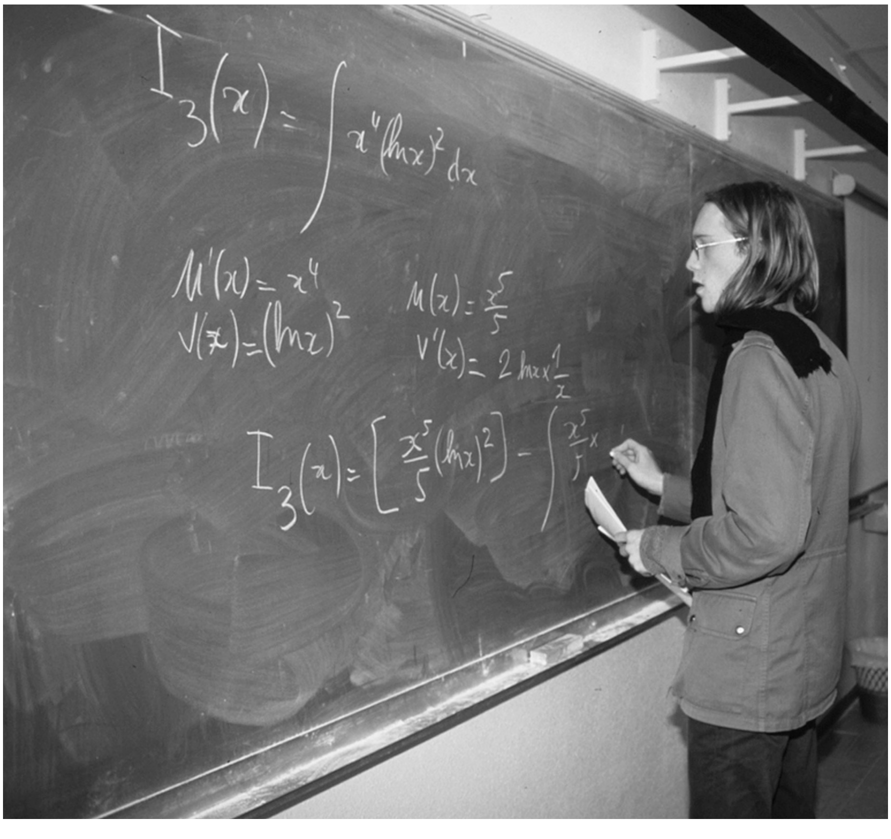
Le véritable calcul différentiel...

comme on ne vous l'a jamais appris

L'aspect fondamental du calcul différentiel ne réside pas dans l'utilisation mécanique d'un certain algorithme, mais par la manière même dont il a été inventé. L'invention de ce nouveau langage par Leibniz a, en effet, permis d'introduire une nouvelle manière de penser l'Univers, mettant en avant la notion de changement. A toutes les époques, la principale attaque que les ennemis de Leibniz ont lancé contre son calcul a été de prétendre qu'il permettrait d'arriver au bon résultat mais qu'il reposait sur une base mystique. Ils ont donc prétendu le reconstruire de manière « rigoureuse » en l'exprimant dans la façon de penser de l'ancienne mathématique, effaçant ainsi la méthode qui avait conduit à ce changement d'axiomes.
C'est ainsi que le théorème des limites de Cauchy, qui sert de base à l'enseignement de ce calcul dans les écoles, dénature une méthode pourtant destinée à développer l'esprit créateur des élèves.



Ernst Schapiro

L'invention du calcul différentiel est l'une des plus grandes découvertes de l'histoire. Elle a permis de résoudre un grand nombre de problèmes mathématiques par la création d'un nouveau langage – d'une nouvelle métaphore. Ce fut donc une grande percée créatrice, mais l'on peut prouver que le processus par lequel cette découverte a été réalisée n'a jamais été enseigné correctement à tous ceux qui ont étudié ce calcul. Certes, on enseigne le concept fondamental de continuité (qui, pour Leibniz, allait de pair avec la notion de causalité) mais d'une manière à faire marcher les gens sur la tête. Au lieu d'être présentée comme quelque chose d'essentiel, la continuité est définie de nos jours comme une propriété secondaire d'un « ensemble de points ».

Je me suis intéressé à l'origine du calcul différentiel après avoir assisté à une conférence sur le sujet à Buffalo en 1978. Je me suis alors procuré un livre cité par le conférencier, intitulé *The history of the calculus and its conceptual development*, de Carl Boyer. [1] Ce livre mentionnait un autre ouvrage : *The early mathematical manuscripts of Leibniz.* [2] Lorsque je suis arrivé à New York en 1980, j'ai pu me procurer une copie des travaux de Leibniz par l'intermédiaire d'une société qui commercialisait des livres épuisés. Après m'être débattu pendant quelques semaines avec l'ouvrage, j'ai réussi à avoir une idée générale de ce que Leibniz faisait avec ses suites. Depuis, j'ai essayé de comprendre pourquoi c'est Leibniz, et non pas d'autres grands mathématiciens tels que Pascal, Fermat ou Huygens, qui a fait la percée. Je pense que la réponse à cette question demande de comprendre sa méthode philosophique.

Dès son adolescence, Leibniz s'est intéressé à la métaphysique et à la méthode scientifique. Sa *Dissertation sur l'art combinatoire* [3] écrite à l'âge de 20 ans concerne la manière d'analyser mathématiquement des propositions complexes en propositions plus simples. Au cours de ses travaux, il a dû présenter ses propres définitions de certains mots usuels. En fait, l'invention du calcul infinitésimal faisait partie de son programme visant à enrichir le langage en Allemagne. Ce calcul lui-même reposait sur de nouvelles métaphores poétiques en vue de résoudre des problèmes jusqu'alors sans solution. Il a ainsi permis à chacun de conceptualiser quelque chose qui avait été précédemment très difficile à saisir.

Le principe de découverte

Leibniz avait pour projet de représenter toutes les conceptions de mathématique, de droit, de science physique et de morale par une sorte de langage universel dans lequel serait inscrit le principe même de découverte. Il décrivait ce principe comme celui permettant l'augmentation des pouvoirs de la raison, à la manière dont l'invention du télescope avait permis l'augmentation des pouvoirs de la vision. Il l'appela « *caractéristique universelle* ». Il n'a malheureusement pas pu obtenir la collaboration de tous les scientifiques de son temps.

Cependant, pour poser les fondations de son projet, il a développé de nombreuses définitions rigoureuses dans lesquelles étaient inscrites, là où c'était possible, l'élément de causalité. Il insistait sur le principe selon lequel le *prédicat* est nécessairement impliqué dans le *sujet*. Ceci était vrai, que les vérités en question soient des vérités contingentes ou des vérités nécessaires (vérités *a priori*). Une *vérité première* est une vérité qui est prédicat de quelque chose d'elle-même, ou qui nie son opposé. Par exemple, *A est A*, ou *A n'est pas non-A*. Ces vérités sont appelées *identités*. Toutes les autres vérités sont réductibles à des vérités premières par le biais de définitions ou de concepts.

Leibniz a démontré, à titre d'exemple, la vérité qui jusque-là était considérée comme un axiome : *« Le tout est plus grand que la partie. »* Voici comment il a procédé :

« La proposition "Le tout est plus grand que la partie" peut être prouvée par un syllogisme dans lequel la majeure est une définition et la mineure une identité. La majeure est la suivante : si une chose est égale à la partie d'une autre chose, alors la première est appelée la moindre et la seconde, la plus grande. Si à cette définition, on adjoint l'axiome identitaire et indémontrable suivant : "Tout ce qui possède une grandeur est égal à lui-même", c'est-à-dire A = A, nous avons alors le syllogisme :

« Tout ce qui est égal à une partie d'autre chose est plus petit que cette autre chose (par la définition),

« Mais la partie est égale à la partie du tout (par l'identité),

« Donc la partie est plus petite que le tout.

CQFD. » [4]

Comme Leibniz l'écrira plus tard, cette preuve était importante car, sans elle, quelqu'un pourrait affirmer qu'il existe une exception à l'axiome. De ces considérations, il est parvenu au principe selon lequel le *prédicat* ou *conséquent* est inhérent à l'*antécédent*. Il reformula cela par un principe de causalité : *rien n'arrive sans une raison*. Leibniz écrit : *« Cependant, dans les vérités contingentes, bien que le prédicat soit inhérent au sujet, on ne pourra jamais le démontrer, pas plus que l'on ne pourra réduire la proposition à une équation ou une identité, car l'analyse va à l'infini, Dieu seul étant en mesure de voir, non le dernier terme de l'analyse car il n'existe pas de dernier terme, mais la connexion des termes, ou l'inclusion du prédicat dans le sujet, du fait qu'Il voit tout ce qui est dans la série. Cette vérité vient en effet de Son entendement et de Sa volonté, et exprime ainsi Son infinie perfection, et l'harmonie de la série des choses dans leur ensemble, chacune d'entre elles à sa manière particulière. »* [5]

Comme exemple de telles suites infinies, il donne le rapport du côté d'un carré à sa diagonale.

Ainsi, ce que Leibniz a élaboré en mathématique n'était qu'un aspect de son programme philosophique, son grand dessein. Il espérait que les questions théologiques puissent être approchées avec la même ri-gueur que les mathématiques. Il écrit en 1679 dans une lettre à Jean Frédéric, duc de Brunswick-Hanovre :

« *Mais les querelles sont plus fréquentes que les démonstrations en philosophie, en morale et en théologie et la plupart des lecteurs auront contre un tel projet les mêmes préjugés que rencontrent habituellement les travaux sur ces questions ; car l'on pensera que l'auteur a simplement transcrit et posé le problème, et qu'il n'est probablement qu'un esprit superficiel à peine versé dans les sciences mathématiques, et que par conséquent il n'est pas capable d'une véritable démonstration. Ayant ces considérations à l'esprit, j'ai essayé de désabuser chacun, en me plongeant un peu plus qu'il n'est commun dans les mathématiques, où je crois avoir fait des découvertes qui ont déjà reçu l'approbation des plus grands esprits de l'époque et qui apparaîtront bientôt dans tout leur éclat. C'était la véritable raison de mon long séjour en France – me perfectionner dans cette matière, et établir ma réputation, car lorsque j'arrivai là-bas, je n'étais en rien géomètre, ce que je devais devenir afin d'établir mes démonstrations d'une manière rigoureuse. Je voudrais donc tout d'abord publier mes découvertes en analyse, en géométrie et en mécanique, et je me risquerais à dire que ces dernières ne sont en rien inférieures à celles que nous ont léguées Galilée et Descartes. Les gens pourront alors juger à partir d'elles si je sais comment découvrir et démontrer. Je n'ai pas étudié les sciences mathématiques comme fin en soi, mais afin de les utiliser un jour pour établir mon crédit et servir ma piété.* » [6]

Séries et différences

Au cours de son travail sur les identités, Leibniz a fait la remarque suivante dont les conséquences étaient restées jusque-là inaperçues.

Considérons la suite croissante de nombres A, B, C, D, E, et examinons les différences :

$$A + \underbrace{(B-A)}_{L} + \underbrace{(C-B)}_{M} + \underbrace{(D-C)}_{N} + \underbrace{(E-D)}_{O} = E$$

$$E - A = L + M + N + O.$$

Ceci était identiquement vrai pour toute suite de nombres croissante ou décroissante. Il s'intéressa alors à des suites de nombres simples telles que celle des carrés :

0 1 4 9 16 25

1 3 5 7 9

La seconde ligne représente les différences entre deux carrés successifs. Il remarqua que les différences de ces différences sont toujours égales à 2.

Il construisit une table de nombres pour représenter les formations de sommes et de différences par une sorte de sténo :

1	1	1	1	1	1	1
1	2	3	4	5	6	7
1	3	6	10	15	21	28
1	4	10	20	35	56	84
1	5	15	35	70	126	210
1	6	21	56	126	252	462
1	7	28	84	210	462	924

Si l'on observe cette table horizontalement, on voit que chaque terme est égal à la somme de tous ceux de la ligne supérieure en partant de la gauche jusqu'à celui qui se trouve juste au dessus de lui. Ainsi, 10 = 1 + 2 + 3 + 4. Chaque terme est égal à la différence de celui qui est juste en dessous de lui et de celui qui est juste à la gauche de ce dernier. De plus, si l'on observe les diagonales [7], on voit que leurs termes nous donnent les coefficients de l'élévation du binôme x + 1 à toutes les puissances.

Ainsi :

$(x + 1)^2 = x^2 + 2x + 1$

$(x + 1)^3 = x^3 + 3x^2 + 3x + 1$

Ceci peut être traduit de façon géométrique : si l'on convertit un carré dont le côté mesure deux unités en un carré de trois, cela revient à adjoindre au premier un carré de 1 × 1 et deux rectangles de 2 × 1 (**Figure 1**).

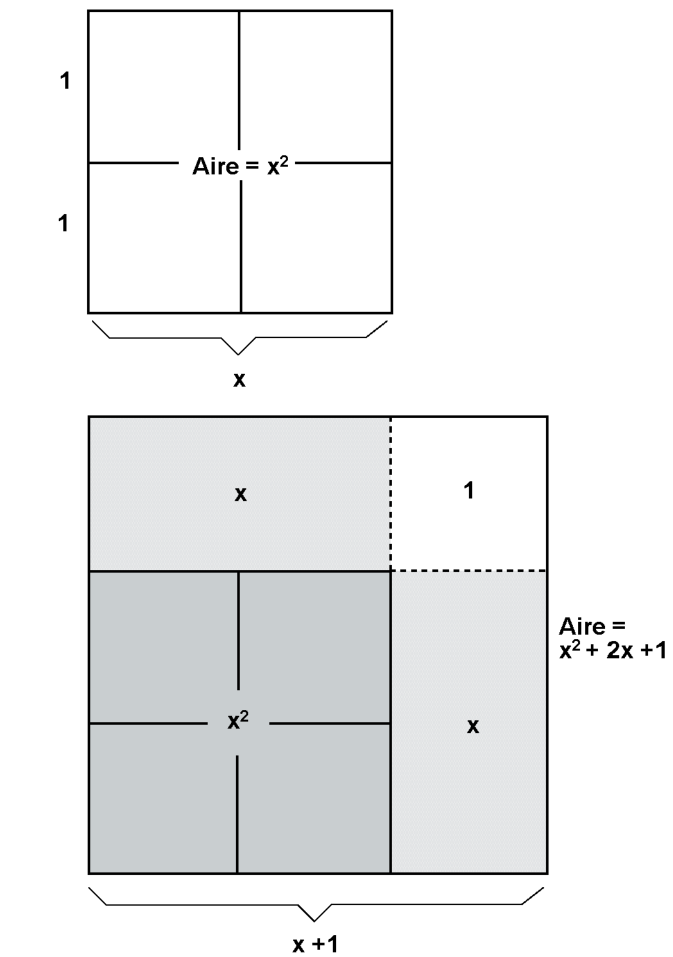


Figure 1.

L'expression $(x + 1)^3$ a également une interprétation avec des cubes. [8] Le tableau de Leibniz était une manière de construire des suites de nombres, car chaque ligne était construite en prenant la somme des nombres de la ligne supérieure et ce principe pouvait être étendu aussi loin qu'on le souhaitait. Les sommes de sommes étaient les sommes secondes et les différences de différences, les différences secondes. Nous verrons plus loin que les notions de dérivée et de dérivée seconde remontent à ces idées simples de différences et différences secondes.

Leibniz voyait les suites de nombres comme étant analogues aux séquences de causalités contingentes, pouvant être ramenées à une cause originelle.

Il commence, par exemple, son essai sur l'art combinatoire par une preuve de l'existence de Dieu, basée sur le fait que tous les mouvements de l'Univers ont, de toute nécessité, une cause première. La cause de la séquence peut ne pas apparaître à première vue. Cependant, le principe générateur doit exister, du fait que rien ne peut exister sans avoir une cause. Une suite de nombres représente un principe de causalité. Nous avons déjà vu comment certaines suites, telles que la suite des carrés et la suite des cubes, ont une interprétation simple.

On peut considérer que la suite appelée « suite géométrique » représente la croissance autosimilaire, comme dans le cas de la formation d'une spirale autosimilaire – c'est-à-dire que l'angle qu'elle forme avec l'horizontale est toujours le même – tracée sur la surface d'un cône de la base au sommet (**Figure 2**). Considérons la suite suivante :

1, 1/3, 1/9, 1/27, 1/81,...

Ainsi, si l'on décide ici que 1 représente la hauteur totale du cône à parcourir par la spirale, il reste au bout d'un premier tour, un tiers de la hauteur, il reste au bout du second tour, un neuvième, etc.

Leibniz a mis en évidence quelque chose d'intéressant au sujet de cette série en utilisant sa nouvelle approche : la suite des différences d'une suite géométrique est elle-même une suite géométrique. C'est une conséquence de l'autosimilarité de la spirale. Leibniz fit un schéma en représentant chacun des termes par une longueur, toutes ces longueurs prenant le même point de départ (**Figure 3**).

Du fait que le premier terme de la

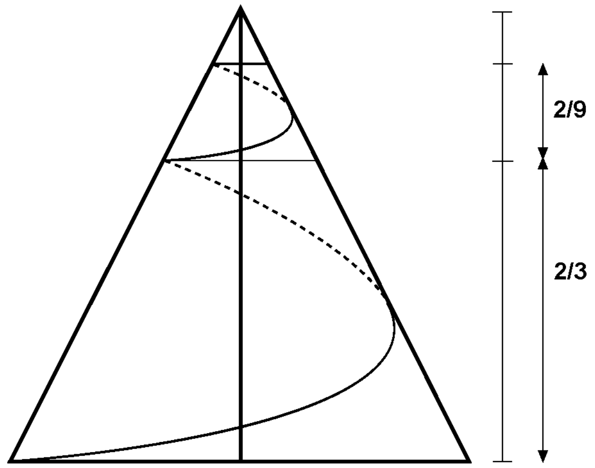
suite est égal à 1 et le dernier à 0, la somme de toutes les différences entre les termes successifs de la suite doit également être égale à 1. Cependant, les différences successives forment également une suite géométrique dont la raison est la même que celle de la suite originale !

En 1672, lorsqu'il se trouve à Paris, Leibniz confie à son collègue Christiaan Huygens qu'il avait obtenu ces résultats intéressants grâce à son nouveau principe. Huygens mit alors son jeune ami à l'épreuve en lui demandant de calculer la somme de la série suivante :
1 + 1/2 + 1/6 + 1/12 + 1/20 + 1/30...

Leibniz reconnut cette série comme correspondant à la suite des différences d'une autre suite (la suite A ci-dessous), ce qui lui a permis de déterminer sa somme. Voici comment il a procédé :
suite A : 1, 1/2, 1/3, 1/4, 1/5, 1/6, 1/7,...
suite B : 1/2, 1/6, 1/12, 1/20, 1/30, 1/42,...

Leibniz savait que la série correspondant à la suite A n'était pas convergente, c'est-à-dire que la somme des termes de la suite A est infinie, elle ne correspond pas à un terme particulier. Ainsi, il interrompit la suite A au bout de n termes. Ce qui signifie qu'il y a n – 1 termes dans la suite B des différences. Leibniz découvrit que la somme de ces n – 1 différences est égale à 1 – (1/n). La raison de cela se trouve dans la règle que Leibniz avait découverte dans son étude des identités mentionnée ci-dessus, selon laquelle la somme des différences est égale à la différence entre le premier et le dernier terme de la suite initiale. Considérons par exemple la somme des trois premiers termes de la suite B (1/2 + 1/6 + 1/12). Si 1/12 est le terme n – 1 de B, alors n est égal à 4. Ainsi, la somme des trois premiers termes de B est égale à la différence entre le premier et le quatrième terme de A, c'est-à-dire 1 – 1/4 ou encore 3/4. Cette addition de trois termes peut être reproduite pour un nombre quelconque de termes. Si donc on prend maintenant l'expression 1 – (1/n) décrivant la somme des (1/n) premiers termes de B et que l'on prend n de plus en plus grand, on voit que 1/n devient de plus en plus petit. Ainsi, la somme des termes de B se rapproche de 1. Ce fut la réponse à la question de Huygens.

Figure 2.



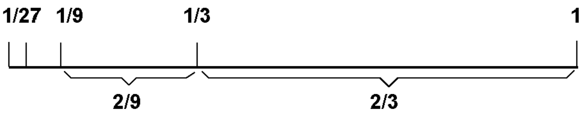


Figure 3.

Leibniz constata que des séries de fractions, tout comme des séries d'entiers, pouvaient être dérivées *ad infinitum* les unes des autres. Il construisit une autre table qu'il appela le triangle harmonique (**Figure 4**), reposant sur la même règle, c'est-à-dire que les lignes successives étaient composées des différences des termes des lignes précédentes (1/2 est la différence entre 1 et 1/2 ; 1/6 est la différence entre 1/2 et 1/3 ; 1/12 est la différence entre 1/3 et 1/4, etc.)

Leibniz se demanda alors comment cette approche qui était valide pour les entiers et les fractions, pourrait également s'appliquer pour des séries de nombres infinitésimalement petits. Nous allons voir comment cela fut mis en œuvre.

Huygens fut émerveillé par la découverte de Leibniz. La série particulière qu'il avait soumise à Leibniz avait déjà été résolue par Hudde, mais l'approche de Leibniz était originale. Huygens demanda à Leibniz d'étudier la géométrie et, en particulier, la détermination des aires des surfaces de révolution. Leibniz se mit à lire les écrits de Blaise Pascal. Il était entre autres fasciné par la solution de Pascal pour la surface de la sphère, dans laquelle la sphère était conçue comme produite par la rotation d'un cercle autour d'un axe. La **Figure 5** représente le diagramme de Pascal pour présenter la solution à la surface générée par la rotation d'un quadrant de cercle autour d'un axe. Pascal put transformer en un rectangle la surface de l'hémisphère généré par cette rotation. La partie qui suit représente une étape dans l'effort de Leibniz pour développer le calcul infinitésimal bien qu'elle ne contient pas la conception de base à laquelle il a abouti plus tard. Nous invitons le lecteur qui trouverait ce passage trop difficile à passer directement à la suite.

Sur la figure, OI est un rayon. La bande verticale qui a pour base RR' a, en fait, une largeur *infinitésimale*. I est un point se trouvant à la verticale au-dessus du segment RR'. EB est égal à RR'. EE' est la tangente au cercle passant par I. Une tangente est une ligne droite qui ne touche le cercle qu'en un seul point. Nous pouvons ensuite montrer que le triangle infinitésimal EE'B et le triangle OID sont semblables. (La ligne ID divise

$$1$$
$$\frac{1}{2} \quad \frac{1}{2}$$
$$\frac{1}{3} \quad \frac{1}{6} \quad \frac{1}{3}$$
$$\frac{1}{4} \quad \frac{1}{12} \quad \frac{1}{12} \quad \frac{1}{4}$$
$$\frac{1}{5} \quad \frac{1}{20} \quad \frac{1}{30} \quad \frac{1}{20} \quad \frac{1}{5}$$
$$\frac{1}{6} \quad \frac{1}{30} \quad \frac{1}{60} \quad \frac{1}{60} \quad \frac{1}{30} \quad \frac{1}{6}$$
$$\frac{1}{7} \quad \frac{1}{42} \quad \frac{1}{105} \quad \frac{1}{140} \quad \frac{1}{105} \quad \frac{1}{42} \quad \frac{1}{7}$$

Figure 4. Le triangle harmonique.

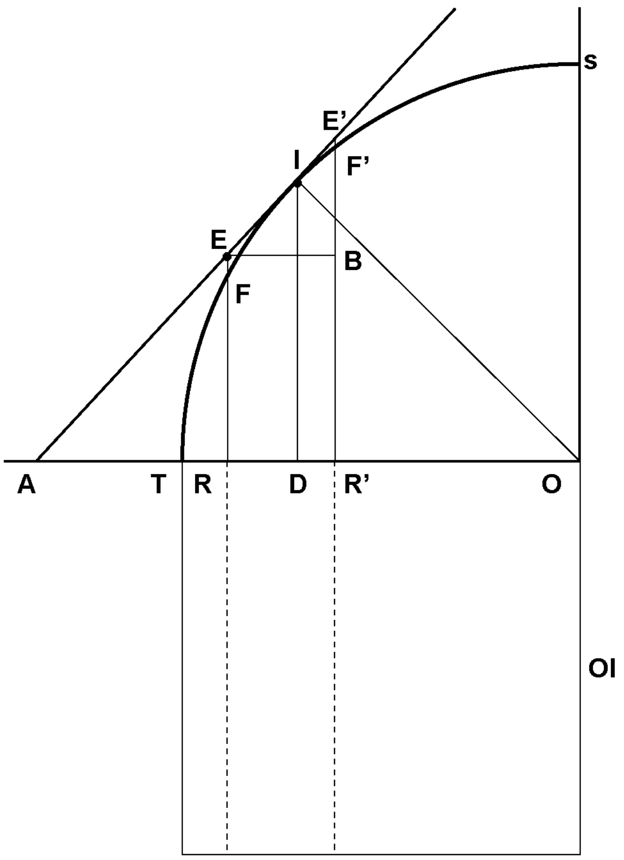


Figure 5.

le triangle rectangle AIO en deux triangles IAD et OID qui sont semblables entre eux et semblables au triangle AIO. C'est-à-dire que leurs trois angles sont les mêmes et donc que leurs côtés sont proportionnels ou, selon les termes de Leibniz, qu'ils sont indiscernables si l'on fait abstraction de leurs tailles. EE'B et IAD sont semblables car leurs côtés sont parallèles. Du fait que IAD et OID sont semblables alors il en est de même pour EE'B et OID.)

S'appuyant sur la similarité de EE'B et OID, Pascal en déduit que EE' × DI = RR' × OI (le rayon) et que cette relation reste vraie pour toutes les bandes verticales infinitésimales de la figure. Pour trouver la surface de tout l'hémisphère, nous avons besoin de la surface générée par la rotation du quadrant autour de l'axe ORR'. Chaque bande verticale ou *sinus* telle que RR'FF', lorsqu'elle subit une rotation autour de sa base, génère une bande circulaire sur l'hémisphère d'arc FF', c'est-à-dire un arc dont la longueur est très proche de celle de la tangente EE'. Pascal dit alors que si l'on divise tout le quadrant par ces bandes infinitésimales, on obtient :

Σ (EE' × DI) = OI^2,

où Σ désigne un processus de sommation. Nous avons OI^2 pour le côté droit de l'équation, car OI est multiplié par la succession de toutes les lignes RR' de O jusqu'à T et que leur somme est égale à OI.

Que représente alors le produit EE' × DI ? C'est, à un coefficient multiplicatif 2π près, l'aire d'un cylindre de rayon approximativement égal à DI et de hauteur EE'. Nous disons *rayon approximativement égal*, car DI se trouve entre les deux diamètres du petit cylindre, RE et R'E'. La surface totale de l'hémisphère est obtenue en sommant tous ces petits cylindres. Du fait que les deux rayons RE et R'E' ne sont pas parfaitement égaux, ces cylindres ne sont pas parfaitement cylindriques. Ce procédé est justifié car plus la bande verticale devient étroite, plus la longueur de la ligne tangente EE' se rapproche de celle de l'arc de cercle FF'. Ainsi, l'aire du cylindre infinitésimal se rapproche de celle de la bande circulaire infinitésimale se trouvant sur la surface de l'hémisphère généré par la rotation du quadrant autour de l'axe AO. On obtient comme résultat pour la surface de l'hémisphère 2π multiplié par le carré du rayon. Notez que ce que nous venons de faire revient à construire un rectangle dont la base est égale à la somme de tous les RR' et dont la hauteur constante est OI. Etant donné que nous avons sommé les RR' sur toute la longueur du rayon, le rectangle est au bout du compte un carré. Ceci est illustré par les bandes verticales placées sous la ligne OA. Ainsi, nous venons de convertir la surface de la sphère en une aire plane, un carré.

Leibniz se rendit compte que cette méthode que Pascal avait limité au cas de la sphère pouvait en fait être utilisée pour toutes les surfaces de révolution. L'aire plane serait alors construite comme ci-dessus en prenant la normale (perpendiculaire) à la courbe en un point quelconque de la courbe. Alors que dans le cas particulier de la sphère, la normale était toujours égale au rayon du cercle, dans le cas d'autres surfaces de révolution, comme par exemple le paraboloïde, la normale serait de longueur variable. Cependant, on pourrait toujours dériver le triangle caractéristique pour la courbe en chacun de ses points et tracer sous ce point, comme précédemment, une perpendiculaire, non pas à la courbe mais à l'axe de rotation sous la courbe et de longueur égale à la normale originale à la courbe. Il resterait alors la difficulté de sommer toutes les bandes rectangulaires.

La génération d'une courbe

Leibniz passa un certain temps à trouver des solutions en suivant cette nouvelle approche, qui avait par ailleurs été mise en œuvre par Barrow, le professeur de Newton. Bien que cette méthode utilisait la tangente à la courbe, ce ne fut qu'en 1676 que Leibniz utilisa la méthode des différences pour déterminer des tangentes. Cette année-là, il fit une percée cruciale lorsqu'il réalisa que la détermination de la tangente à une courbe pouvait être obtenue très facilement en utilisant les principes qu'il avait déjà appliqués avec les séries de nombres entiers et de fractions. Il réalisa également que le problème des aires est un problème inverse à celui des tangentes, et cela pour deux raisons : la détermination de la tangente à une courbe est équivalente, comme nous allons le voir, à trouver des différences successives de la courbe ; trouver des aires délimitées par des courbes fait intervenir un processus de sommation de séries. En d'autres termes : étant donnée une fonction ou une courbe, déterminer une seconde fonction pour laquelle la précédente est la tangente. Cela peut sembler très compliqué mais revenez un instant aux triangles arithmétiques et harmoniques. Répétons-le : la sommation et les différentiations successives sont deux problèmes inverses l'un de l'autre. En réalité, le processus est d'une simplicité enfantine mais seul un génie créatif était en mesure d'en voir l'application.

Leibniz s'est rendu compte que le triangle caractéristique BEE' utilisé dans le calcul de Pascal pour la sphère, était non seulement le reflet de la propriété de la courbe en ce point, mais nécessairement le reflet du processus de génération de l'ensemble de la courbe pour laquelle le point n'était qu'un moment. Ainsi, il considéra le processus gouvernant la génération de la courbe du même point de vue que celui par lequel il avait considéré la formation de toutes les autres séries.

Considérons la parabole d'équation $y = kx^2$ (**Figure 6**). Cette équation de la parabole était déjà connue à l'époque ainsi que celles des autres coniques, et Leibniz les avait découvertes dans les travaux de Descartes. La droite issue de (x_0y_0) et passant par (x_1y_1) pour atteindre la verticale de droite est la tangente à la parabole. La droite qui relie (x_1y_1) et (x_2y_2) est une corde de la parabole.

Cette tangente peut être représentée par sa pente :

$(y_1 - y_0) / (x_1 - x_0)$.

De même, la pente de la droite qui relie (x_1y_1) et (x_2y_2) peut être représentée par :

$(y_2 - y_1) / (x_2 - x_1)$.

Nous pouvons voir la tangente comme étant la première d'une suite de droites reliant le point (x_1y_1) avec une suite de points s'éloignant le long de la parabole. Du fait qu'elle est la première de cette suite, elle relie le point (x_1y_1) avec lui-même. Leibniz vit que les valeurs successives des pentes de ces droites formaient une suite, et que s'il pouvait déterminer leur règle de formation, il pourrait en déduire la valeur de la suite au point de départ. S'intéressant aux valeurs successives de la pente, il fit le simple calcul suivant, à partir de l'équation connue de la parabole : $y_1 = kx_1^2$.

Puis, si l'on pose $x_2 - x_1 = dx$,

$y_2 = k(x_1 + dx)^2$

(également à partir de l'équation de la parabole).

Puis, si l'on pose

$dy = (y_2 - y_1)$, nous avons

$dy = k(x_1 + dx)^2 - kx_1^2$

$dy = k(x_1^2 + 2x_1dx + dx^2) - kx_1^2$.

Notez que dy et dx désignent des changements hypothétiques de y et

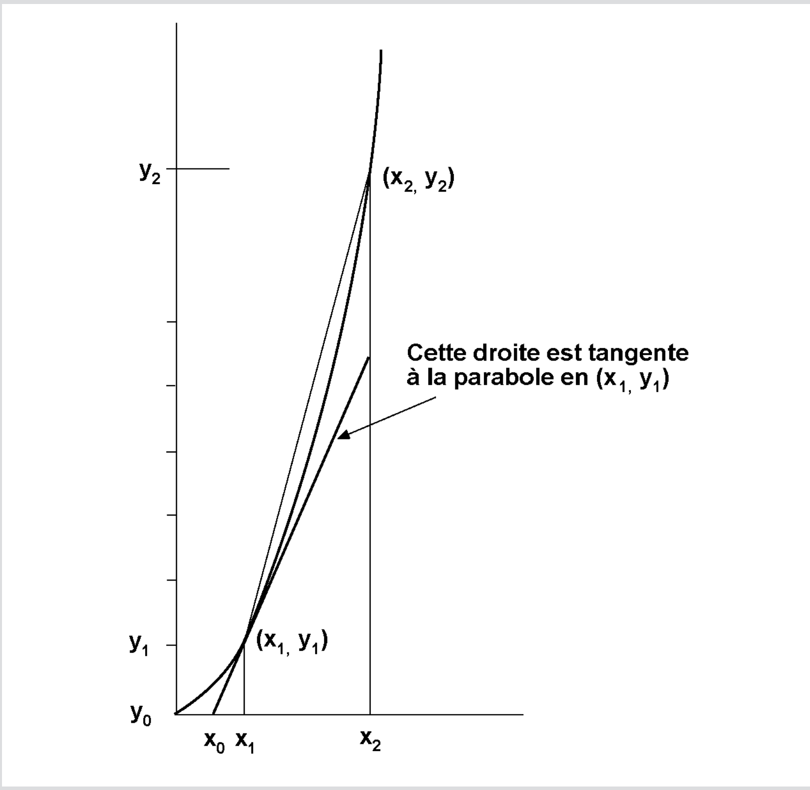


Figure 6. La parabole $y = kx^2$.

de x ; nous sommes en train de suivre le cheminement de la pensée de Leibniz.

Que devient la valeur de la pente de la courbe au point (x_1y_1) ?

$dy / dx = k(2x_1+dx)$.

C'est à ce point de son expérience mentale que Leibniz introduisit son principe de continuité. Selon ce principe : « *Dans toute transition s'achevant en un terme quelconque, il est permis d'instituer un raisonnement général dans lequel le terme final peut également être inclus.* » [10]

Il compara l'utilisation de ces nouveaux genres de nombres (dx, dy, etc.) avec l'utilisation – déjà pratiquée avec succès – des nombres imaginaires : « *Il suffira, si nous parlons de quantités infiniment grandes (ou, dit plus strictement, illimitées), ou infiniment petites (c'est-à-dire les plus petites que nous puissions connaître), de comprendre que nous voulons dire quantités qui sont indéfiniment grandes ou indéfiniment petites ; c'est-à-dire aussi grandes ou aussi petites que l'on veut, de telle sorte que l'erreur que l'on puisse assigner soit plus petite qu'une certaine quantité assignée. De plus, du fait qu'en général il apparaîtra que lorsque une petite erreur quelconque est assignée, on peut montrer qu'elle doit être moindre, il s'en suit que l'erreur n'est absolument rien ; un genre presque identique d'argument est utilisé en différents endroits chez Euclide, Théodose et d'autres ; et cela leur a parut une chose étrange, bien qu'il ne put être nié que cela soit parfaitement vrai que si la moindre chose pouvait être l'erreur assumée, il s'en suivait que l'erreur était absolument non existante. Ainsi, par infiniment grand et infiniment petit, nous comprenons quelque chose d'indéfiniment grand ou d'indéfiniment petit, de telle sorte qu'ils doivent être vus comme une sorte de classe et non simplement comme la dernière chose d'une classe. Si on veut les comprendre comme les choses ultimes, ou véritablement infinies, cela peut être fait et sans retomber dans une controverse sur la réalité des extensions, ou du continuum infini en général, ou de l'infiniment petit, et en dépit même du fait que l'on pense que de telles choses sont complètement impossibles ; il suffira simplement de s'en servir comme d'un outil qui permet d'atteindre le résultat d'un calcul, tout comme les algébristes extraient des racines imaginaires avec grand profit. Car elles présentent une manière pratique de calculer et qui peut manifestent être vérifiée dans chaque cas d'une manière rigoureuse par la méthode déjà présentée.* » [11]

En d'autres termes, on peut inclure le cas où dx = 0. Comme nous allons le voir, cette approche de Leibniz a provoqué une levée de boucliers : « Comment pouvez vous diviser par zéro ? » Ci-dessous Leibniz nous donne une autre formulation de son principe : « *Si dans une suite donnée, une valeur approche d'une autre valeur de manière continue, et finalement disparaît en elle, les résultats dépendant de ces valeurs dans la suite inconnue doivent aussi nécessairement se rapprocher les uns des autres de manière continue, et finalement les uns dans les autres. Tel est, par exemple, en géométrie le cas de l'ellipse qui s'approche de manière continue de la parabole, lorsque l'un de ses foyers reste à la même place et que l'autre s'éloigne de plus en plus, jusqu'à ce que l'ellipse devienne une parabole lorsque le foyer est rejeté à l'infini. Ainsi toutes les règles pour l'ellipse doivent nécessairement être vérifiées dans la parabole (cette dernière étant comprise comme une ellipse dont le second foyer est à une distance infinie). Ainsi, les rayons parallèles qui rencontrent une parabole peuvent être vus comme venant du second foyer ou tendant vers lui.* » [12]

(Rappelez vous que lorsqu'une source lumineuse est placée au foyer d'une ellipse, la lumière est réfléchie sur l'autre foyer. Lorsqu'une source lumineuse est placée au foyer d'un miroir parabolique, elle est réfléchie selon des rayons parallèles ; lorsque des rayons parallèles rencontrent un miroir parabolique, ils sont réfléchis vers le foyer du miroir.)

La solution de Leibniz repose sur la méthode de l'hypothèse d'une expérience mentale dans laquelle il est fait appel à un principe universel. En réalité, c'est à cette méthode de l'hypothèse que ses adversaires ont objecté. Par cette méthode de l'hypothèse, il avait créé un nouveau type de nombre, désigné par une métaphore, dy / dx, qui a enrichi notre langage. Même ses adversaires les plus acharnés ont été obligés d'adopter cette métaphore pour conduire leurs calculs, bien qu'ils aient essayé de déguiser la manière par laquelle elle avait été inventée.

Une fois énoncées les règles permettant d'obtenir la tangente d'une courbe ou d'une fonction particulière, le reste est un jeu d'enfant. Par exemple, la dérivée ou la pente de la tangente de x^n est $nx^{(n-1)}$. Leibniz a également calculé des dérivée secondes pour ses dérivées premières. En cela, il a totalement innové ; les tangentes de certaines courbes avaient déjà été découvertes mais personne n'avait effectué ou même conçu des dérivées secondes. La science des mouvements ondulatoires, entre autres branches de la physique mathématique, nécessite la dérivée seconde.

Le principe de continuité

Les manuels de calcul décrivent cette procédure pour déterminer les tangentes comme équivalente à trouver la dérivée, ou dy / dx en un point. Cependant, plutôt que d'utiliser le principe de continuité, ils font de la continuité en tant que telle une idée secondaire, une idée qui découle d'un ensemble de points. La tangente est décrite comme étant une limite que l'on obtient lorsque l'on approche du point sans jamais l'atteindre tout à fait. Ceci est en contradiction avec Leibniz qui avait clairement établi que le point final, ou le terme du processus, doit être inclus dans le processus. Par le principe de continuité, nous pouvons et nous devons rapporter des changements de la variété discrète, dans la variété continue, où se trouve la causalité. Par exemple, la suite de différences des cubes nous montre comment croissent les cubes, en additionnant des carrés, des lignes et des points. Le calcul infinitésimal est notre premier moyen nous aidant à hypothétiser ce qui doit se produire dans la variété continue entre les moments où de nouvelles singularités apparaissent, c'est-à-dire lorsque de nouvelles couches sont ajoutées sur les faces du cube.

Tout processus de croissance génère une suite de nombres. Ces suites sont quant à elles un moyen de décrire les processus originaux. Comme nous l'avons vu plus haut, Leibniz s'est rendu compte que la méthode inverse des tangentes pouvait être utilisée pour déterminer des surfaces. Cela revenait simplement à déterminer quelle devrait être la suite de nombres recherchée telle que la première suite en constitue les différences premières. Cette approche très simple donna à Leibniz des solutions à des problèmes qui étaient auparavant difficiles ou même restés sans solution. Archimède avait, par exemple, trouvé une solution très laborieuse pour calculer l'aire sous une parabole ; sa méthode est appelée fort à propos la méthode d'exhaustion. La méthode de Leibniz utilise son nouveau langage pour trouver la solution presque instantanément.

Considérons la suite de bandes de largeur infinitésimale dx (**Figure 7**). L'aire de la bande rectangulaire de hauteur kx^2 et de largeur dx est donc kx^2dx. Par ailleurs, il doit exister une suite dont la suite de ces bandes constitue les différences. Comment Leibniz a-t-il pu se représenter quelle serait cette suite ? Il suffit très simplement de prendre le processus inverse de celui qui détermine les différences. La suite des cubes a ses différences sous la forme :
$(x + dx)^3 – x^3 = 3x^2dx + 3dx^2dx + dx^3$.

Lorsque dx devient infinitésimalement petit, cela se réduit à $3x^2dx$ car dx^2 est alors infiniment plus grand que dx^3 et infiniment plus petit que dx.

Ainsi, pour la parabole, $y = kx^2$, la fonction $1/3\ kx^3$ donne la suite kx^2dx comme sa suite différence. En rendant les rectangles infiniment étroits, leur somme donne une surface aussi proche que l'on veut de celle qui est sous la courbe. Rappelez vous que dans la découverte originale de Leibniz, la somme de toute suite de différences est égale à la différence entre le premier et le dernier terme de l'autre suite qui donne naissance à celle des différences. Ainsi, la somme des différences kx^2dx est égale à la valeur de $1/3\ kx^3$ prise au dernier point à droite moins celle prise au premier point à gauche. C'est ce que l'on appelle aujourd'hui une *intégrale définie*.

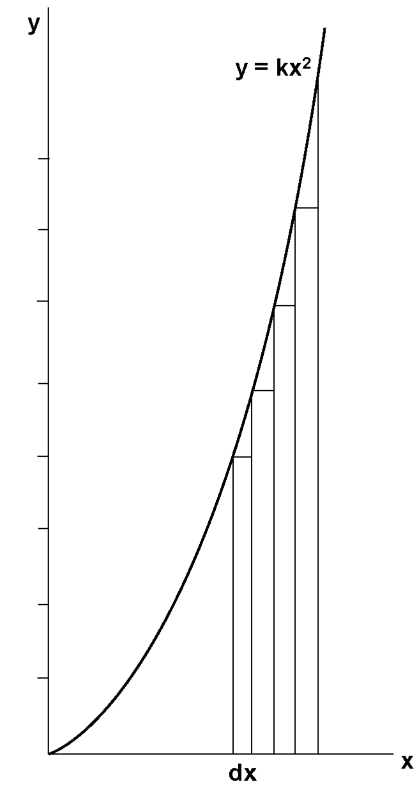


Figure 7. La parabole $y = kx^2$.

Les limites de Courant

Ayant vu ainsi la méthode de Leibniz, vous penserez sans doute qu'elle excite l'admiration des mathématiciens d'aujourd'hui, et qu'elle est enseignée et utilisée comme un modèle pour les étudiants ? Faux ! Qu'il vous suffise, pour vous convaincre du contraire, d'examiner les attaques et distorsions vicieuses dans les commentaires suivants sur Leibniz qui, comme de la limaille de fer dans un champ magnétique, donnent l'allure des lignes de forces qui contrôlent la situation. Considérons, par exemple, le célèbre manuel *What is mathematics ?* de Richard Courant, qui était le directeur du prestigieux Institut des sciences mathématiques de l'université de New York. Sur Leibniz, il écrit : *« Sa réussite ne saurait en aucun cas être diminuée par le fait qu'elle était liée à des idées vagues et intenables qui ne sont aptes qu'à perpétuer un manque de compréhension précise dans des esprits qui préfèrent le mysticisme à la clarté. »* Et plus loin : *« Dans l'analyse mathématique du XVIIe et de la plus grande partie du XVIIIe siècles, l'idéal grec de raisonnement clair et rigoureux semble avoir été abandonné. L'"intuition" et l'"instinct" ont remplacé la raison dans beaucoup de cas importants. »* [13]

Leibniz est déformé, et son concept de continuité est omis dans le chapitre intitulé « La notation de Leibniz et l'infiniment petit ». Courant y réduit la métaphore puissante de Leibniz, dx / dy, à une « notation symbolique », de telle sorte qu'il en évacue l'idée sous-jacente. Courant prétend même que Leibniz voulait dire la même chose que lui :

« La tentative de Leibniz d'"expliquer" la dérivation commence d'une manière parfaitement correcte avec le quotient des différences d'une fonction y = f(x),

$\Delta y / \Delta x = (f(x_1) – f(x)) / (x_1 – x)$

« Pour exprimer la limite, la dérivée, que nous appelons f'(x) (d'après l'usage introduit par la suite par Lagrange), Leibniz écrivit dx / dy, remplaçant le symbole différence Δ par le "symbole différentielle" d. »

Après avoir insisté sur le fait que l'on peut éviter le problème de diviser par dx = 0, si et seulement si l'on a recours aux « limites », Courant attaque Leibniz : *« Le mystère et la confusion n'apparaissent que si nous suivons Leibniz et beaucoup de ses successeurs en disant quelque* *chose du genre : "Δx n'approche pas zéro. Au contraire, la 'dernière valeur' de Δx n'est pas zéro, mais une 'quantité infinitésimalement petite', une 'différentielle' appelée dx ; et de même, Δy a une 'dernière' valeur infinitésimalement petite dy […]." De telles quantités infiniment petites étaient considérées comme un nouveau genre de nombre différent de zéro mais plus petit que n'importe quel nombre positif du système des nombres réels. Seuls ceux qui avaient un véritable sens mathématique pouvaient saisir ce concept, et le calcul différentiel était considéré comme quelque chose de véritablement difficile, car peu de gens ont, ou peuvent, développer un tel sens. »* [14]

La critique de Courant est similaire à celle que Leibniz a dû subir la première fois qu'il a présenté le résultat de ces recherches. Cependant, la substitution du *principe de continuité* par l'idée de *limites* a été codifiée au XIXe siècle par Augustin Cauchy, et c'est le point de vue auquel Courant adhère. Cauchy a été promu contre Leibniz et toute sa tradition de science continentale. L'approche de Cauchy est celle qui est enseignée dans toutes les écoles aujourd'hui. Elle est responsable de la mystification du calcul différentiel et c'est elle qui le rend si difficile à apprendre.

Carl Boyer, l'auteur de *The history of the calculus and its conceptual development*, était un élève de Courant. Il était scandalisé à l'idée que la description de Leibniz puisse représenter la réalité physique. Il nie l'existence de la vitesse instantanée en un point, représentée par la tangente en ce point. A la place, il dit, à la manière de Courant ci-dessus, que la vitesse instantanée est la limite que la vitesse moyenne approche quand les intervalles deviennent suffisamment petits :

« Dans la mesure où les lois de la science sont formulées par induction, sur la base du témoignage des sens, il ne peut exister dans la science une chose telle qu'une vitesse instantanée, c'est-à-dire une vitesse dans laquelle les intervalles de distance et de temps seraient zéro. Les sens sont incapables de percevoir, et donc la science est incapable de mesurer autre chose que de véritables changements dans la position et dans le temps. Le pouvoir de tout organe de sens est limité à un minimum de perception possible. Par conséquent, nous ne pouvons pas parler de mouvement ou de vitesse, dans le sens d'une observation scientifique, lorsque soit la distance soit l'intervalle de temps correspondant devient si petit que le minimum de sensation nécessaire dans sa mesure n'est pas excité – encore moins lorsque l'intervalle est supposé égal à zéro […]

« Cette difficulté a été résolue par l'introduction de la dérivée, un concept basé sur l'idée de limite. En considérant les valeurs successives du quotient des différences Δs / Δt [la distance sur le temps, NdT], les mathématiques peuvent indéfiniment rendre les intervalles aussi petits qu'on le veut. De cette manière, on obtient une séquence infinie de valeurs r_1, r_2, r_3,… r_n,… (les valeurs successives du rapport Δs / Δt). Cette séquence peut être telle que plus les intervalles sont petits, plus le rapport r_n s'approche d'une certaine valeur fixe L, et telle qu'en prenant la valeur de n suffisamment grande, la différence $|L – r_n|$ peut être rendue arbitrairement petite. Si c'est le cas, cette valeur L est dite être la limite de la séquence infinie, ou la dérivée f'(t) de la fonction distance f(t), ou la vitesse instantanée du corps. Il faut cependant garder à l'esprit que ce n'est pas une vitesse dans le sens ordinaire du terme et qu'elle n'a pas de contrepartie dans la nature, dans laquelle il n'existe pas de mouvement sans changement de position. » [15]

Sur le principe de continuité de Leibniz, Boyer écrit : *« […] lorsqu'il lui fut demandé d'expliquer la transition des quantités finies aux quantités infinitésimales, il [Leibniz] utilisa un principe quasi philosophique appelé loi de la continuité. Nous avons eu des applications antérieures de cette doctrine par Kepler et Nicolas de Cues. Ce dernier a dû influencer Leibniz sur cette question ainsi que sur la doctrine philosophique des monades. »* [16]

Et il ajoute : *« Leibniz a justifié la condition des limites par la loi de la continuité, alors que les mathématiques ont montré depuis que cette dernière doit d'abord être définie en termes de limites. Par cette manière de penser, Leibniz semble toujours s'efforcer d'utiliser une idée vague de la continuité, alors que nous sentons bien que nous la possédons, et qui avait gêné les penseurs depuis l'époque des Grecs. »*

Augustin Cauchy (1789-1857). Son approche dénature le calcul différentiel tel qu'il a été inventé par Leibniz. C'est pourtant celle-là que l'on enseigne aujourd'hui dans les écoles.

Leibniz contre l'empirisme de Cauchy

La description de la méthode de Cauchy par Boyer qui précède est celle de l'attitude empiriste, attitude qui culmina dans les années 70 par l'entreprise d'abrutissement nommée « mathématiques modernes ». Toute formation d'hypothèse en a été éliminée. L'élève est contraint d'apprendre des pages et des pages de définitions d'ensembles de points et d'axiomes du système des nombres avant d'aborder les dérivées. Bertrand Russell, la personne philosophiquement responsable des mathématiques modernes, détestait en particulier Leibniz à cause des propositions de ce dernier sur les universaux. La connaissance dépend-elle, comme l'affirme Russell, de l'induction à partir de cas particuliers, ou est-ce que les universaux existent ? La continuité est un universel, la substance également. L'empiriste dira : « Pouvez-vous prouver qu'il existe quelque chose dans la réalité que vous pourrez appeler continuité ? Relativement à quoi ? » Leibniz a introduit avec succès la continuité dans la physique et les mathématiques. Il la décrivait comme étant *« un principe d'ordre général que j'ai observé [...]. Ce principe a son origine dans l'infini et est absolument nécessaire en géométrie, mais il intervient également en physique parce que la souveraine sagesse, la source de toutes choses, agit comme un géomètre parfait, selon une harmonie à laquelle rien ne peut être ajouté. C'est pourquoi ce principe est utilisé comme moyen de test ou critère permettant de révéler l'erreur d'une opinion mal conçue, et cela de l'extérieur, avant même d'en avoir fait un examen en profondeur. Quand la différence entre deux termes d'une suite donnée, ou celle qui est présupposée, peut être diminuée jusqu'à devenir plus petite que n'importe quelle quantité donnée, la différence correspondante dans ce qui est recherché, ou leurs résultats, doit nécessairement être réduite à son tour, ou devenir plus petite que n'importe quelle quantité donnée. Ou pour dire cela plus simplement, lorsque deux termes ou données s'approchent de manière continue, de telle sorte que l'un atteigne l'autre au bout du compte, il est nécessaire que leurs conséquences ou résultats (ou les inconnues) en fassent autant. Ceci dépend d'un principe plus général : si les données sont ordonnées, les inconnues sont également ordonnées »*. [18]

Dans le cas du problème des tangentes, les pentes (qui sont les inconnues) doivent fournir une valeur pour le point en question, c'est-à-dire la tangente au point, lorsque la donnée, x et y, devient suffisamment proche des valeurs de x et y en ce point.

Leibniz discuta directement des universaux, tels que la continuité, en 1670, environ deux ans avant même de commencer à travailler sur le calcul infinitésimal. On lui avait demandé d'écrire une introduction pour le livre de Marius Nizolius, écrit en 1553, *Sur la vraie méthode de la philosophie, contre les pseudophilosophes.* Nizolius, qui était un nominaliste, niait qu'un universel soit *« quelque chose de plus que toutes les particularités prises simultanément et collectivement »* en utilisant les termes de Leibniz ; cependant Leibniz écrit que *« si les universaux n'étaient rien d'autre que des collections d'individus, il s'en suivrait que nous ne pourrions obtenir aucune connaissance par démonstration – une conclusion à laquelle Nizolius aboutit en effet – mais seulement en rassemblant des individus ou par induction »*.

Le nominaliste dira que *« l'induction de l'expérience nous enseigne que si nous mettons nos doigts dans le feu ils vont brûler »* mais Leibniz ajoute qu'en disant cela et sans s'en rendre compte, le nominaliste utilise les *« propositions suivantes, qui ne dépendent pas d'une induction à partir des faits singuliers, mais d'une idée universelle ou définition des termes : 1°* Si une même chose en tout semblable est cause, une même chose en tout semblable est effet. *Et de celle ci : 2°* L'existence d'une chose qui n'est pas sentie ne doit pas être présumée *; et enfin celle-ci : 3°* Tout ce qui n'est pas présumé doit être pratiquement tenu pour nul avant d'être établi. »

Ainsi, la continuité n'est pas quelque chose que nous nous contentons d'inférer à partir de l'observation d'un ensemble de points voisins les uns des autres. Nous procédons autrement. Du fait que l'Univers obéit au principe de continuité et du fait que notre esprit, qui fait partie de l'Univers, obéit également à ce principe, nous sommes capables de faire des inférences sur la manière dont plusieurs points successifs sont en relation les uns par rapport aux autres, et sur la manière dont les processus physiques doivent fonctionner.

Leibniz fait utilement référence aux suites lorsqu'il écrit : « *L'induction par elle-même ne produit rien, pas même une certitude morale, sans la demande de propositions dépendant non d'une induction mais de la raison universelle ; car si ces demandes provenaient aussi d'une induction, elles auraient besoin de nouvelles demandes, et cela à l'infini, sans obtenir la certitude morale. Mais on ne peut espérer de certitude tout à fait parfaite par l'induction, quelles que soient les demandes qu'on lui ait jointes et nous ne connaîtrons jamais parfaitement cette proposition : le tout est plus grand que la partie – par la seule induction. Viendra bientôt quelqu'un qui, pour un certain cas particulier, ira nier, dans d'autres cas encore inexpérimentés, la vérité de ce principe.* »

Ainsi, pour expliquer la formation de suites de nombres, Leibniz a cherché le processus qui générait la suite dans son ensemble. C'est en partant du principe universel d'identité qu'il a réussi à montrer comment une suite peut être dérivée d'une autre. De même pour les courbes, il a vu qu'il existe un processus unique qui génère l'ensemble de la courbe, mais qui est révélé dans chaque intervalle aussi petit que l'on veut de la courbe. Voilà la véritable histoire de l'invention du calcul différentiel. ■

Notes

1. Carl B. Boyer, 1959. *The history of the calculus and its historical developpement* (New York : Dover publications).
2. J.M. Child (traducteur en anglais), 1920. *The early mathematical manuscripts of Leibniz* (Chicago : Open court publishing Co.).
3. Pour *L'Art combinatoire*, voir Leroy Loemker (éditeur et traducteur en anglais) *Gottfried Leibniz : philosophical papers and letters* (Chicago university press, 1976), p. 73.
4. Child, p. 30.
5. Loemker, p. 265.
6. Loemker, p. 261.
7. Par diagonales, l'on désigne les lignes inclinées : 1 1, 1 2 1, 1 3 3 1, 1 4 6 4 1... Si vous tournez la figure de 45° dans le sens des aiguilles d'une montre, vous obtenez le triangle de Pascal.
8. A titre d'exercice, le lecteur peut construire un modèle de cela à trois dimensions.
9. Loemker, p. 73.
10. Child, p. 147.
11. Child, p. 150.
12. Loemker, p. 447.
13. Richard Courant, 1969, *What is mathematics ?* (New York : Oxford university press), pp. 398-399.
14. Courant, p. 434.
15. Boyer, pp. 6-7.
16. Boyer, p. 217.
17. Boyer, p. 218.
18. Loemker, p. 129.