isopérimétriques – desquels seulement nous parlons dans cet écrit, si l'on multiplie le demi-diamètre du cercle inscrit par la demi-circonférence, il en résulte un rectangle égal. Euclide a montré qu'il est possible aussi de construire facilement une moyenne proportionnelle entre le demi-diamètre et la demi-circonférence. C'est pourquoi, avec cette équivalence du côté du carré, je saurai quelle ligne droite est égale à la circonférence du cercle et je montrerai qu'il est certain qu'elle en est la quadrature. Cependant, Archimède qui croyait être le premier à avoir trouvé cette dernière partie au moyen de la spirale a manqué la vérité. En effet, la spirale ne se laisse pas décrire, si ce n'est par un point mû à partir du centre sur le demi-diamètre en même temps que celui-ci tourne autour pour dessiner le cercle. Le dessin de la spirale suppose donc ces mouvements par lesquels on obtient le rapport du demi-diamètre à la circonférence. On présuppose donc ce qui est demandé. Alors, il sera plus facile de donner une ligne droite égale à une ligne circulaire que de figurer correctement la spirale.

Nous allons aussi considérer le triangle et le cercle qui s'opposent en grandeur de surface. Dans le triangle, les demi-diamètres des cercles inscrits et circonscrits s'opposent au demi-diamètre du cercle dans lequel l'inscrit et le circonscrit coïncident, car ils diffèrent le plus dans le triangle : effectivement, le demi-diamètre du circonscrit est le plus grand et celui de l'inscrit est le plus petit, et, mis ensemble, ils sont les plus courts. A l'inverse, dans le cercle où les deux sont joints, le diamètre du cercle est le plus grand. C'est pourquoi nous savons que tous les polygones intermédiaires, isopérimétriques et équilatéraux, ordonnés selon leur grandeur, s'approchent de l'égalité avec le demi-diamètre du cercle. Si donc on marquait la quantité de l'excès du demi-diamètre du cercle sur le demi-diamètre du cercle inscrit dans le triangle, et la quantité par laquelle le demi-diamètre du cercle est plus petit que le demi-diamètre du cercle circonscrit au triangle, alors tout polygone intermédiaire en surface excèderait par le demi-diamètre de son inscrit le demi-diamètre de l'inscrit dans le triangle, et il tiendrait la même proportion, en diminution, entre le demi-diamètre de son circonscrit et le demi-diamètre du circonscrit au triangle[3]. En effet, comme ces grandeurs varient en sens inverse, il est impossible que leur rapport varie en sens inverse du rapport de leur surface. Aussi est-il toujours nécessaire que, s'il y a excès en augmentation, il y ait défaut en diminution : si une grandeur suit une variation, l'autre s'ensuit de même, ni plus ni moins que l'autre. Il en sera ainsi dans l'augmentation et la diminution de tous les polygones, selon une proportion réciproque unique. C'est pourquoi lorsqu'un rapport nous est donné et que nous le connaissons dans d'autres polygones connus, alors nous le connaissons aussi pour le cercle. Et parce que l'augmentation et la diminution, dans le cercle, jointes ensemble, sont égales au demi-diamètre [du cercle] inscrit dans le triangle, alors, s'ils sont divisés par le rapport trouvé selon ce demi-diamètre du cercle inscrit dans le triangle et que l'on ajoute la plus grande portion à ce demi-diamètre du cercle inscrit dans le triangle, on aura le demi-diamètre du cercle isopérimétrique et tout ce que l'on cherche.

Nous allons te rendre cette partie plus claire de la façon suivante (**figure 1**). Avec la ligne *ab* divisée en trois parties, on dessine le triangle *c,d,e*. Sur son côté *cd,* on reporte *ik*, un quart de la droite *ab* ; de là, on construit le carré *iklm*. On dessine les cercles inscrits et circonscrits ; soit *fg* le demi-diamètre du cercle inscrit dans le triangle, *fh* celui du circonscrit ; soit *ng* celui du cercle inscrit dans le carré, *no* celui du circonscrit ; on trace ensuite la ligne *fh,* et sur son milieu on marque le point *g*.

On tire (**figure 2**) à partir de *f, g, h*, des lignes de longueur quelconque, puis, à équidistance[4] de *fh*, on tire *tn* dont le milieu est *aa* ; ensuite, on marque le demi-diamètre du cercle inscrit dans un polygone isopérimétrique quelconque, par exemple un carré, soit *np*, et le demi-diamètre du circonscrit, *no*. On tire de *g* par *p* une droite à l'infini, et de même de *h* par *o* une droite à l'infini. On note *q* le point où elles concourent. Puis

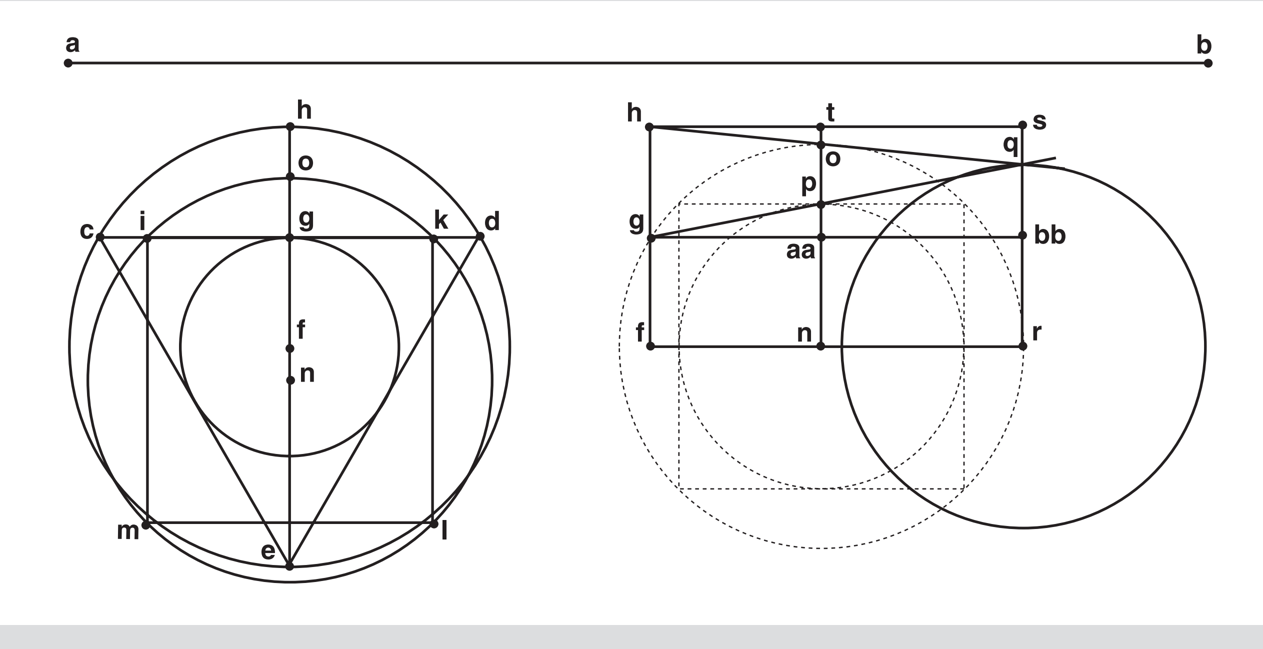

Figure 1 et **figure 2**.

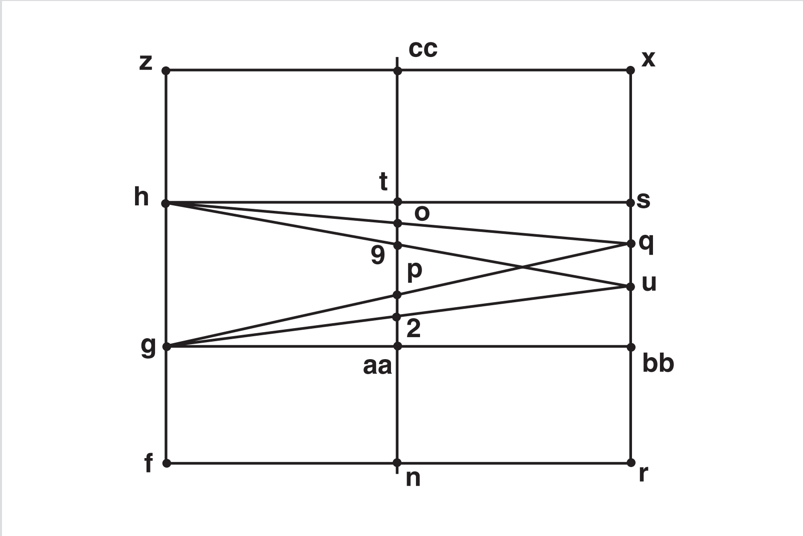

Figure 3.

l'on tire par *q* à équidistance de *fh* la ligne *sr*, au milieu de laquelle on note *bb*. Nous affirmons que *rq* est le demi-diamètre du cercle cherché, dont la circonférence est égale à la droite *ab*.

Cela se prouve facilement de plusieurs façons. Donc, d'abord, sur la figure précédente, on pose la ligne *gbb* ; elle correspond à la différence de surface entre le triangle et le cercle isopérimétrique ; *rs* est une ligne toujours en déplacement équidistant au côté *fh* ; il est manifeste que les lignes *hq* et *gq* [sont celles] sur lesquelles on découpe toutes les différences entre les demi-diamètres des cercles inscrits et circonscrits de tous les polygones, depuis le triangle jusqu'au cercle, où ils coïncident. Il est manifeste aussi que ces droites découpent d'un même mouvement sur la ligne *bbg* toutes les différences de surface entre le triangle et le cercle. En effet, plus petite est la différence des différents demi-diamètres, plus grande est la figure. Aussi, la surface du cercle est la plus grande des figures parce que les demi-diamètres y coïncident, et le triangle est la plus petite figure, parce que là, les demi-diamètres diffèrent le plus. Soit donc la ligne *tn* en mouvement, qui coupe la ligne *gbb* au point *aa* ; soit *po* la différence des demi-diamètres dans le carré ; si *gbb* est comme la différence en surface du triangle et du cercle isopérimétriques, alors *gaa* est comme la différence de surface entre le triangle et le carré. Et parce que *np* est par supposition le demi-diamètre du cercle inscrit dans le carré, et *aap* est son excès sur le demi-diamètre *fg* du cercle inscrit dans le triangle, de là, *bbq* sera l'excès du demi-diamètre du cercle isopérimétrique sur le demi-diamètre du cercle inscrit dans le triangle. En effet, comme on le sait, *bbg* est à *aag* comme *bbq* est à *aap*. Les différences des demi-diamètres des cercles inscrits dans les polygones isopérimétriques correspondent aux différences de surface. La différence de surface dans les polygones réguliers isopérimétriques ne peut venir d'autre part que de la différence des demi-diamètres des cercles inscrits ; on sait que la surface résulte du produit du demi-diamètre en question, qui varie dans ces diverses figures, par la demi-circonférence, qui reste toujours la même. Ainsi, si tu poses la droite *bbs*, à savoir les deux excès des demi-diamètres, comme l'excès en surface du cercle sur le triangle, alors tu trouves un excès de surface semblable dans le carré, comme la ligne égale aux deux lignes *to* et *paa*, parce qu'il y a un rapport de celles-ci à *sbb*, qui est comme celui de *paa* à *bbq*, comme ci-dessus. Ou bien, si tu dis que la surface du triangle est plus petite que celle du cercle comme la ligne *hg* [du triangle], tu diras que celle du carré est plus petite comme *po*[5].

Mais, si maintenant tu nies et tu soutiens que le demi-diamètre du cercle est plus petit, par exemple (**figure 3**) que son extrémité est au milieu entre *s* et *u*, le terme de la ligne *g*, de sorte que *ru* est le demi-diamètre du cercle isopérimétrique, alors, si *us* s'étend de telle façon qu'il devienne égal à *ru* et à *rx*, et si, à l'égal de *rx*, il s'étend autant que *fh* et fait *fh* comme *rx*, puis *fz* comme *rx*, alors tire la ligne *zx*, trace depuis *u* les lignes sur *g* et *h*, et là où elles coupent la ligne *tn*, marque *2* et *9*. Prolonge *tn* jusque sur *zx*, et ainsi fais *ccn* comme *rx*. Je dis que si le diamètre de l'inscrit dans le cercle isopérimétrique dépasse le demi-diamètre du cercle inscrit dans le triangle, l'excès fait *bbu*, et alors le demi-diamètre du cercle inscrit dans le carré dépasse de la quantité *aa2*. Donc, si le demi-diamètre du cercle inscrit dans le carré ajoute la quantité *aap*, alors le demi-diamètre du cercle isopérimétrique ajoute la quantité *bbq*. De là, il apparaît que le rapport des additions[6] est comme *bbu* à *aa2*. On connaît l'addition dans le carré, on sait qu'elle est égale à *aap*. Donc, elle sera dans le cercle comme *bbq*, qui forme un seul et même rapport de *aap* à *bbq*, comme *aa2* à *bbu*.

On va démontrer ce qu'est ce rapport. En effet, si l'on pose que *ru* est le demi-diamètre du cercle inscrit dans le cercle, alors *ux* sera le demi-diamètre du circonscrit. Ces deux lignes coïncident dans le cercle isopérimétrique. Il est manifeste que *rx* est la ligne formée de ces deux demi-diamètres, de même *fz* leur est égale et est formée des deux demi-diamètres de l'inscrit dans le triangle et du circonscrit au triangle. Donc dans tous les polygones entre le triangle et le cercle, les deux demi-diamètres sont tels qu'ils ne seront ni plus petits que *fz,* ni plus grands que *rx*, mais resteront toujours égaux. Dans le carré, *ncc* sera donc égale à ces deux demi-diamètres [ensemble]. Et parce que *29* est nécessairement égale à *po*, alors le triangle *ghq* est égal au triangle *ghu* ; si *qu* et *gh* sont équidistantes, et *o2* et *gh* sont équidistantes, alors *92* est égale à *po*, comme tu le sais d'après Euclide 37 du Livre I, et 4 du livre VI [7]. Mais *po* est l'excès du demi-diamètre du circonscrit au triangle sur le demi-diamètre de l'inscrit dans le même triangle, donc [est égal à] *29* ; et comme *n2* est égale à *cc9*, alors *n2* est égale au demi-diamètre de l'inscrit dans le carré, et *2cc* est égale au

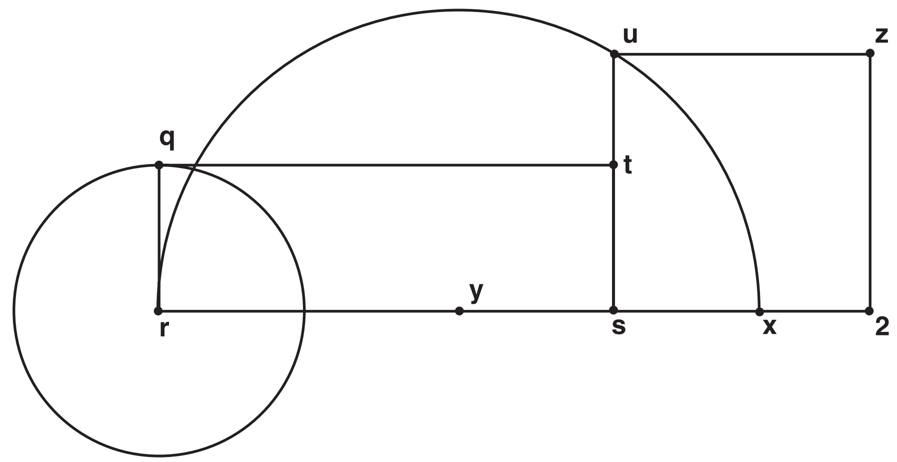

Figure 4.

demi-diamètre du circonscrit au même carré. Si donc on admet que le demi-diamètre du cercle excède de *bbu* le demi-diamètre de l'inscrit dans le triangle, alors nécessairement, il excède le demi-diamètre de l'inscrit dans le carré de *aa2*. On sait que les excès de ces surfaces sur la surface du triangle résultent uniquement de l'excès en surface dans les polygones réguliers et isopérimétriques. Le rapport de ces additions sera comme de *aa2* à *bbu*, ce qui était à prouver. Et on peut procéder ainsi dans tous les polygones comme dans le carré. Par là, la proposition est évidente.

rq est le demi-diamètre du cercle, *rs* la moitié de *ab*, c'est-à-dire de la circonférence du cercle, *rqts* le rectangle égal au cercle, *sx* égale à *rq*, *y* le point au milieu de *rx* et le centre du cercle *ryx*, *su* la moyenne proportionnelle entre *rs* et *sx*, d'après VI, 9, *suz2* le carré qui est de même surface que le cercle de demi-diamètre *rq* (**figure 4**).

Autrement encore : l'excès de la surface du cercle sur la surface du triangle est maximale et la différence des demi-diamètres des cercles inscrit et circonscrit [pour le cercle] est nulle ou simplement minimale, parce qu'elle ne peut être plus petite. Mais la différence des demi-diamètres des cercles inscrit et circonscrit au triangle est maximale et l'excès de la surface de celui-ci sur sa propre surface est nulle ou simplement minimale. Qu'une ligne quelconque *ab* [**figure 5**] soit comme la différence entre les demi-diamètres dans le triangle et l'excès de la surface du cercle sur la surface du triangle, que cette ligne soit carrée, que ce soit le carré *abcd*, que *ab* soit comme la différence des demi-diamètres avec la différence simplement minimale du triangle avec sa propre surface, et *cd* l'excès de la surface du cercle sur la surface du triangle avec la différence simplement minimale des demi-diamètres. Que l'on trace la ligne diamétrale[8] *bc*. Je dis que dans tous les polygones intermédiaires entre le triangle et le cercle, les lignes qui représentent les excès de surface sur la surface du triangle, ajoutées à la différence des demi-diamètres, ne peuvent être ni plus grandes ni plus petites que *ab* ou *cd,* comme cela va de soi.

Que l'on trace maintenant *ef*, une ligne égale et équidistante de *ab* et de *cd* , qu'elle soit coupée par *bc* au point *g* ; que *ge* soit comme la différence des demi-diamètres dans le carré ; il est manifeste que *gf* sera l'excès de la surface du carré sur la surface du triangle. Le rapport de la surface du carré sur la surface du triangle sera comme l'excès de la surface du cercle sur la surface du triangle, c'est-à-dire comme *gf* à *cd*. On marque sur *fg* l'addition du demi-diamètre de l'inscrit dans le carré sur le demi-diamètre de l'inscrit dans le triangle, soit *fh* ; et l'on trace une ligne de *b* par *h* jusqu'à la ligne *cd*, et le contact est *i.* Je dis que *di* est l'addition du demi-diamètre du cercle isopérimétrique sur le demi-diamètre du cercle inscrit dans le triangle, que le rapport de *fg* sur *dc* est celui de *fh* sur *di*, mais que la différence de surface entre les polygones réguliers et isopérimétriques avec la surface du triangle ne résulte que de l'addition différente des demi-diamètres des cercles inscrits sur le demi-diamètre du cercle inscrit dans le triangle. Le rapport des excès de surface sur la surface du triangle est donc le rapport des additions des demi-diamètres des cercles inscrits sur le demi-diamètre du cercle inscrit dans le triangle. Par là, ce qui était cherché est évident.

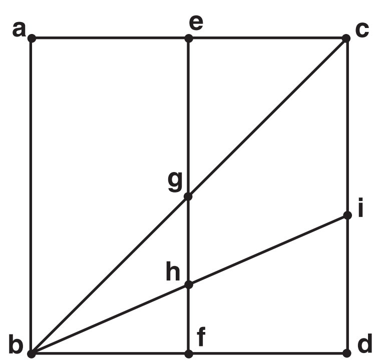

Figure 5.

De là, on peut déterminer

maintenant la science parfaite des cordes et des arcs. En effet, s'il y a un seul rapport[9] qui additionne le demi-diamètre du cercle inscrit dans un polygone régulier et isopérimétrique après le triangle, au demi-diamètre du cercle inscrit dans le triangle, et qui additionne le demi-diamètre du cercle circonscrit au triangle au demi-diamètre du cercle circonscrit à ce polygone : et si ces additions ont une seule différence, à savoir la flèche[10] , elles sont ensemble égales à la flèche du côté du triangle, comme c'est clairement établi de ce qui précède ; alors, quand on connaît le rapport de ces additions, que l'on n'atteint pas cependant en nombre comme on n'atteint pas une médiété double, l'art est trouvé de tout savoir sur les cordes et les arcs.

Mais l'on cherche aussi le rapport des excès dans les nombres par approximation, ainsi : que le demi-diamètre du cercle circonscrit au triangle mesure 14 et le demi-diamètre du cercle inscrit 7, dont le carré est 49 ; le carré du demi-côté du triangle fera trois fois plus, soit 147. Le carré du demi-diamètre du cercle circonscrit fera quatre fois plus, soit 196. Le demi-côté du carré sera donc la racine 9/16 et les carrés du demi-côté du triangle feront la racine de 82 avec 11/16 ; le demi-diamètre du cercle inscrit en fera autant ; le demi-diamètre du cercle circonscrit sera la racine du nombre double, soit 165 et 6/16. Soustrais donc la racine de 49 à la racine de 82 et 11/16. La différence est l'addition du demi-diamètre du cercle inscrit dans le carré sur le demi-diamètre du cercle inscrit dans le triangle, ce qui fait quelque chose de plus que 2. Soustrais la racine de 165 et 6/16 à la racine de 196, cela ne fait guère plus que 1. Par là, tu as les additions et, par elles, le rapport qui permet de tout chercher.

Si tu extrais ces additions de la flèche [du côté] du triangle, c'est-à-dire 7, alors il reste la flèche [du côté] du carré. Si tu divises 7 selon le rapport des additions susdit, et si tu ajoutes la plus grande part [du demi-diamètre du triangle] au demi-diamètre du cercle inscrit dans le triangle, tu as le demi-diamètre du cercle isopérimétrique.

Tu pourras aussi, à partir du carré du côté du triangle ou du côté du carré, trouver le carré du côté que tu voudras et donner le polygone ; de ce savoir et du rapport des excès, on en vient à la flèche et au demi-diamètre du cercle inscrit, et de là, à la corde. C'est la suprême perfection de l'art géométrique, à laquelle nous n'avons pas lu jusqu'à présent que les Anciens soient parvenus. L'art des transmutations géométriques, art que nous avons décrit auparavant, est maintenant suffisamment accompli puisqu'il aboutit à la quadrature du cercle. Et nous pensons que plus rien de ce qu'il y a à savoir en géométrie ne restera caché à celui qui veut chercher avec diligence dans ce domaine. Si j'ai beaucoup écrit, c'est pour montrer la puissance de l'art des coïncidences par lequel on pénètre l'obscurité de toute question. C'est grâce à la seule coïncidence des demi-diamètres des cercles inscrit et circonscrit, différents dans tous les polygones, et qui coïncident seulement dans le cercle, que nous avons mené cette recherche jusqu'au but.

Gloire à Dieu.

Notes du traducteur

1. Nicolas de Cues écrit ce petit traité en 1450 pour démontrer la puissance de sa méthode, à savoir la coïncidence des opposés. Cette démonstration peut nous paraître aujourd'hui quelque peu lourde et répétitive. Mais il ne faut pas oublier que Nicolas de Cues ne disposait ni du symbolisme algébrique, ni de l'analyse géométrique, ni du calcul fonctionnel. Sa démonstration repose uniquement sur des rapports proportionnels, comme dans l'Antiquité.

Après avoir exposé rapidement le problème de la quadrature du cercle et quelques avancées historiques chez Euclide et Archimède, Nicolas de Cues avance le principe de sa démonstration : dans les polygones réguliers et isopérimétriques, variant du triangle au carré, etc., jusqu'au cercle, la différence de surface entre le cercle inscrit et le cercle circonscrit est extrême dans le triangle, puis s'amenuise dans le carré, etc., jusqu'au cercle. Dans le cercle, on peut considérer que le cercle inscrit et le cercle circonscrit coïncident. Selon Nicolas de Cues, il suffit de déterminer la proportion entre ces cercles, au moyen de leurs demi-diamètres, pour trouver le rapport entre la surface d'un cercle et celle d'un carré.

Il procède en trois temps : - d'abord, il montre que les variations de lignes expriment les variations de surface (figure 1 et figure 2) ; - puis, reprenant une objection possible, il montre la régularité des variations (figure 3) ; enfin, après avoir récapitulé les rapports entre cercle, rectangle et carré, il reprend la même démonstration de la régularité des variations (figure 5).

La fin du texte opère une généralisation trigonométrique de son principe, et procède à un calcul approché de π, avant de conclure sur un éloge de la coïncidence des opposés.

2. Archimède, *La mesure du cercle*, Prop. I.

3. Pour mieux comprendre le texte, il nous faut introduire le symbolisme littéral auquel nous sommes aujourd'hui habitués. Si l'on appelle n le nombre de côtés du polygone, r le demi-diamètre de son cercle circonscrit, ρ le demi-diamètre de son cercle inscrit, on trouve que si n croît, alors $r_n - \rho_n$ décroît. D'où l'on peut tirer le rapport suivant entre le triangle et un autre polygone isopérimétrique et régulier quelconque :

$$\frac{n_3}{n} = \frac{r_3 - \rho_3}{r_n - \rho_n}$$

4 « A équidistance » signifie « en parallèle ».

5. Selon l'emplacement de *q*, les rapports entre les côtés des triangles rectangles semblables expriment toujours la même proportion

$$\frac{r - \rho_3}{r_3 - \rho_3} = \frac{r - \rho_4}{r_4 - \rho_4} = \frac{r - \rho_n}{r_n - \rho_n}$$

6. A partir de ce passage, Nicolas de Cues utilise l'expression ambiguë *« additio super »* qui désigne, non l'opération d'ajouter, mais le résultat de cette opération, en quelque sorte le surplus ; on retrouve l'idée d'excès mais l'on gardera la traduction « addition sur ».

7. D'après Euclide, I, 37 (*« Les triangles, qui sont sur la même base et dans les mêmes parallèles, sont égaux entre eux »*), l'égalité des surfaces des triangles dépend de la même base entre les mêmes parallèles. D'après Euclide, VI, 4 (*« Dans les triangles équiangles, sont en proportion les côtés autour des angles égaux, et homologues ceux qui sous-tendent les angles égaux »*), la proportion des droites correspond à des triangles de mêmes angles.

8. Autrement dit la diagonale.

9. C'est là l'erreur de Nicolas de Cues qui prétend traduire la variation des demi-diamètres par une ligne droite. Son ami Paolo Toscanelli la lui signale dans une lettre de l'hiver 1453-1454 : *« Mais je ne vois pas pourquoi les deux lignes hb et bd enfermant tous ces excès des premières et des secondes, ne peuvent pas être des courbes de tout genre de courbure, et alors la démonstration n'aboutirait pas. »* Le Cusain ne parviendra pas à surmonter l'obstacle et abandonnera la méthode des isopérimètres dans ses tentatives suivantes.

10. Il faut prendre le concept de è-che au sens le plus ordinaire de la droite perpendiculaire au milieu de la corde de l'arc.