

# Comment Gauss a déterminé l'orbite de Cérès (dernière partie)

JONATHAN TENNENBAUM

**Encore un peu de courage ! Avec cette quatrième et dernière partie, nous arrivons au bout de ce long voyage qui nous a permis de revivre la formidable découverte de Carl Gauss.**

**Après la détermination précise de l'orbite de Cérès, nous aborderons la question de la méthode de Gauss. En effet, celle-ci était parfaitement élémentaire, sans faire usage du calcul différentiel ou d'autres mathématiques avancées, et pourtant elle représente quelque chose de nouveau. En fait, il a utilisé la géométrie synthétique classique pour élaborer un concept de géométrie physique qui est, d'un point de vue axiomatique, « anti-euclidien ».**

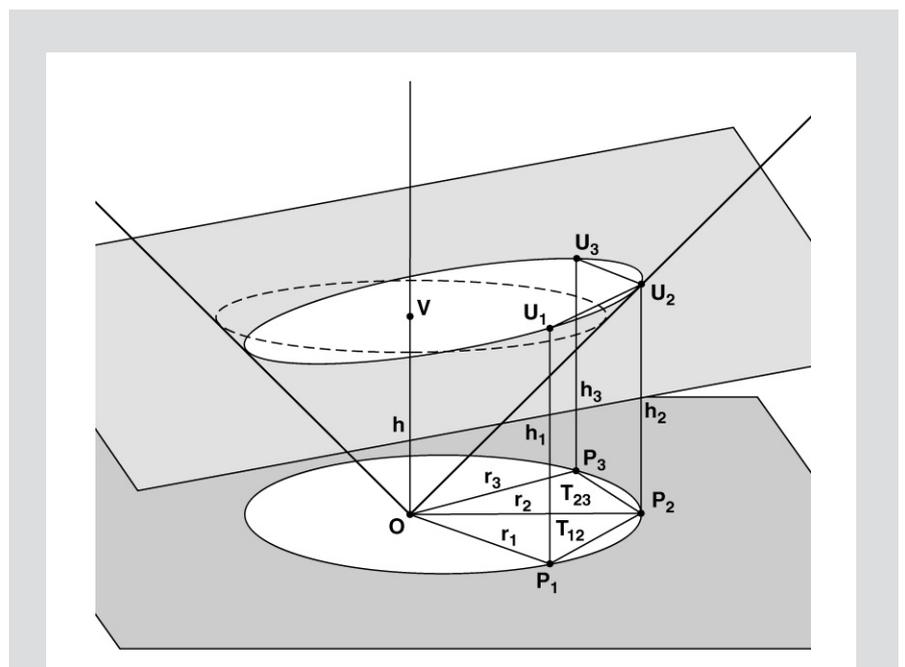
## 14. EN VUE DU SOMMET

**S**i notre voyage de redécouverte nous a souvent paru semblable à l'escalade d'une montagne escarpée, cette section va nous conduire au sommet. Arrivés là, ce qu'il restera à découvrir dans la solution de Gauss se trouvera en dessous de nous, dans une vallée qu'il nous sera facile d'observer grâce au travail que nous aurons déjà accompli.

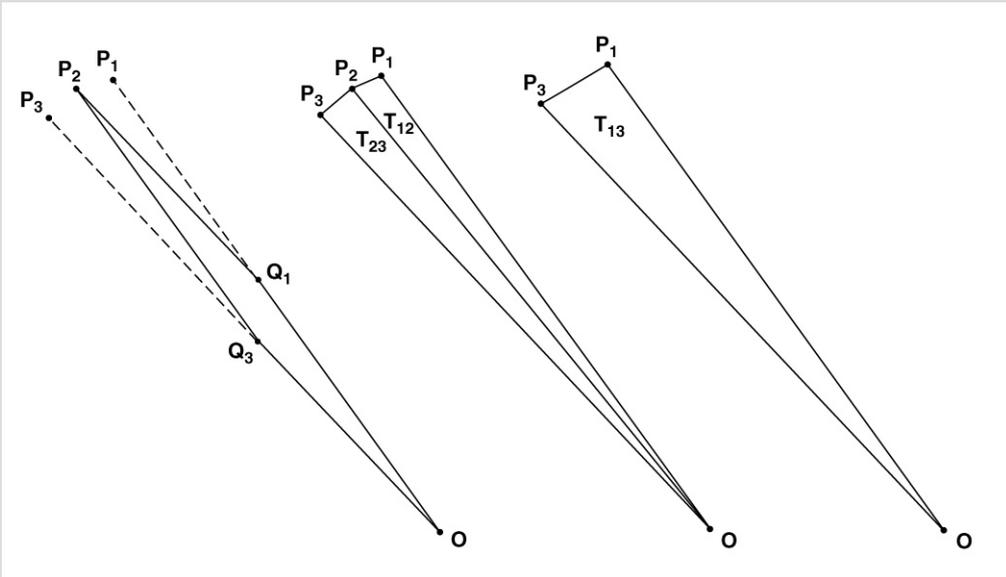
Dès le départ, Gauss s'efforce – et c'est le point crucial de son approche

– d'établir la relation entre ce que nous avons précédemment appelé la « différentielle triangulaire » formée à partir de trois positions quelconques d'une orbite képlérienne, et les caractéristiques physiques de l'orbite dans son ensemble (**Figure 14.1**).

Cette relation est implicite dans les contraintes de Kepler-Gauss, et en particulier dans la « loi des aires » selon laquelle les aires balayées par le mouvement de la planète entre deux



**Figure 14.1.** Gauss s'est focalisé sur la relation entre les secteurs orbitaux, les aires triangulaires, le paramètre orbital (qui est égal à la hauteur de V) et la caractéristique de l'orbite dans son ensemble.



**Figure 14.2.** A la section 10, nous avons trouvé que la position intermédiaire  $P_2$  de Cérès peut être reliée aux deux autres positions  $P_1$  et  $P_3$  de la manière suivante.  $P_2$  résulte de la combinaison de deux déplacements  $OQ_1$  et  $OQ_3$  le long respectivement des axes  $OP_1$  et  $OP_3$ , les positions de  $Q_1$  et  $Q_3$  étant déterminées par les relations :  
 $OQ_1/OP_1 = T_{23}/T_{13}$ , et  
 $OQ_3/OP_3 = T_{12}/T_{13}$ .

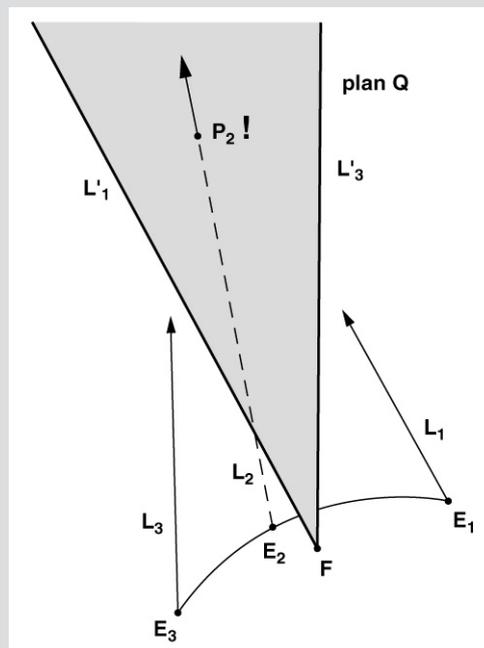
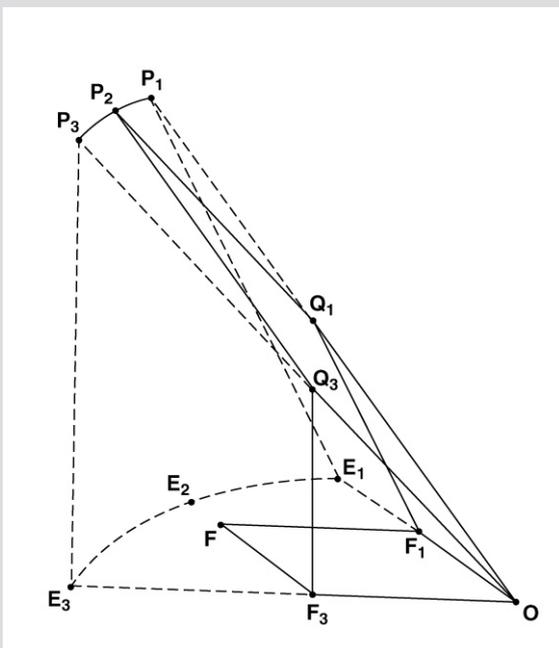
quelconques de ses positions sont proportionnelles aux durées correspondantes.

Revenons à notre premier angle d'attaque du problème de Cérès. Il reposait sur la constatation que l'aire du secteur orbital entre deux quelconques des trois positions données, est à peine plus grande que l'aire triangulaire formée à partir de ces deux mêmes positions (et le centre du Soleil). Par ailleurs, nous avons trouvé que les valeurs de ces aires triangulaires

– ou plus précisément leurs rapports – déterminent la relation spatiale entre les trois positions de Cérès, exprimée en termes de la « loi du parallélogramme » appliquée à des déplacements (**Figure 14.2**). Nous avons découvert une méthode pour déterminer les positions de Cérès (ou du moins l'une d'entre elles), à partir des valeurs des rapports triangulaires, en appliquant ces valeurs aux positions connues de la Terre, en déterminant l'écart résultant de la différence de

courbure entre l'orbite de la Terre et celle de Cérès, et en reconstruisant la position de Cérès à partir de cet écart par une sorte de « projection inverse » (**Figure 14.3**).

La difficulté évidente qui découle de cette méthode se trouve dans le fait que nous ne connaissons pas *a priori* les rapports exacts des aires triangulaires requis pour réaliser cette construction. A ce stade, nous pouvions seulement dire que les rapports devaient être « assez



**Figure 14.3.** A la section 11, nous avons localisé la position  $P_2$  de Cérès sur un plan Q en utilisant une construction s'articulant sur la différence entre les courbures de la Terre ( $E_1, E_2, E_3$ ) et de Cérès ( $P_1, P_2, P_3$ ).

voisins » des rapports des secteurs orbitaux correspondants dont nous savions, grâce à la « loi des aires », que les valeurs étaient égales aux rapports des durées. Notre première inclination était d'essayer d'ignorer la différence entre les aires triangulaires et les secteurs orbitaux, et d'appliquer les valeurs connues des rapports des durées pour obtenir une valeur approximative de la position de la planète. Malheureusement, une analyse plus poussée a montré qu'un faible écart entre les triangles et les secteurs pouvait donner une erreur finale inacceptable de 20 % ou plus (compte tenu des véritables dimensions de l'orbite de Cérès). Ainsi, la seule alternative qui nous restait était de chercher un nouveau principe pour estimer la grandeur de la différence entre les secteurs curvilignes et leurs homologues triangulaires.

Nous avons constaté, comme Gauss l'avait fait, que le plus grand écart apparaît avec les deux positions les plus éloignées l'une de l'autre, c'est-à-dire  $P_1$  et  $P_3$ . En comparant le secteur  $S_{13}$  avec le triangle  $T_{13}$ , on trouve que la différence entre les deux est une aire en forme de lunule délimitée par l'arc orbital et la corde reliant  $P_1$  et  $P_3$  (Figure 14.4). La plus grande partie de cette aire appartient au triangle que nous avons appelé  $T_{123}$ , formé entre  $P_1$ ,  $P_3$

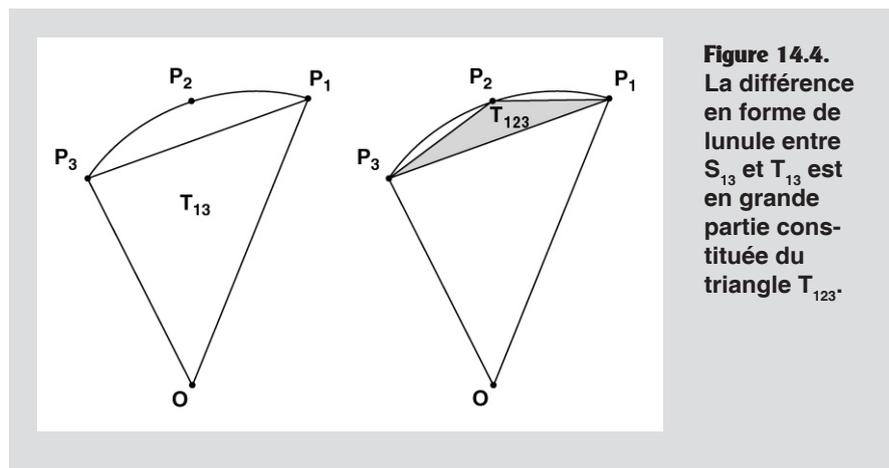


Figure 14.4. La différence en forme de lunule entre  $S_{13}$  et  $T_{13}$  est en grande partie constituée du triangle  $T_{123}$ .

et la position intermédiaire  $P_2$ . Gauss a compris que la clef du problème se situe dans la détermination de la taille de cette différentielle triangulaire qui exprime l'effet de la courbure de l'orbite de Cérès sur l'intervalle délimité par les trois positions. Cette courbure « locale » reflète en retour la courbure de l'ensemble de l'orbite.

Etant donné les multiples variabilités interconnectées intervenant dans la détermination d'une orbite conique arbitraire, nous ne pouvons pas espérer emprunter un chemin simple et linéaire pour aboutir. Nous devons nous attendre à devoir examiner d'une manière approfondie le réseau de facteurs géométriques qui

se combinent pour déterminer la valeur de  $T_{123}$ . Notre stratégie consistera à essayer d'avoir une vue d'ensemble des caractéristiques essentielles de ces interconnexions en termes de relations d'angles sur un simple cercle.

A cette fin, nous pouvons utiliser certains cas particuliers et des exemples numériques comme « aides à la navigation » pour nous guider vers une solution générale.

En conséquence, intéressons-nous tout d'abord au cas hypothétique simplifié d'une orbite circulaire. Dans ce cas, le mouvement de la planète est uniforme ; les angles balayés par les lignes radiales issues du Soleil sont proportionnels aux durées corres-

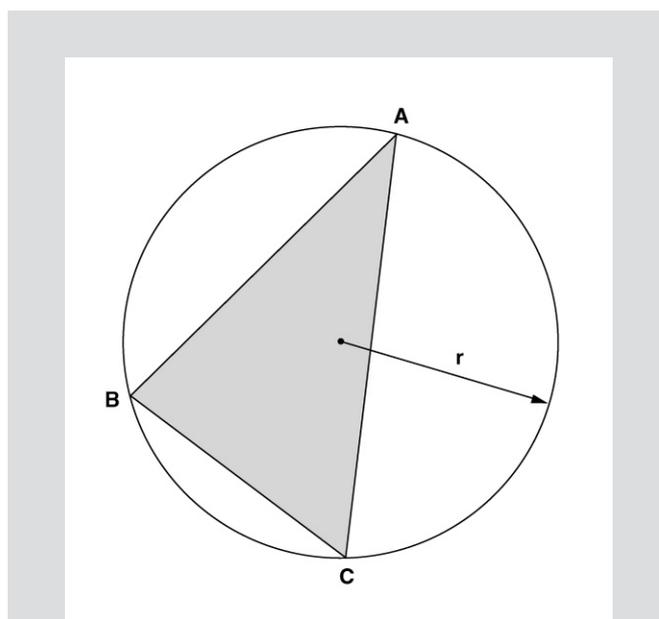


Figure 14.5. Théorème de la géométrie grecque classique : l'aire d'un triangle quelconque ABC inscrit dans un cercle est égale à  $(AB \times BC \times CA) / 4r$ , où AB, BC et CA sont les cordes formant les côtés du triangle et r est le rayon.

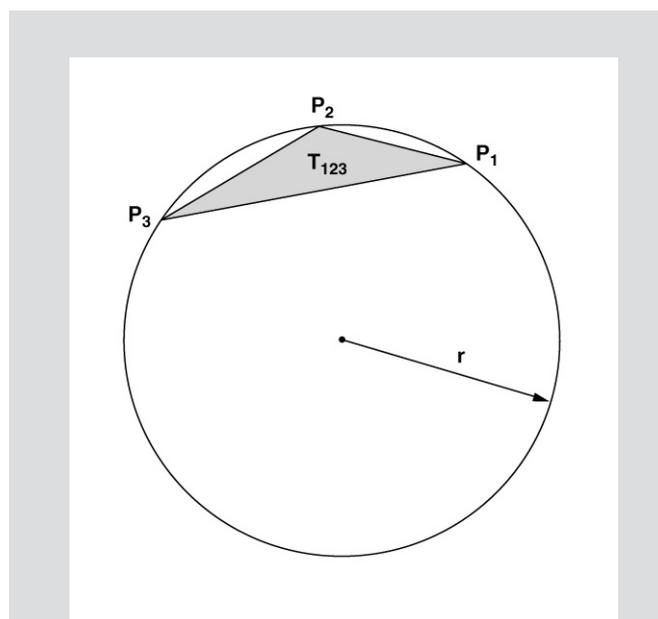
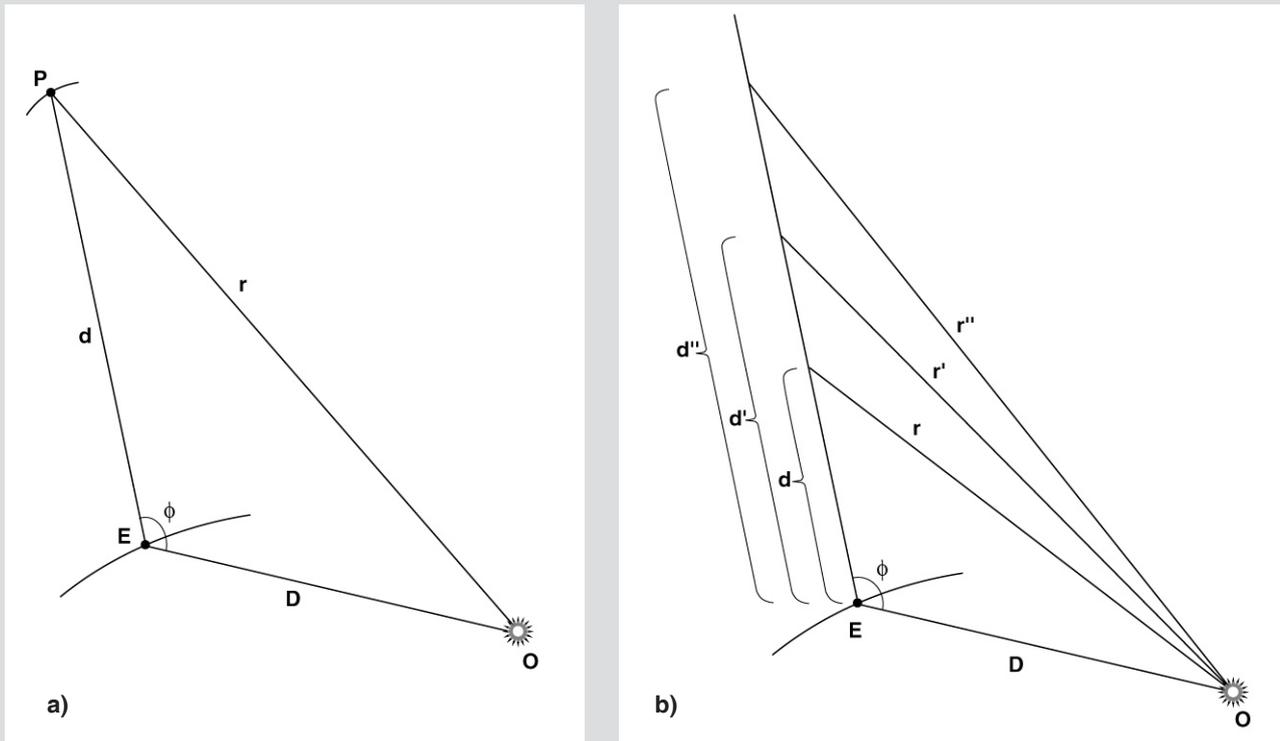


Figure 14.6. Application du théorème classique au triangle  $T_{123}$  :

$$T_{123} = (P_1P_2 \times P_2P_3 \times P_1P_3) / 4r.$$



**Figure 14.7.** Relation entre des inconnues dans la configuration Soleil-Cérès-Terre. a) L'angle  $\phi$  est connu par les observations de Piazzi ainsi que la distance  $D$  entre la Terre et le Soleil. Cela définit une relation fonctionnelle entre la distance inconnue  $d$  entre la Terre et Cérès et la distance inconnue  $r$  entre le Soleil et Cérès, comme on peut le voir en (b). b) A chaque valeur hypothétique de  $r$  correspond une valeur unique de  $d$ , cohérente avec les valeurs connues de  $\phi$  et  $D$ .

pondantes, divisées par la période totale  $T$  de l'orbite. Selon les lois de Kepler  $T_2 = r_3$ ,  $T$  est proportionnel à la puissance trois demis du rayon du cercle ( $r^{3/2}$ ).

A première vue, l'aire  $T_{123}$  est une fonction un peu compliquée des angles au Soleil. Cependant, il existe une relation harmonique sous-jacente exprimée par un beau théorème de la géométrie grecque classique qui dit que *l'aire d'un triangle inscrit dans un cercle est égale au produit des côtés du triangle divisé par quatre fois le rayon du cercle* (Figure 14.5). Si l'on applique cela à notre cas, l'aire  $T_{123}$  est égale au produit des cordes  $P_1P_2$ ,  $P_2P_3$  et  $P_1P_3$ , divisé par quatre fois le rayon de l'orbite (Figure 14.6).

En première approximation, nous pouvons dire que lorsque les positions de la planète ( $P_1$ ,  $P_2$ ,  $P_3$ ) ne sont pas trop éloignées les unes des autres, la longueur de chacune de ces cordes est très voisine de l'arc de cercle correspondant. Ce dernier, par ailleurs, est égal à la longueur totale de la circonférence du cercle multipliée par le rapport de la durée écoulée pour cet

arc sur la période totale de l'orbite circulaire [c'est-à-dire  $2\pi r \times (\text{durée}/r^{3/2})$ ]. Si l'on applique cela, on peut estimer  $T_{123}$  par le calcul suivant :

$$\begin{aligned}
 T_{123} &\approx \frac{1}{4r} (P_1P_2 \times P_2P_3 \times P_1P_3) \\
 &= \frac{1}{4r} \times \left[ 2\pi r \times \left( \frac{t_2 - t_1}{r^{3/2}} \right) \right] \\
 &\quad \times \left[ 2\pi r \times \left( \frac{t_3 - t_2}{r^{3/2}} \right) \right] \times \left[ 2\pi r \times \left( \frac{t_3 - t_1}{r^{3/2}} \right) \right] \\
 &= 2\pi^3 \times \frac{(t_2 - t_1) \times (t_3 - t_2) \times (t_3 - t_1)}{r^{5/2}}
 \end{aligned}$$

(Le symbole «  $\approx$  » signifie « approximativement égal à »).

Ce qui est intéressant ici, ce ne sont pas les détails du calcul mais seulement la forme générale du résultat qui est une approximation de  $T_{123}$  par une simple fonction des durées écoulées et d'un paramètre supplémentaire (le rayon). Pouvons-nous développer une approximation semblable pour  $T_{123}$  sans faire de supposition concernant la forme spécifique de l'orbite képlérienne ? Il faut évoquer

ici la courbure constante, d'un type supérieur, qui gouverne les courbures variables des orbites non circulaires. Gauss avait raison de croire qu'en se basant sur sa méthode de fonctions hypergéométriques et modulaires, et en se guidant par des expériences numériques sur des orbites connues, il pourrait développer l'estimation recherchée – estimation dans laquelle le rôle du rayon dans une orbite circulaire serait joué par une certaine combinaison des distances entre Cérès et le Soleil pour les positions  $P_1$ ,  $P_2$  et  $P_3$ .

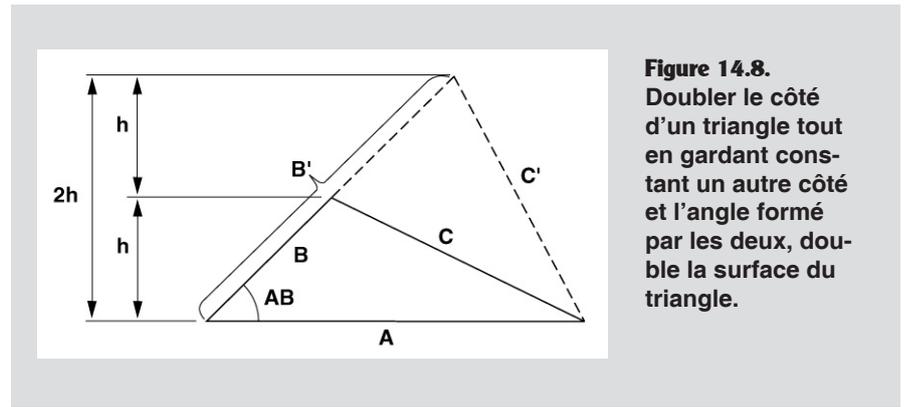
Néanmoins, une pensée inquiétante surgit maintenant à notre esprit : à quoi bon mener une enquête poussée sur  $T_{123}$  si le résultat final doit dépendre d'une inconnue dont la détermination est le problème que nous nous sommes initialement proposés de résoudre ? La distance entre Cérès et le Soleil est tout autant une inconnue que la distance entre la Terre et Cérès ; en fait, chacune de ces deux distances peut être déterminée à partir de l'autre en calculant les dimensions du triangle entre la Terre, le

Soleil et Cérès dont l'angle au sommet « Terre » est connu grâce aux mesures de Piazzi (Figure 14.7). Mais si aucun des deux n'est connu, à quoi peut servir cette relation triangulaire ? Et si, comme cela s'avère être le cas ici, la correction nécessaire de notre approche grossière initiale pour calculer la distance entre la Terre et Cérès doit dépendre de la connaissance *a priori* de cette distance, alors toute notre stratégie ne semblera être bâtie que sur du sable.

Ne jetons pas toutefois l'éponge ! En combinant les différentes relations et estimations et en utilisant les unes pour corriger les autres tour à tour, nous pourrions peut-être trouver un moyen de « converger » vers des valeurs précises, par un processus « autocorrectif » d'approximations successives. C'est en effet exactement ce que Gauss a fait d'une manière particulièrement ingénieuse.

Avant cela, procédons à un travail préliminaire : élaborer une estimation de l'aire de la différentielle  $T_{123}$  indépendante de toute hypothèse *a priori* concernant la forme de l'orbite.

Comme nous l'avons déjà dit, la tâche à laquelle nous sommes confrontés implique de multiples variabilités interconnectées que nous devons organiser d'une certaine



**Figure 14.8.** Doubler le côté d'un triangle tout en gardant constant un autre côté et l'angle formé par les deux, double la surface du triangle.

manière.

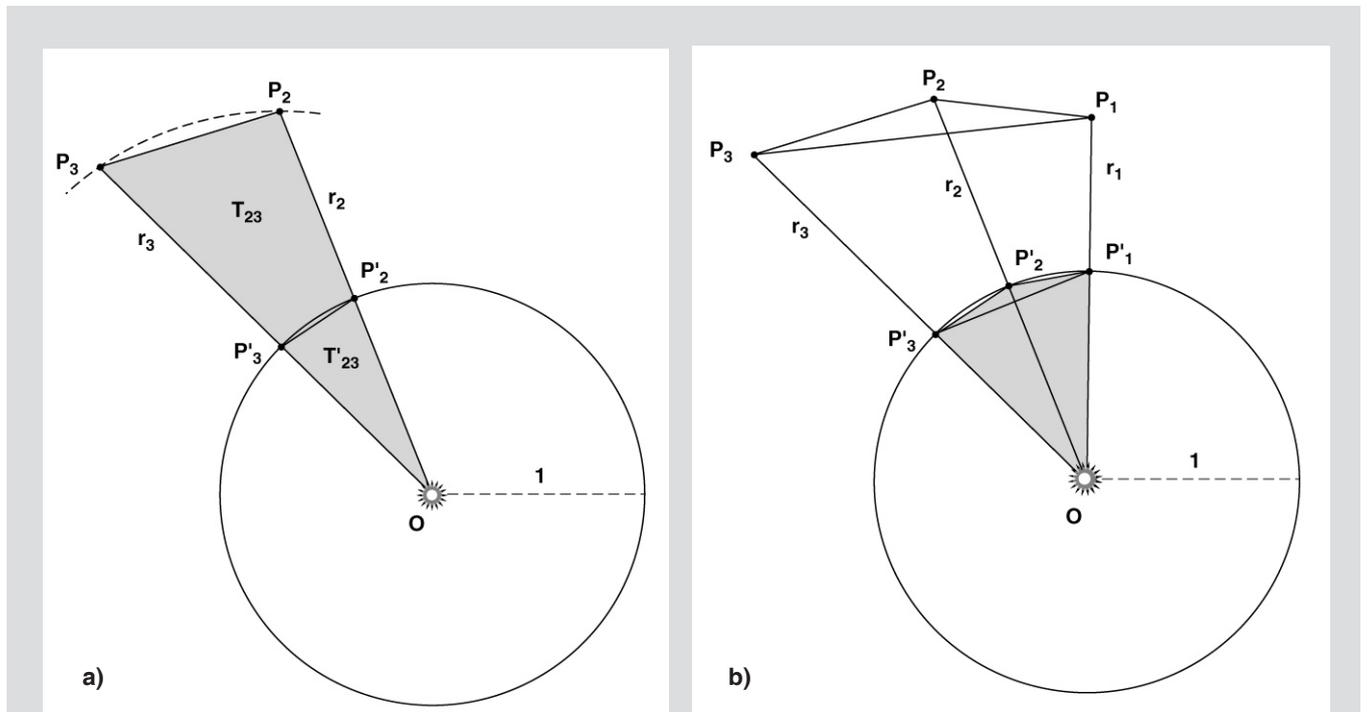
Bien que ces variabilités ne soient en réalité que les facettes d'une même unité organique, une certaine dose de « comptabilité » mathématique semble inévitable dans l'analyse qui suit, compte tenu de la relative linéarité du médium de communication que nous sommes obligés d'utiliser. Contrairement à des préjugés largement répandus, il n'y a rien de sophistiqué dans la comptabilité, et celle-ci n'a aucun autre contenu que de nous permettre d'organiser un réseau de relations géométriques de la plus simple espèce. Dans l'ordonnancement hypergéométrique de Gauss-Kepler qui modèle tout le développement

de la solution, l'aspect sophistiqué est implicite – nous devons lire « entre les lignes ».

Les éléments essentiels sont déjà disponibles grâce au travail de la section précédente sur la géométrie conique sous-jacente à l'orbite de Cérès. Notre recherche sur les relations entre les aires triangulaires  $T_{12}$ ,  $T_{23}$ ,  $T_{13}$  et  $T_{123}$ , les hauteurs des points du cône correspondant à  $P_1$ ,  $P_2$ ,  $P_3$  et le paramètre orbital  $h$ , nous a conduite à une conclusion que nous pouvons résumer dans la formule suivante :

$$T_{123} = \frac{(h_1 \times T_{23}) - (h_2 \times T_{13}) + (h_3 \times T_{12})}{h} \quad (1)$$

(voir figure 14.1).



**Figure 14.9.** « Réduction » des relations sur une orbite non circulaire à des relations sur un cercle.  
 a) L'aire du triangle  $T'_{23}$  obtenu en projetant  $P_2$  et  $P_3$  sur un cercle de rayon unitaire est égale à  $T_{23}/(r_2 \times r_3)$ .  
 b) Idem pour les triangles  $T'_{12}$  et  $T'_{13}$ . Les angles dont le sommet est au centre du Soleil sont conservés, mais les longueurs sont réduites à 1.

On peut tout de suite faire deux remarques à ce sujet :

1) Rappelez-vous que nous avons fait un choix de 90° pour l'angle du cône au sommet. Sous cette condition, les hauteurs  $h_1$ ,  $h_2$  et  $h_3$  sont égales aux distances radiales de  $P_1$ ,  $P_2$  et  $P_3$  au Soleil. Appelons ces dernières  $r_1$ ,  $r_2$ ,  $r_3$ .

2) Selon les contraintes de Kepler-Gauss, la *racine carrée* du demi-paramètre est proportionnelle au rapport des aires balayées par les durées correspondantes (voir section 8). Nous avons également déterminé la constante de proportionnalité qui nous amène à multiplier la durée par un facteur  $p$ . Le *demi-paramètre lui-même* sera donc égal au produit des aires balayées pendant une *paire* quelconque d'intervalles de temps divisé par  $\pi^2$  multiplié au produit des durées correspondantes. Nous pouvons, par exemple, combiner les relations de la manière suivante :

$$\sqrt{h} = \frac{S_{12}}{(t_2 - t_1) \times \pi},$$

$$\sqrt{h} = \frac{S_{23}}{(t_3 - t_2) \times \pi}$$

en multipliant ces deux relations, nous obtenons :

$$h = \frac{S_{12} \times S_{23}}{(t_2 - t_1) \times (t_3 - t_2) \times \pi^2}.$$

C'est, d'après l'équation (1) ci-dessus, la grandeur par laquelle nous devons diviser  $[(r_1 \times T_{23}) - (r_2 \times T_{13}) + (r_3 \times T_{12})]$ , pour obtenir la valeur de la différentielle triangulaire  $T_{123}$ .

Cela étant établi, observez attentivement la combinaison des rayons  $r_1$ ,  $r_2$ ,  $r_3$  et des aires triangulaires  $T_{12}$ ,  $T_{23}$ ,  $T_{13}$  intervenant dans la valeur de  $T_{123}$ . Ces aires triangulaires sont déterminées par le réseau d'angles dont le sommet est le centre du Soleil, c'est-à-dire les angles formés par les lignes radiales  $OP_1$ ,  $OP_2$ ,  $OP_3$  dont les longueurs sont  $r_1$ ,  $r_2$  et  $r_3$ . Ces grandeurs sont interconnectées du fait que  $P_1$ ,  $P_2$  et  $P_3$  se trouvent sur une même et unique section conique. Essayons de dégager le cœur de la relation en nous focalisant sur les angles et en essayant de « projeter » l'ensemble du réseau en terme de relations sur un *cercle*.

Il existe une relation simple entre l'aire et les côtés d'un triangle qui peut nous être utile ici. Si nous multiplions un côté d'un triangle par un facteur

quelconque en gardant inchangés un autre côté et l'angle entre eux deux, alors l'aire du triangle sera multipliée par le même facteur. Par exemple, si nous doublons le côté B d'un triangle dont les côtés sont A, B et C, en conservant la longueur de A et l'angle AB, on obtiendra alors un triangle dont les côtés seront A, 2B et un certain C' qui aura une aire double de celle du triangle original (**Figure 14.8**). La raison de cela est simple à montrer : si A est la base du triangle, en doublant B on double la hauteur du triangle alors que sa base reste la même. L'aire du triangle – qui vaut la moitié du produit de la base par la hauteur – sera donc doublée. La démonstration est la même lorsque l'on multiplie ou divise un côté par un facteur quelconque.

Appliquons cela, par exemple, à  $T_{23}$  en notant que ses deux grands côtés sont les segments radiaux dont les longueurs sont  $r_2$  et  $r_3$  (**Figure 14.9a**). Si nous divisons le premier côté par  $r_2$  et le second par  $r_3$ , nous obtiendrons alors un triangle d'aire  $T'_{23}$ , dont les côtés correspondants auront une longueur unitaire et dont l'aire sera  $T_{23}$  divisé par le produit de  $r_2$  par  $r_3$ . En d'autres termes,  $T_{23}$  est égal à  $r_2 \times r_3 \times T'_{23}$ . Le produit de  $r_1$  par  $T_{23}$  qui intervient dans notre calcul de la différentielle triangulaire est donc égal à  $r_1 \times r_2 \times r_3 \times T'_{23}$ .

La même approche appliquée à  $T_{13}$  donne comme résultat :

$$T_{13} = r_1 \times r_3 \times T'_{13},$$

$$\text{et } r_2 \times T_{13} = r_1 \times r_2 \times r_3 \times T'_{13}.$$

On procède de même pour  $T_{12}$ . Dans tous les cas, le produit des trois rayons est un *facteur commun*. Si nous prenons en compte ce facteur commun, nous pouvons alors « traduire » l'équation (1) en terme de triangles plus petits :

$$T_{123} = \frac{(r_1 \times r_2 \times r_3) \times (T'_{23} - T'_{13} + T'_{12})}{h}.$$

Notez que les nouveaux triangles intervenant dans cette relation « distillée », ont les *mêmes angles d'apex* au centre du Soleil que les triangles originaux, mais que les longueurs des côtés radiaux ont toutes été réduites à 1 (**Figure 14.9**). Dit d'une autre manière : nous avons « projeté » l'orbite de Cérès sur le cercle unitaire de la **figure 14.9** par une projection centrale de centre O ; les triangles  $T'_{23}$ ,  $T'_{13}$ ,  $T'_{12}$  sont formés de la même manière que

les originaux mais à partir des points  $P'_1$ ,  $P'_2$ ,  $P'_3$  du cercle unitaire, qui sont les images des positions de Cérès  $P_1$ ,  $P_2$ ,  $P_3$  selon cette projection. La grandeur exprimée par  $T'_{23} - T'_{13} + T'_{12}$  est précisément le triangle entre  $P'_1$ ,  $P'_2$ ,  $P'_3$  sur le cercle unitaire. Appelons  $T'_{123}$  cette nouvelle différentielle triangulaire inscrite sur le cercle unitaire. Nous obtenons :

$$T_{123} = \frac{(r_1 \times r_2 \times r_3) \times T'_{123}}{h}. \quad (4)$$

Gardez en mémoire notre conclusion de l'équation (2) selon laquelle  $h$  est le produit des secteurs  $S_{12}$  et  $S_{23}$  divisé par  $\pi^2$  et le produit des durées écoulées.

Ce que nous avons accompli au cours de cette analyse a été de réduire la géométrie d'une orbite de section conique arbitraire à celle d'une simple orbite circulaire. En effet, les sommets du triangle  $T'_{123}$  – les positions  $P'_1$ ,  $P'_2$ ,  $P'_3$  – se trouvent tous sur le cercle unitaire et l'aire  $T'_{123}$  ne dépend que des *angles* sous-tendus par les positions de Cérès au Soleil (**Figure 14.10**).

Nous pouvons maintenant appliquer le théorème de géométrie grecque classique que nous avons évoqué plus haut pour le cas d'une orbite circulaire. L'aire du triangle est égale au produit des côtés divisé par quatre fois le rayon du cercle sur lequel se trouvent les sommets (il s'agit ici du cercle unitaire). Nous obtenons donc ici :

$$(5) \quad T'_{123} = \frac{P'_1 P'_2 \times P'_2 P'_3 \times P'_3 P'_1}{4}.$$

Jusqu'ici nous n'avons utilisé que des relations géométriques rigoureuses. Dans la mesure où le mouvement orbital de Cérès est gouverné par les contraintes de Kepler-Gauss, et dans la mesure où les théorèmes de la géométrie grecque classique sont valides pour les relations spatiales élémentaires à l'échelle de notre système solaire, notre calcul de  $T'_{123}$  et de  $T_{123}$  est précis et correct.

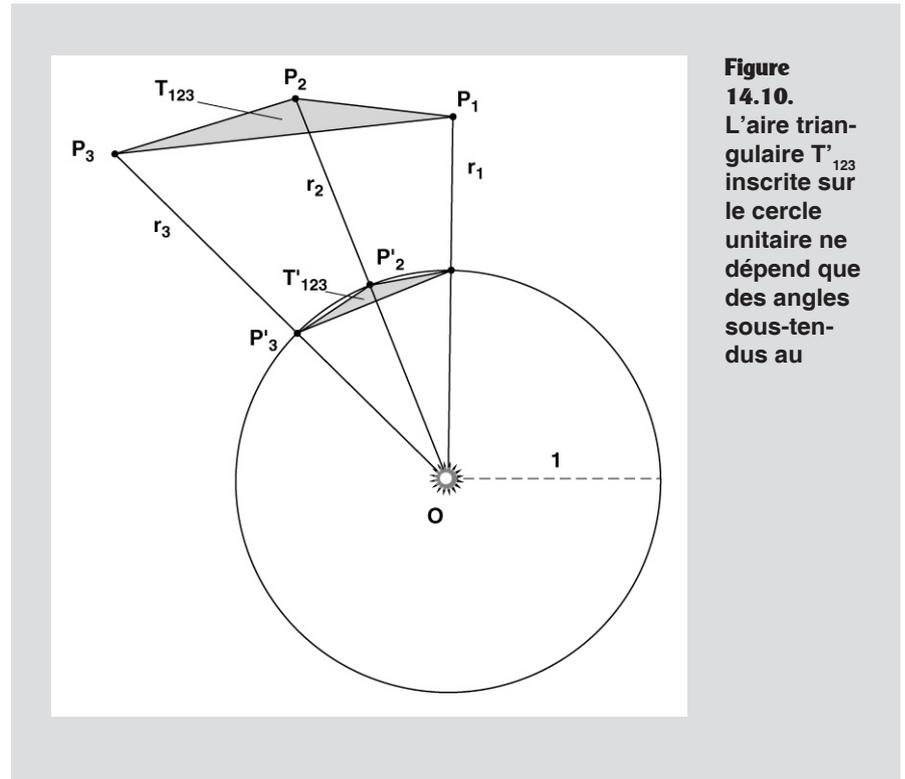
A cette étape, Gauss a utilisé des estimations apparemment grossières en ce qui concerne les facteurs qui interviennent dans le produit pour  $T'_{123}$ . En fait, elles sont du même genre que l'approximation grossière que nous avons essayé d'utiliser dans notre approche initiale pour calculer la distance entre la Terre et Cérès. Si nous avions à l'époque considéré inacceptable le degré d'erreur

introduit par ce genre d'approximation, comment pourrions-nous alors l'accepter *maintenant* ?

Rappelez-vous que nous avons établi que la différentielle  $T_{123}$ , dont nous voulons maintenant estimer la valeur, représentait presque toute la marge d'erreur que notre approche précédente aurait introduite dans le calcul de la distance de la Terre à Cérès en ignorant la différence entre les secteurs orbitaux et les aires triangulaires. En fait, Gauss a remarqué que les différences correspondant aux paires de positions *adjacentes*, c'est-à-dire entre  $S_{12}$  et  $T_{12}$  et entre  $S_{23}$  et  $T_{23}$ , sont pratiquement d'un ordre de grandeur inférieur à la différence entre  $S_{13}$  et  $T_{13}$ , c'est-à-dire celle qui correspond à la paire de positions qui délimitent le plus grand arc sur l'orbite (**Figures 12.2 et 14.4**). Par ailleurs, la différence entre  $S_{13}$  et  $T_{13}$  est égale à la somme de  $T_{123}$  et des petites différences  $S_{12}-T_{12}$  et  $S_{23}-T_{23}$ . Il en résulte que  $T_{123}$  ramène la *taille approximative de l'« erreur »* de notre approche précédente à une valeur inférieure d'un ordre de grandeur.

Une « erreur » introduite dans une valeur approchée de  $T_{123}$  a donc la signification d'une « différentielle de différentielle ». En termes numériques, elle sera au moins d'un ordre de grandeur inférieur – et le résultat final de notre calcul de Cérès sera au moins d'un ordre de grandeur plus précis – que l'erreur de notre première approche qui ne tenait pas du tout compte de la différentielle.

Rappelez-vous également de ce qui suit : en tant que grandeur géométrique,  $T_{123}$  mesure l'effet de la courbure de l'orbite planétaire sur



**Figure 14.10.** L'aire triangulaire  $T'_{123}$  inscrite sur le cercle unitaire ne dépend que des angles sous-tendus au

l'intervalle de  $P_1$  à  $P_3$ . L'aspect *relativement* grossier des approximations que nous allons introduire ci-dessous concerne l'ordre de grandeur de *changement dans la courbure locale* sur cet intervalle. Mais à partir du moment où ces approximations auront rempli leur rôle, c'est-à-dire nous permettre d'obtenir *une première approximation acceptable* de la distance entre la Terre et Cérès, nous reviendrons immédiatement sur notre calcul et utiliserons *la cohérence* d'une première approximation d'orbite képlérienne pour éliminer pratiquement toute l'erreur que nous aurons introduite.

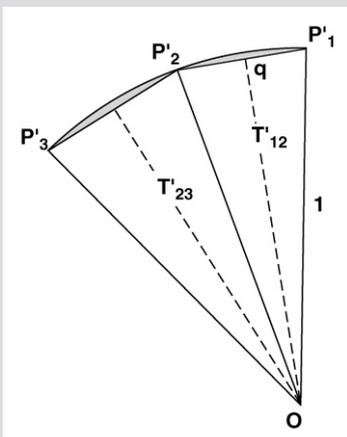
### Terminer le travail

Intéressons-nous à notre estimation finale de la différentielle  $T_{123}$ . Notre objectif immédiat est de ne garder que *les facteurs les plus essentiels* intervenant dans la fonction de  $T_{123}$  développée ci-dessus, et de tout ramener, autant que possible, aux durées écoulées connues.

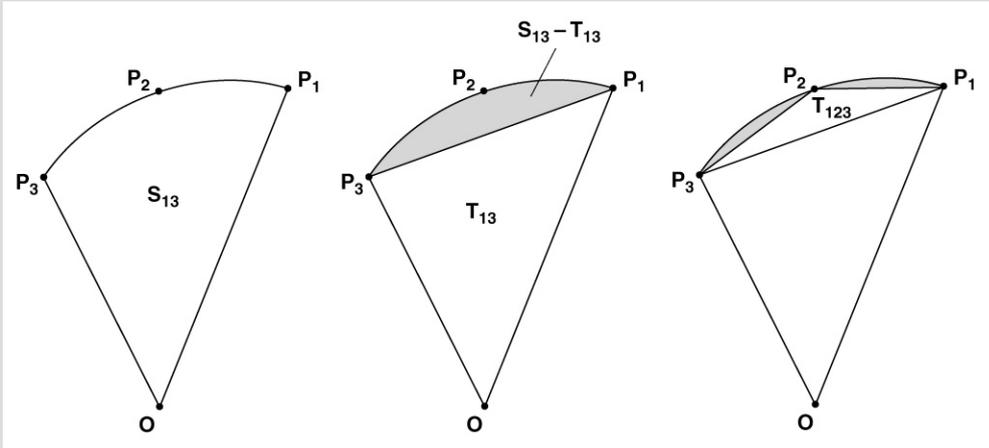
Souvenez-vous d'abord que  $P'_1, P'_2, P'_3$  se trouvent sur le cercle unitaire ; les segments  $P'_2P'_1, P'_3P'_2, P'_3P'_1$  sont donc des cordes d'arcs du cercle unitaire et constituent également les *bases* de petits triangles isocèles ayant O comme sommet commun et dont les aires sont  $T'_{12}, T'_{23}, T'_{13}$  (**Figure 14.11**). Les hauteurs de ces triangles sont les lignes radiales qui relient O aux points se trouvant au milieu des cordes respectives. Si maintenant les angles d'apex O sont relativement petits, les différences entre les cordes et les arcs circulaires seront très petites et les lignes radiales vers les points milieu des cordes seront à peine plus courtes que le rayon du cercle (unitaire). Prenons donc par approximation ces hauteurs de triangles égales à l'unité. Les aires des triangles seront donc égales à la moitié de leurs bases, ou encore :

$$P'_1P'_2 \text{ est très proche de } (2 \times T'_{12}),$$

$$P'_3P'_2 \text{ est très proche de } (2 \times T'_{23}),$$



**Figure 14.11. Estimation des aires des triangles  $T'_{12}, T'_{23}, T'_{13}$ . L'aire d'un triangle est égale au produit de la moitié de sa base par sa hauteur.  $P'_1$  et  $P'_2$  délimitant la base de  $T'_{12}$ , la hauteur correspondante est égale à la ligne en pointillés Oq. Lorsque  $P'_1$  et  $P'_2$  sont proches l'un de l'autre, Oq est à peine plus petit que le rayon du cercle qui vaut 1. L'aire de  $T'_{12}$  sera donc très voisine de  $(1/2) \times (P'_1P'_2)$ . De la même manière,  $T'_{23} \approx (1/2) \times (P'_2P'_3)$  et  $T'_{13} \approx (1/2) \times (P'_1P'_3)$ .**



**Figure 14.12.**  
En première approximation  $S_{13}$  est très proche de  $T_{13} + T_{123}$ .

$P_3P_1$  est très proche de  $(2 \times T'_{13})$ .  
Si l'on applique ces approximations à l'équation (5), nous trouvons pour valeur approximative de  $T'_{123}$  :

$$(6) \quad \frac{(2 \times T'_{12}) \times (2 \times T'_{23}) \times (2 \times T'_{13})}{4}$$

ou encore deux fois le produit de  $T'_{12}$  avec  $T'_{23}$  et  $T'_{13}$ .

Ce résultat est très élégant, mais que nous apprend-il au sujet de la relation entre  $T_{123}$  et  $T_{12}$ ,  $T_{23}$  et  $T_{13}$  sur l'orbite initiale non circulaire ? Souvenez-vous de la manière par laquelle nous avons obtenu les aires triangulaires intervenant dans le produit ci-dessus. Numériquement,  $T'_{12}$ ,  $T'_{23}$  et  $T'_{13}$  sont égaux respectivement aux quotients de  $T_{12}/(r_1 \times r_2)$ ,  $T_{23}/(r_2 \times r_3)$  et  $T_{13}/(r_1 \times r_3)$ . Exprimée à partir des triangles originaux, la valeur de  $T'_{123}$  devient :

$$(7) \quad 2 \times \frac{T_{12} \times T_{23} \times T_{13}}{(r_1 \times r_2) \times (r_2 \times r_3) \times (r_1 \times r_3)}$$

Notez que chacun des termes  $r_1$ ,  $r_2$ ,  $r_3$  entre dans le produit du dénominateur exactement deux fois.

Utilisons finalement cette approximation de  $T'_{123}$  pour calculer  $T_{123}$  à partir de la relation (4) en remarquant que la moitié des rayons en facteur s'annulent :

$$T_{123} = \frac{(r_1 \times r_2 \times r_3) \times T'_{123}}{h}$$

[par l'équation (4)],

et est très proche, par l'équation (7) de :

$$2 \times \frac{(T_{12} \times T_{23} \times T_{13}) / (r_1 \times r_2 \times r_3)}{h} \quad (8)$$

Un peu de comptabilité est encore nécessaire pour prendre en compte l'expression de  $h$  comme étant le quotient du produit de  $S_{12}$  et  $S_{23}$ , divisé par  $\pi^2$  multiplié par le produit des durées écoulées [équation (2)]. Le résultat de *diviser* par  $h$  est de *multiplier* par  $\pi^2$  et les durées écoulées et de diviser par le produit des secteurs. Si l'on rassemble tous ces facteurs dans l'équation (8) notre approximation de la valeur de  $T_{123}$  devient :

$$2 \times \frac{\pi^2 \times (t_2 - t_1) \times (t_3 - t_2) \times T_{12} \times T_{23} \times T_{13}}{S_{12} \times S_{23} \times r_1 \times r_2 \times r_3} \quad (9)$$

Pour des raisons discutées ci-dessus, nous pouvons nous permettre à ce stade de simplifier par des approximations comme il suit. Pour un intervalle de mouvement relativement court, la distance entre le Soleil et Cérès ne change « pas beaucoup ». Nous pouvons donc remplacer le produit  $r_1 \times r_2 \times r_3$  par le cube de la seconde distance  $r_2$  ou encore le produit  $r_2 \times r_2 \times r_2$  sans introduire une grande erreur *en terme de pourcentage*. Vous constatez ensuite que  $T_{12}$  et  $T_{23}$  apparaissent au numérateur alors que  $S_{12}$  et  $S_{23}$  apparaissent au dénominateur du quotient que nous sommes en train d'estimer. Si nous *égalisons* simplement les triangles et les secteurs correspondants – dont les différences sont pratiquement d'un ordre de grandeur inférieur à celles de  $S_{13}$  et  $T_{13}$  – nous introduisons encore une erreur acceptable dans la valeur de  $T_{123}$ . Si l'on applique ces considérations à l'équation (9), nous obtenons pour notre approximation finale la valeur :

$$T_{123} \approx 2 \times \frac{\pi^2 \times (t_2 - t_1) \times (t_3 - t_2)}{r_2^3} \times T_{13} \quad (10)$$

Souvenez-vous que notre motivation initiale dans cette recherche était de « saisir » la relation entre le secteur  $S_{13}$  et le triangle  $T_{13}$ . Grâce à notre approximation cruciale, nous pouvons maintenant dire ce qui suit. Du fait que  $T_{123}$  constitue pratiquement l'ensemble de la différence entre le triangle  $T_{13}$  et le secteur  $S_{13}$  (**Figure 14.12**),

$S_{13} = T_{13} + T_{123}$  (en première approximation)

ou encore, en terme de rapport,

$$\frac{S_{13}}{T_{13}} \approx 1 + \frac{T_{123}}{T_{13}}$$

Or nous avons par ailleurs, dans l'équation (10), une approximation de  $T_{123}$  dans laquelle  $T_{13}$  est en facteur. Appliquant cela à notre estimation, nous pouvons conclure que :

$$\frac{S_{13}}{T_{13}} \approx 1 + \left( 2 \times \frac{\pi^2 \times (t_2 - t_1) \times (t_3 - t_2)}{r_2^3} \right)$$

Le plus gros du travail est terminé. Nous avons obtenu le « facteur correctif » crucial que Gauss a utilisé pour sa première approximation dans la détermination de la position de Cérès. Dans les quelque cent cinquante ans qui ont suivi la publication de l'ouvrage de Gauss *Théorie du mouvement des corps célestes se déplaçant au voisinage du Soleil selon des sections coniques*, les astronomes du monde entier l'ont utilisé pour calculer l'orbite des planètes et des comètes. Tout ce qui reste à faire se trouve dans la section suivante.

## 15. NOUS REMPORONS UNE NOUVELLE BATAILLE

« Mon cher ami, vous m'avez accordé une grande faveur par vos explications et vos remarques concernant votre méthode. Mes petits doutes, objections et soucis ont maintenant été balayés et je pense avoir saisi l'esprit de votre méthode. Encore une fois, je dois répéter que plus je me familiarise avec votre analyse, plus je vous admire. Quelles grandes choses nous obtiendrons de votre part dans le futur, si seulement vous prenez soin de votre santé ! »

Lettre de Wilhelm Olbers à Gauss,  
10 octobre 1802.

**N**ous disposons maintenant des éléments essentiels à partir desquels Gauss a élaboré sa méthode pour déterminer l'orbite de Cérès. Jusqu'à présent, le chemin vers la découverte a plutôt été étroit ; à partir de maintenant, il s'élargit et plusieurs approches alternatives sont possibles. Gauss en a exploré lui-même plusieurs afin de perfectionner sa méthode et de couper dans la masse des calculs nécessaires pour calculer réellement les éléments de l'orbite. Le résultat final de cela fut le livre de Gauss intitulé *Théorie du mouvement des corps célestes se déplaçant au voisinage du Soleil selon des sections coniques*, qu'il acheva en 1808, sept ans après sa prévision réussie pour Cérès. Comme Gauss l'a fait remarquer lui-même, l'apparence extérieure de sa méthode a tellement évolué qu'elle ressemblait finalement à peine à l'original. Cependant, le cœur de sa méthode est resté le même.

Nous avons essayé autant que possible de suivre le chemin original de Gauss. Ce chemin est décrit dans un manuscrit intitulé *Résumé d'ensemble de la méthode utilisée pour déterminer les orbites des deux nouvelles planètes* (ce titre fait référence aux astéroïdes Cérès et Pallas). Le *Résumé d'ensemble* a été publié en 1809, mais est probablement contemporain ou même identique à un résumé que Gauss avait rédigé pour Olbers au cours de l'automne 1802. Ce dernier document a été l'objet de plusieurs échanges de courrier entre les deux astronomes, dans lesquels Olbers soulevait beaucoup de questions et de critiques, et mettait Gauss au défi d'expliquer certains aspects de sa méthode. Par chance, cette correspondance qui nous donne des renseignements utiles sur la pensée de Gauss sur le sujet a été publiée. Nous en donnerons quelques extraits dans la dernière

section, le *stretto*.

Notre objectif maintenant est de compléter la méthode de Gauss pour construire une première approximation de l'orbite de Cérès à partir de trois observations.

Au cours des discussions précédentes, nous avons découvert une méthode pour reconstruire la seconde des trois positions de la planète ( $P_2$ ) à partir des valeurs de deux « coefficients » cruciaux – c'est-à-dire les rapports des aires triangulaires  $T_{12} : T_{13}$  et  $T_{23} : T_{13}$  – à partir de la donnée de trois observations et du mouvement connu de la Terre. La difficulté dans cette méthode réside dans le fait que les valeurs des coefficients requis ne peuvent être déduites des données d'une manière directe.

Notre première réponse fut d'utiliser, à la place des aires triangulaires, les secteurs orbitaux correspondants dont les rapports  $S_{12} : S_{13}$  et  $S_{23} : S_{13}$  sont connus par la « loi des aires » de Kepler, et sont égaux aux rapports des durées écoulées :  $(t_2 - t_1) : (t_3 - t_1)$  et  $(t_3 - t_2) : (t_3 - t_1)$ . Malheureusement, l'amplitude de l'erreur introduite par l'utilisation d'une approximation aussi grossière pour les coefficients, rend la construction presque inutile. En conséquence, nous avons développé dans les trois sections précédentes, une méthode pour corriger ces valeurs, jusqu'à atteindre un niveau de précision au moins d'un ordre de grandeur supérieur.

Le fruit immédiat de cet effort a été une estimation du rapport  $S_{13} : T_{13}$ . Il s'est avéré que  $S_{13}$  est supérieur à  $T_{13}$  d'un facteur environ égal à :

$$1 + \left( 2 \times \frac{\pi^2 \times (t_2 - t_1) \times (t_3 - t_2)}{r_2^3} \right).$$

Désignons cette grandeur qui est un peu plus grande que 1 par la lettre « G » (pour facteur correctif de Gauss). On a donc  $S_{13} \approx G \times T_{13}$ . Que s'en suit-il

en ce qui concerne les rapports  $T_{12} : T_{13}$  et  $T_{23} : T_{13}$  ?

Nous avons déjà déterminé que la plus grande source d'erreur en remplaçant  $T_{12} : T_{13}$  par  $S_{12} : S_{13}$  vient de la différence entre les *dénominateurs*. Le pourcentage d'erreur provenant de la différence entre les *numérateurs* est d'un ordre de grandeur inférieur. Nous pouvons maintenant corriger la différence dans les dénominateurs, du moins dans une bonne mesure.  $S_{13}$  étant plus grand que  $T_{13}$  d'un facteur voisin de G, cela signifie que le *quotient* de n'importe quelle grandeur par  $T_{13}$  sera plus grand du même facteur que le quotient correspondant de la même grandeur par  $S_{13}$ . En particulier :

$$\frac{T_{12}}{T_{13}} \approx G \times \frac{T_{12}}{S_{13}}.$$

Si nous remplaçons ici  $T_{12}$  par  $S_{12}$  dans le numérateur, nous introduirions une erreur d'un ordre de grandeur plus petit que la « correction » que nous venons d'effectuer avec G. Nous autorisant cette petite marge d'erreur et effectuant cette substitution, nous arrivons à l'estimation :

$$\frac{T_{12}}{T_{13}} \approx G \times \frac{S_{12}}{S_{13}} = G \times \frac{t_2 - t_1}{t_3 - t_1}.$$

Pour des raisons similaires :

$$\frac{T_{23}}{T_{13}} \approx G \times \frac{t_3 - t_2}{t_3 - t_1}.$$

Rappelez-vous que les rapports des durées écoulées constituaient notre choix initial de coefficients pour la construction de la position  $P_2$  de Cérès. Nos nouvelles valeurs ne sont rien d'autre que les mêmes rapports de durées multipliés par le « facteur correctif » de Gauss (G). Si notre raisonnement est valide, cette simple correction devrait suffire pour améliorer d'au moins un ordre de grandeur des valeurs initiales. En

appliquant les nouveaux coefficients corrigés dans notre méthode géométrique pour reconstruire la position  $P_2$  de Cérès, nous devrions obtenir une meilleure approximation par rapport à la position réelle d'au moins un ordre de grandeur. *Gauss vérifia que tel était bien le cas.*

L'histoire n'est cependant pas encore terminée. Il nous reste les tâches suivantes à accomplir :

- (i) déterminer les autres positions  $P_1$  et  $P_3$  de Cérès ;
- (ii) calculer au moins une orbite approximative de Cérès ;
- (iii) corriger les effets des diverses erreurs et différences, jusqu'à obtenir une orbite complètement cohérente avec les observations et autres conditions aux limites, prenant en compte de possibles erreurs d'observation.

## Nous sommes face à un paradoxe

Mais avant cela, n'avons-nous pas oublié quelque chose ? Le facteur  $G$  de Gauss n'est pas une valeur fixée *a priori* mais dépend de la distance *inconnue*  $r_2$  entre Cérès et le Soleil. Il semble que nous soyons face à un problème insoluble : nous avons besoin de  $r_2$  pour calculer  $G$  mais nous avons besoin de  $G$  pour calculer la position de Cérès à partir de laquelle seulement

$r_2$  peut être déterminé (Figure 15.1).

Le fait est que *ce genre d'autoréflexivité est typique du domaine hypergéométrique de Gauss*. Loin de constituer l'obstacle épouvantable dont il pourrait avoir l'air à première vue, le caractère autoréflexif des fonctions hypergéométriques et associées, est la clef de la *simplification* extraordinaire que les méthodes de Gauss, Riemann et Cantor, reposant sur l'*analysis situs*, présentent pour tout le domaine non algébrique. Ces fonctions ne peuvent pas être construites à partir « des données de départ » mais doivent être manipulées à partir du « résultat final », en termes de singularités caractéristiques d'un domaine complexe autoréflexif et autodéveloppant. L'un des principaux « secrets » du travail de Gauss est de savoir comment ce domaine supérieur détermine de manière efficiente tous les phénomènes des domaines inférieurs, y compris dans le champ de l'arithmétique et de la géométrie de l'espace visible.

C'est de ce point de vue supérieur que Gauss développa une variété de séries numériques rapidement convergentes pour des calculs pratiques dans l'astronomie, la géodésie et dans d'autres domaines. A partir de ces séries, nous pouvons calculer les valeurs des fonctions hypergéométriques et associées à un niveau élevé de précision. Cependant, les propriétés numériques des séries de coefficients, leurs taux de conver-

gence, leurs interrelations, etc., sont déterminées « à partir du résultat » par l'*analysis situs* du domaine complexe – le même principe que l'on retrouve dans le travail de Gauss sur les résidus biquadratiques. Bien que le développement explicite et formel de fonctions hypergéométriques ne soit pas nécessaire pour la solution de Gauss au problème de Cérès, ce domaine supérieur se lit « entre les lignes ».

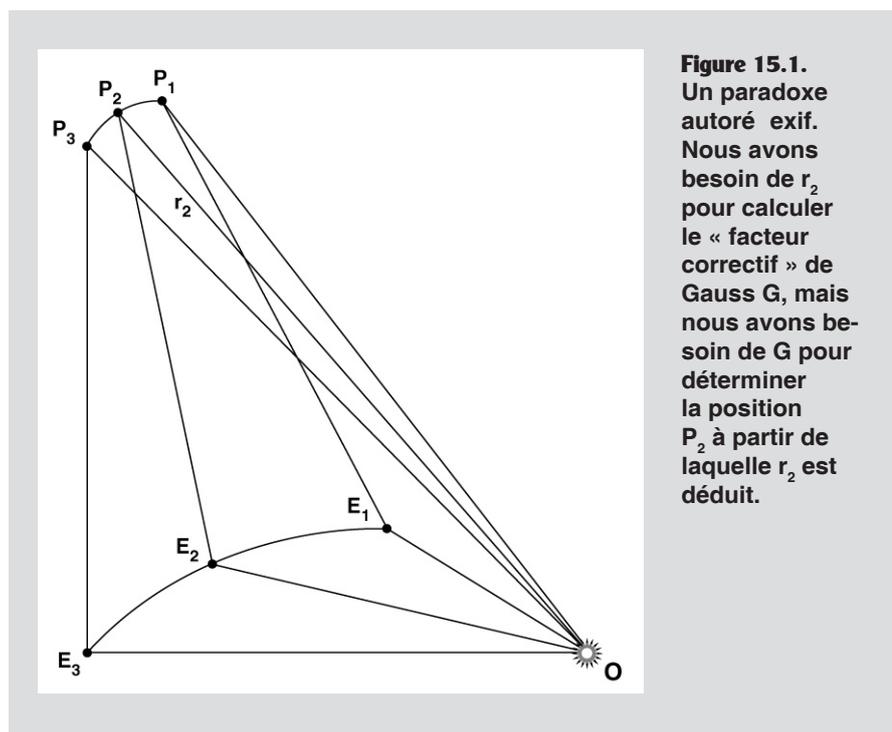
Dans le cas qui nous intéresse ici, la solution pratique de Gauss revient à « faire la quadrature du cercle » de la relation réflexive entre  $r_2$  et  $G$  par un processus autosimilaire d'approximations successives de l'orbite recherchée semblable à une série de Fibonacci.

La première étape est de choisir un premier terme de la série acceptable comme première approximation. Dans le cas de Cérès, nous pouvons supposer, comme von Zach, Olbers et d'autres le firent à l'époque, que l'orbite se trouve dans une région à peu près intermédiaire entre les orbites de Mars et de Jupiter. Cela revient à prendre pour  $r_2$  une valeur proche de 2,8 UA. La valeur correspondante de  $G$ , calculée à partir de cette valeur et des durées voisines de 21 jours entre les trois observations, est alors d'environ 1,003.

Une autre option, indépendante de toute conjecture spécifique concernant la position de l'orbite, reviendrait à réaliser notre construction de  $P_2$  sans la correction de Gauss, et à calculer la valeur de la distance  $r_2$  entre Cérès et le Soleil à partir de l'approximation grossière de la position de Cérès.

Ayant sélectionné une valeur initiale de  $r_2$ , l'étape suivante est de vérifier si celle-ci est cohérente avec la relation autoréflexive décrite ci-dessus. Partant de la valeur proposée de  $r_2$  et des durées écoulées, on calcule la valeur du facteur correctif  $G$  à partir de la formule énoncée ci-dessus ; ensuite, on utilise cette valeur de  $G$  pour déterminer un jeu de coefficients « corrigés » à partir desquels on construit une nouvelle estimation de la position  $P_2$  de Cérès.

On compare enfin la distance entre cette position et le Soleil à la valeur initiale de  $r_2$ . Si les deux valeurs *coïncident* selon une marge d'erreur acceptable, alors on peut considérer l'ensemble  $r_2, P_2, G$  et les coefficients associés, comme consistants et cohérents et déterminer une orbite à partir



**Figure 15.1.**  
Un paradoxe autoréflexif. Nous avons besoin de  $r_2$  pour calculer le « facteur correctif » de Gauss  $G$ , mais nous avons besoin de  $G$  pour déterminer la position  $P_2$  à partir de laquelle  $r_2$  est déduit.

d'eux. Si les deux valeurs de  $r_2$  diffèrent de manière significative, alors nous savons que la valeur initiale de  $r_2$  ne peut pas convenir et nous devons par conséquent la modifier. Une simple approche par tâtonnements, bien que réalisable, est néanmoins assez laborieuse. Il vaut mieux s'efforcer à « encercler » la valeur cherchée par des approximations successives qui prennent en compte la *dépendance fonctionnelle* de la valeur initiale et de la valeur calculée, et en particulier *le taux de changement* de cette dépendance. A partir de ce type d'analyse, que nous n'allons pas développer ici davantage, Gauss obtint la (quasi) coïncidence recherchée en très peu d'étapes.

### Comment trouver les deux autres positions de Cérès

Intéressons-nous maintenant à la tâche essentielle suivante. Supposons que nous ayons réussi à obtenir une position  $P_2$  et la distance  $r_2$  correspondante qui soient autoconsistantes avec notre processus de construction géométrique dans le sens indiqué ci-dessus. Comment pouvons-nous déterminer les deux autres positions de Cérès  $P_1$  et  $P_3$  ?

Comme nous pouvons nous y attendre, les relations nécessaires se trouvent déjà inscrites dans notre construction originale. Nous renvoyons le lecteur aux éléments essentiels de cette construction et aux diagrammes correspondants. Rappelez-vous que  $P_2$  a été obtenu comme étant l'intersection d'un certain plan Q avec la ligne de visée  $L_2$  – la droite partant de la position  $E_2$  de la Terre et de direction définie par la seconde observation. Le plan Q a été déterminé de la manière suivante. Nous avons d'abord construit un point F dans le plan de l'orbite de la Terre tel que F a la même relation par rapport aux positions  $E_1$  et  $E_3$  de la Terre, en termes de « loi du parallélogramme » de décomposition de déplacements, que  $P_2$  a par rapport à  $P_1$  et  $P_3$  (Figure 15.2a). Pour cela, nous avons choisi deux points  $F_1$  et  $F_3$  situés respectivement sur les droites  $OE_1$  et  $OE_3$  de telle sorte que  $OF_1/OE_1 =$  la valeur estimée de  $T_{23}/T_{13}$  et  $OF_3/OE_3 =$  la valeur estimée de  $T_{12}/T_{13}$ .

Nous avons alors construit le point

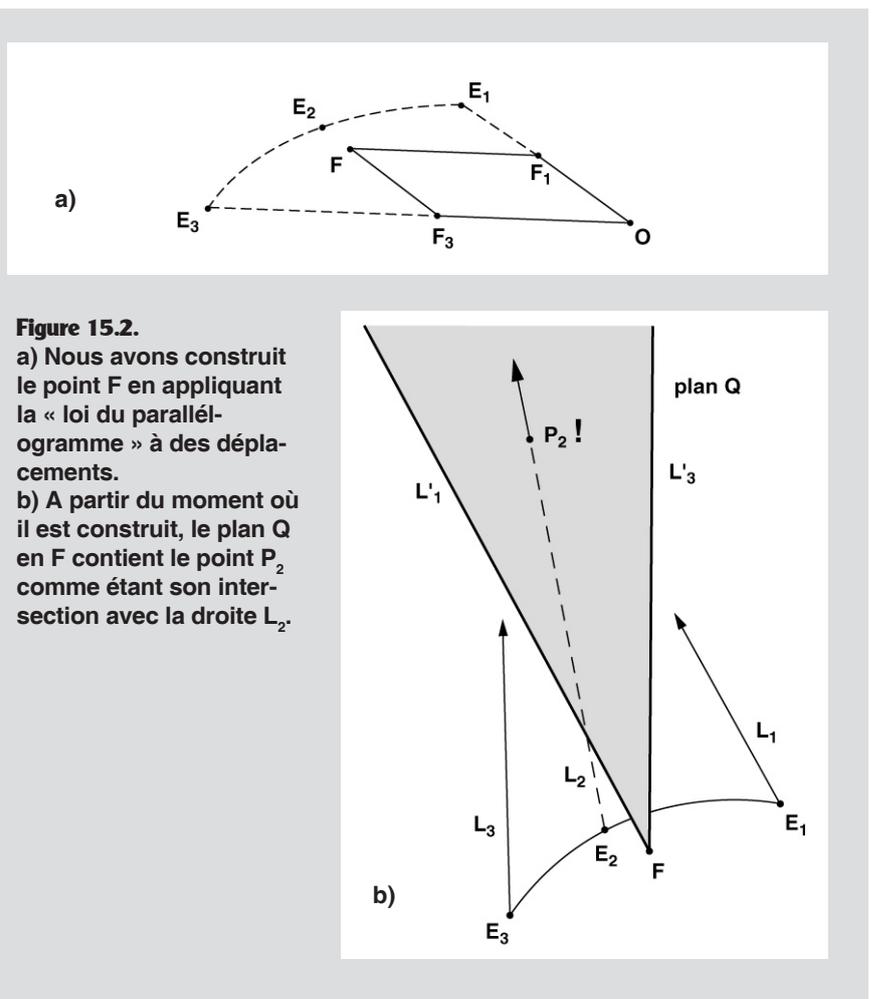


Figure 15.2.

a) Nous avons construit le point F en appliquant la « loi du parallélogramme » à des déplacements.

b) A partir du moment où il est construit, le plan Q en F contient le point  $P_2$  comme étant son intersection avec la droite  $L_2$ .

F comme étant le résultat de la combinaison des déplacements  $OF_1$  et  $OF_3$  – c'est-à-dire le quatrième sommet du parallélogramme dont les autres sommets sont O,  $F_1$  et  $F_3$ .

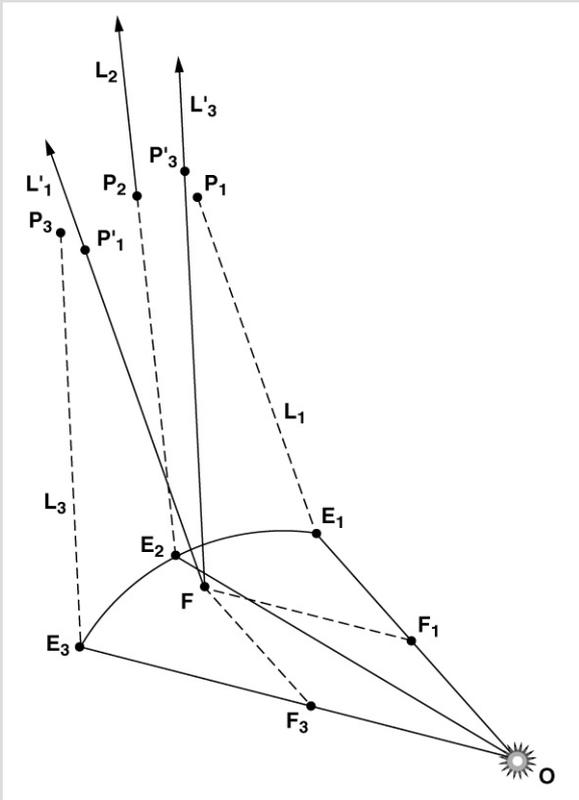
Nous avons ensuite tracé les parallèles passant par F aux deux autres lignes de visée  $L_1$  et  $L_3$  (Figure 15.2b). Q est le plan déterminé par ces parallèles passant par F et l'intersection du plan Q avec  $L_2$  donne notre position recherchée  $P_2$ . Nous avons montré que cette reconstruction de la position de Cérès coïnciderait bien avec la position réelle si nous n'avions pas introduit une certaine marge d'erreur dans notre estimation des coefficients  $T_{23}/T_{13}$  et  $T_{12}/T_{13}$  en plus de celles liées aux mesures de Piazzi elles-mêmes. Nous avons également pu réduire cette erreur grâce à la correction de Gauss.

Pour trouver  $P_1$  et  $P_3$ , regardez plus attentivement les relations dans le plan Q. Appelons  $L'_1$  et  $L'_3$  les parallèles à  $L_1$  et  $L_3$  passant par F (Figure 15.3). Sur chacune de ces droites, repérez les points  $P'_1$  et  $P'_3$  tels que la distance  $FP'_1$  soit égale à la distance

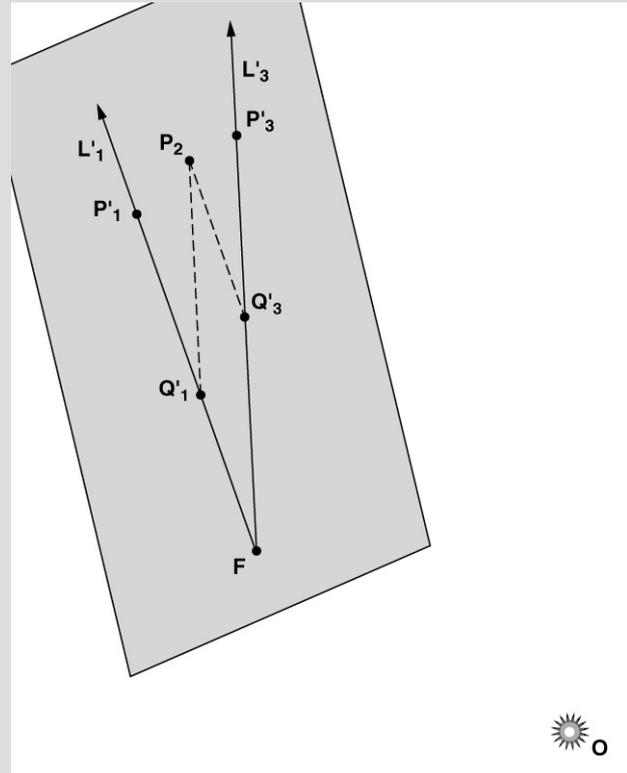
de la Terre à Cérès  $E_1P_1$  et  $FP'_3$  à  $E_3P_3$ . Autrement dit, nous devons transférer sur F les segments  $E_1P_1$  et  $E_3P_3$  depuis leurs bases  $E_1$  et  $E_3$ , sans changer leurs directions.

Quelle est la relation entre  $P_2$  et les points  $F$ ,  $P'_1$  et  $P'_3$  ? Du fait du caractère « héréditaire » de l'ensemble de la construction, on pourrait certainement s'attendre à voir apparaître ici les *mêmes coefficients* que ceux que nous avons déduits des relations entre  $P_2$  et O,  $P_1$  et  $P_3$ , et utilisés pour la construction de F. Un petit effort pour combiner les déplacements concernés confirme en effet cette supposition.

Cela nous conduit à une construction très simple de  $P_1$  et de  $P_3$ . Tout ce que nous avons à faire est de décomposer le déplacement  $FP_2$  – qui est connu grâce à notre construction – en une combinaison de déplacements le long de  $L'_1$  et  $L'_3$ . En d'autres termes, nous allons construire les points  $Q'_1$  et  $Q'_3$  le long de ces axes de telle sorte que  $FP_2$  soit égal à la somme des déplacements  $FQ'_1$  et  $FQ'_3$  dans le sens de la loi



**Figure 15.3.** Ayant déterminé la position de  $P_2$ , nous cherchons maintenant à localiser  $P_1$  et  $P_3$ , à partir des points  $P'_1$  et  $P'_3$  du plan Q.



**Figure 15.4.** Détermination de  $P'_1$  et  $P'_3$  à partir de  $P_2$ . « Projetez »  $P_2$  sur les axes  $L'_1$  et  $L'_3$  et utilisez le fait que  $P'_1, Q'_1$  et  $P'_3, Q'_3$  sont dans les mêmes rapports que  $P_1, Q_1$  et  $P_3, Q_3$ .

du parallélogramme (Figure 15.4). ( $Q'_1$  et  $Q'_3$  sont respectivement les « projections » de  $P_2$  sur  $L'_1$  et  $L'_3$ .)  $P'_1$  et  $P'_3$  ne sont pas encore connus mais le caractère « héréditaire » de la construction nous dit, comme nous l'avons remarqué ci-dessus, que les valeurs des rapports  $FQ'_1/FP'_1$  et  $FQ'_3/FP'_3$  sont les mêmes que les coefficients utilisés pour la construction de  $P_2$ , c'est-à-dire les valeurs estimées de  $T_{23}/T_{13}$  et  $T_{12}/T_{13}$ . Ah ! En utilisant ces rapports, nous pouvons maintenant déterminer les distances  $FP'_1$  et  $FP'_3$ . Nous n'avons qu'à diviser  $FQ'_1$  par le premier coefficient pour avoir  $FP'_1$ , et diviser  $FQ'_3$  par le second pour avoir  $FP'_3$ . Cela nous donne le résultat voulu puisque les distances que nous cherchions –  $E_1P'_1$  et  $E_3P'_3$  – sont égales respectivement à  $FP'_1$  et  $FP'_3$  par construction.

Finalement, en reportant ces distances de la Terre à Cérès le long des lignes de visée définies par les observations de Piazzi, nous construisons les positions  $P_1$  et  $P_3$  elles-mêmes. Nous venons de remporter une nouvelle bataille.

## 16. NOTRE VOYAGE TOUCHE À SA FIN

**D**ans la section précédente, nous avons réussi à construire, au moins en première approximation, les trois positions de Cérès. Etant données les trois positions  $P_1, P_2, P_3$ , quoi de plus simple que de construire autour du Soleil l'unique orbite de section conique passant par ces trois points ? Nous pouvons tout de suite déterminer la position du plan de l'orbite de Cérès et son inclinaison relative par rapport au plan de l'écliptique, à partir de la position du Soleil et de deux quelconques des trois positions.

Pour déterminer la forme de la section conique, appliquez notre projection conique en prenant le plan horizontal pour représenter le plan de l'orbite de Cérès. Les trois points  $U_1, U_2, U_3$  du cône qui se projettent en  $P_1, P_2, P_3$ , déterminent un plan unique dans l'espace conique. L'intersection de ce plan avec le cône est une sec-

tion conique passant par  $U_1, U_2, U_3$  ; la projection de cette courbe sur le plan horizontal est l'unique section conique passant par  $P_1, P_2, P_3$  et dont le foyer est le Soleil (Figure 16.1).

Bien que cette méthode paraisse très simple, Gauss la rejeta. Pourquoi ? Dans le cas de Cérès,  $P_1, P_2, P_3$  se trouvent très près les uns des autres. De petites erreurs dans la détermination de ces trois positions peuvent conduire à de très grandes erreurs dans l'inclinaison du plan passant par les trois points correspondants  $U_1, U_2, U_3$  sur le cône. Le résultat serait trop incertain pour permettre de faire une prévision sur le mouvement de la planète.

Pour résoudre ce problème, Gauss choisit une autre tactique. Laisant provisoirement  $P_2$  de côté, il détermina l'orbite à partir de  $P_1, P_3$  et de la durée entre ces deux positions. Gauss développa plusieurs

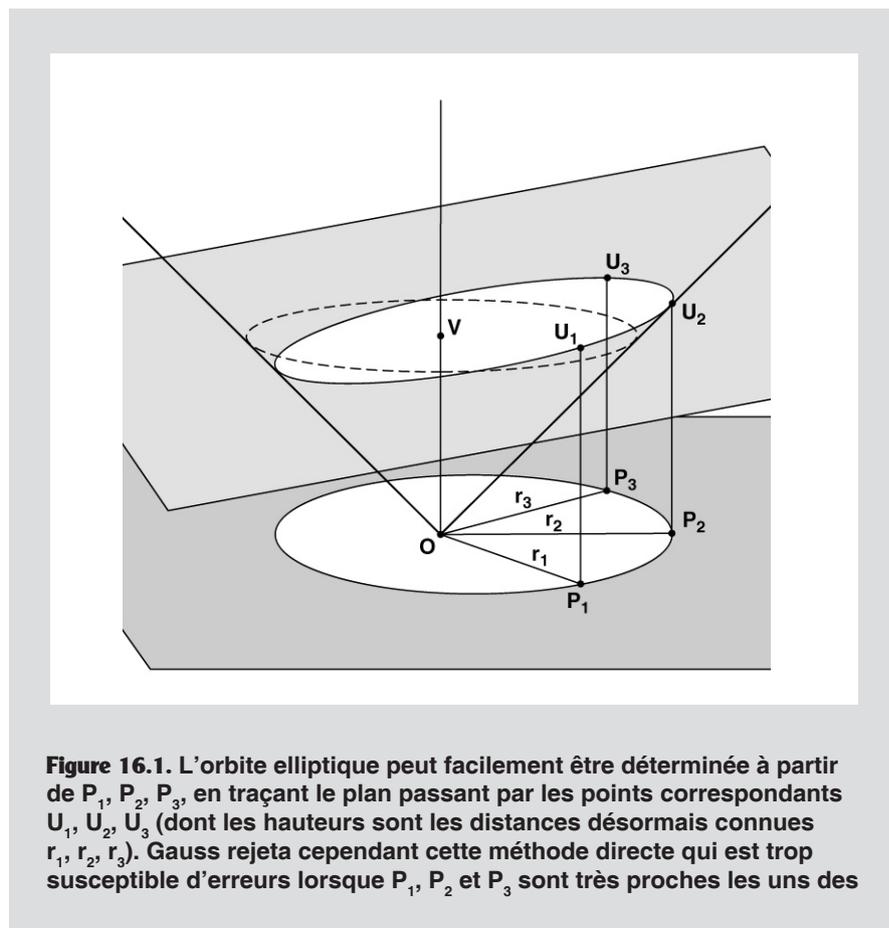
méthodes à cette fin. La manière la plus simple consiste à utiliser la loi des aires avec le paramètre orbital de Gauss. Rappelez-vous que la valeur du demi-paramètre correspond à la « hauteur » du point V sur l'axe du cône, à l'endroit où cet axe rencontre le plan définissant l'orbite. Si nous connaissons le demi-paramètre, cela nous permet d'avoir un troisième point, en plus de  $U_1$  et  $U_3$ , avec lequel nous pouvons déterminer la position du plan incliné. Contrairement à  $P_2$ , le point O se trouve loin de  $P_1$  et  $P_3$ ; les points correspondants V,  $U_1$  et  $U_3$  sont également bien séparés sur le cône. En conséquence, la position du plan passant par ces trois points est beaucoup moins sensible aux erreurs dans la détermination de leur position que dans le cas précédent.

Comment obtenir la valeur du demi-paramètre à partir de deux positions et de la durée qui les sépare ? Selon la loi des aires de Gauss et de Kepler, l'aire du secteur orbital entre  $P_1$  et  $P_3$ , c'est-à-dire  $S_{13}$ , est égale au produit de la durée ( $t_3 - t_1$ ) par la racine carrée du demi-paramètre par la constante  $\pi$ . La durée est déjà connue ; si, par ailleurs, nous connaissons l'aire du secteur  $S_{13}$ , nous pourrions facilement en déduire la valeur du paramètre orbital.

Encore une relation autoréflexive ! La valeur exacte de  $S_{13}$  dépend de la forme de l'arc orbital entre  $P_1$  et  $P_3$ . Mais pour connaître cet arc, nous devons connaître l'orbite. Par ailleurs, pour construire l'orbite, nous avons besoin de connaître le paramètre orbital qui est lui-même une fonction de  $S_{13}$ .

Encore une fois, nous pouvons résoudre ce problème grâce à la méthode d'approximations successives de Gauss. L'aire triangulaire  $T_{13}$ , que nous pouvons calculer directement à partir des positions de  $P_1$  et de  $P_3$ , nous donne déjà une approximation grossière de  $S_{13}$ . Mieux encore : nous pouvons utiliser le produit  $G \times T_{13}$ , G étant le facteur correctif de Gauss calculé ci-dessus. A partir de cette valeur estimée de  $S_{13}$ , on calcule la valeur correspondante du paramètre orbital. On applique ensuite notre représentation conique pour construire une orbite, à partir d'une approximation du demi-paramètre : celle dont la valeur correspond à cette valeur estimée de  $S_{13}$ .

Finalement, à partir de la méthode de Kepler d'« anomalie excentrique »,



**Figure 16.1.** L'orbite elliptique peut facilement être déterminée à partir de  $P_1, P_2, P_3$ , en traçant le plan passant par les points correspondants  $U_1, U_2, U_3$  (dont les hauteurs sont les distances désormais connues  $r_1, r_2, r_3$ ). Gauss rejeta cependant cette méthode directe qui est trop susceptible d'erreurs lorsque  $P_1, P_2$  et  $P_3$  sont très proches les uns des

ou d'un autre moyen adéquat, on calcule l'aire exacte  $S_{13}$  du secteur pour cette orbite. Si cette valeur coïncide avec celle sur laquelle nous nous étions basés, notre travail est terminé. Si cela n'est pas le cas, nous devons modifier notre première estimation jusqu'à ce qu'il y ait coïncidence. Gauss qui détestait le « calcul mécanique mort », a développé plusieurs raccourcis ingénieux qui réduisent fortement le nombre d'approximations successives et le volume de calcul requis.

Au bout du compte, nous avons non seulement la valeur du paramètre orbital mais aussi l'orbite elle-même.

### Comment améliorer l'orbite

Nous venons ainsi de donner les grandes lignes de la construction de Gauss d'une première approximation pour l'orbite de Cérès, à partir seulement de trois observations. Cependant, Gauss ne fit pas sa

prévision à partir de cette première approximation. Rappelez-vous que tout est basé sur notre approximation de la position  $P_2$  de Cérès ; notre construction de  $P_1$  et  $P_3$  et celle de l'orbite elle-même sont au mieux aussi bonnes que celle de  $P_2$ .

Gauss a développé une série de méthodes qui ont successivement amélioré l'orbite construite initialement, jusqu'à obtenir la précision incroyable de quelques minutes ou même de quelques secondes d'arc dans ses prévisions. Dans tous les cas, la clef est la cohérence et l'auto-réflexivité des relations intervenant dans les méthodes.

L'essentiel de l'approche de Gauss, tel qu'il est présenté dans son *Résumé d'ensemble*, consiste en ce qui suit. Comment pouvons-nous détecter une différence entre l'orbite réelle et l'orbite que nous avons construite ? Par la nature même de notre construction, les première et troisième observations vont s'accorder précisément avec l'orbite calculée :  $P_1$  et  $P_3$  se trouvent sur l'orbite calculée ainsi que sur les lignes de visée issues de  $E_1$  et de  $E_3$ , et la durée écoulée entre les deux sur l'orbite que nous avons cal-

culée va coïncider avec la durée réelle séparant la première et la troisième observations.

La situation est différente pour la position intermédiaire  $P_2$ . Si nous calculons la position  $P_2$  à partir de l'orbite calculée – c'est-à-dire la prévision pour l'instant  $t_2$  – nous trouverons en général qu'elle diffère d'une quantité plus ou moins significative du «  $P_2$  » que nous avons construit au départ. Cette « dissonance » nous apprend que l'orbite n'est pas encore correcte. Dans ce cas, nous devons modifier graduellement notre esti-

mation de  $P_2$  jusqu'à ce que les deux positions coïncident. Du fait que  $P_2$  doit se trouver sur la ligne de visée  $L_2$ , la distance entre la Terre et Cérès est la seule variable sur laquelle on peut intervenir.

Ici encore, le tâtonnement est en principe possible mais Gauss a élaboré une série de méthodes ingénieuses d'approximations successives. A partir du moment où il obtenait une orbite qui s'accordait avec les trois observations choisies, Gauss comparait l'orbite avec les autres observations de Piazzi afin de

prendre en compte différentes sources d'erreur possibles. Finalement, Gauss a pu donner sa prévision du mouvement de Cérès avec une forte conviction que la nouvelle planète se trouverait bien sur l'orbite qu'il avait spécifiée.

C'est ici que notre voyage touche à sa fin – ou presque. Nous félicitons les lecteurs qui se seront donnés la peine de marcher sur les traces de la découverte de Gauss en notre compagnie. Dans la section suivante, nous allons conclure avec un *stretto* sur le sujet de la « non-linéarité dans le petit ».

## 17. EN GUISE DE STRETTO

**D**ans cette dernière discussion, nous allons nous attaquer à un célèbre épouvantail : le calcul différentiel tel qu'il est enseigné à l'école. Beaucoup pourrait et devrait être dit à ce sujet, mais nous pensons que ce qui suit sera utile et amusant pour les novices.

Les lecteurs auront remarqué que Gauss n'a fait aucun usage du calcul différentiel, ni de quoi que ce soit pouvant être appelé « mathématiques avancées », dans le sens formel du terme. Tout ce que nous avons fait est exprimable en termes de géométrie synthétique classique, le langage préféré de l'Académie de Platon. Cependant, la solution de Gauss pour Cérès présentait quelque chose d'étonnamment nouveau, quelque chose de bien plus avancé *en substance* que tout ce que ses prédécesseurs avaient développé. Laplace, rendu célèbre grâce à son impressionnant appareil analytique et sa virtuosité technique, s'est retrouvé dans une situation fort embarrassante.

La méthode de Gauss est entièrement élémentaire et pourtant hautement avancée. Comment est-ce possible ?

Bien loin d'être une géométrie reposant sur des axiomes fixes, telle que la géométrie euclidienne, la géométrie synthétique est un médium de métaphore – un médium semblable au système bien tempéré de composition musicale et inséparable de celui-ci. Gauss utilise ainsi la géométrie synthétique classique pour élaborer

un concept de géométrie physique qui est axiomatiquement « anti-euclidien ». Une contradiction ? Pas si nous lisons la géométrie de la même manière que nous devrions écouter la musique : les axiomes et les théorèmes ne se trouvent pas dans les notes mais dans le processus de penser se trouvant « *derrière les notes* ».

A cause d'un problème majeur dans notre culture et dans notre système éducatif, il est devenu habituel de plaquer sur le domaine de la géométrie synthétique, l'hypothèse fautive et sans fondement de *continuité simple*. Il serait difficile d'imaginer une proposition qui soit réfutée de manière aussi considérable par la preuve scientifique ! Et cependant, si nous étudions la pensée de la plupart des gens – y compris nous-mêmes si nous sommes honnêtes – nous trouverons presque toujours une zone de croyance fanatique irrationnelle dans la continuité simple et, ce qui revient essentiellement à la même chose, dans la linéarité dans le petit. Nous sommes confrontés ici à une manifestation caractéristique de l'idéologie oligarchique.

Prenez par exemple la notion habituelle de cercle généré par un mouvement « parfaitement continu ». Notre imagination nous dit qu'une petite portion de la circonférence du cercle, si nous l'agrandissons suffisamment, aurait l'air beaucoup plus plate, ou aurait moins de courbure, que n'importe quelle portion plus grande de la circonférence. En d'autres termes : plus l'arc est petit, plus petit est le

*changement de direction* net sur cette portion de circonférence.

De même, le point de vue du calcul différentiel tel qu'il est enseigné à l'école, concernant une courbe arbitraire de forme irrégulière, est de s'attendre à ce que l'irrégularité diminue et la courbe devienne plus simple et plus « lisse », si nous nous intéressons à des portions de plus en plus petites de celle-ci. C'est en effet le cas dans le monde scolaire et imaginaire du calcul et de la géométrie analytique où les courbes sont décrites par des équations algébriques et des choses similaires. Mais qu'en est-il du monde réel ? *Est-il vrai que le changement net de direction d'un processus physique sur un intervalle quelconque d'espace-temps devient de plus en plus petit, lorsque nous passons de longueurs à l'échelle macroscopique vers des intervalles d'action de plus en plus petits ?*

En fait, c'est *exactement* le contraire qui est vrai ! Lorsque nous poussons nos recherches sur un processus physique à des échelles de grandeur de plus en plus petites, nous trouvons invariablement une densité et une fréquence croissantes de changements abrupts dans la direction et le caractère du mouvement associé au processus. Plutôt que de devenir plus simples dans le petit, le processus apparaît toujours plus compliqué et son caractère discontinu devient de plus en plus prononcé. Notre Univers a l'air en fait d'une créature très hirsute : un « discontinuum » dans lequel – semble-t-il – la partie est plus

compliquée que le tout.

## « Turbulence dans le petit »

L'existence de ce discontinuum, cette « turbulence dans le petit » pour n'importe quel véritable processus physique, nous confronte à de sérieux problèmes et paradoxes.

Tout d'abord, quelle est la *signification* de cette turbulence ? Pourquoi notre Univers se comporte-t-il de la sorte ? Comment cette caractéristique – reflétant une densité croissante de singularités dans l'« infinitésimale petit » – est-elle cohérente avec la nature de la raison humaine ? Pourquoi un « discontinuum » de cette sorte est-il une caractéristique *nécessaire* de la relation entre l'esprit humain, en tant que microcosme, et l'Univers, en tant que totalité ?

Un autre paradoxe peut apporter quelque lumière au précédent. Lorsque nous effectuons une étude expérimentale d'un processus à une *échelle microscopique*, nous trouvons de plus en plus difficile d'identifier les caractéristiques correspondant à l'ordre *macroscopique* qui était l'objet initial de nos recherches.

L'analogie avec les cycles astronomiques, sur lesquels nous avons appris quelque chose dans les sections précédentes, pourrait nous aider à réfléchir au problème d'une manière plus rigoureuse. Au lieu de dire « ordre macroscopique », disons un cycle (relativement) long. De par la nature de l'Univers, aucun cycle n'existe en soi et par lui-même. Tous les cycles interagissent entre eux, du moins potentiellement. De plus, l'existence d'un cycle donné quelconque est fonctionnellement dépendante d'une multitude de cycles plus courts et de cycles plus longs. La question que nous posons alors est la suivante : comment un cycle long donné se *manifeste-t-il* au niveau de cycles plus courts ? A première vue, l'action associée au cycle long devient de plus en plus indistincte et, finalement, « infinitésimale » au fur et à mesure que nous descendons vers des échelles de grandeur caractéristiques de cycles de plus en plus courts.

(Plus précisément – pour anticiper sur un point clef – nous atteignons

des échelles de grandeur critiques en dessous desquelles il devient *impossible* de suivre la trace du « cycle long » dans les « cycles courts », à moins de changer nos propres pré-supposés axiomatiques.)

Nous rencontrons en permanence ce genre de problème en astronomie. A l'échelle de durée de la rotation quotidienne de la Terre, le mouvement annuel du Soleil semble être une très petite déviation par rapport à une trajectoire circulaire. Pour les observateurs anciens, l'effet de cette déviation ne devient évident qu'après plusieurs cycles quotidiens. Prenons l'exemple provocateur proposé par Lyndon LaRouche qui consiste à considérer l'action apparemment « infinitésimale » du cycle long d'environ 25 700 ans (précession des équinoxes) dans un intervalle d'une seconde (**Figure 17.1**).

Le type le plus simple de représentation géométrique d'une telle action infinitésimale de cycle long tend à minimiser le problème. Supposez que nous ne connaissions pas l'existence ou l'identité d'un cycle long donné, comment pourrions-nous le découvrir au moyen seulement de mesures effectuées à une échelle beaucoup plus petite ? Le « signal » infinitésimal du cycle long ne sera-t-il pas noyé dans le « bruit » des cycles courts ? Déjà dans le cas des observations de Cérés, le véritable mouvement de Cérés était complètement distordu par l'effet du mouvement de la Terre. Que ferions-nous si le cycle que nous recherchons était mêlé non pas à un mais à une foule d'autres cycles ?

C'est ici qu'un gouffre infranchissable sépare la méthode de Gauss de celle de Laplace et de ses successeurs. De la même manière que Laplace ridiculisait la tentative de Gauss de calculer l'orbite de Cérés à partir des observations de Piazzi, la qualifiant de perte de temps, les successeurs de Laplace comme John von Neumann, Norbert Wiener et John Shannon nièrent l'existence *efficace* de cycles longs et cherchèrent à les rabaisser à de simples « corrélations statistiques ».

Le point clef est que nous ne pouvons pas résoudre le problème tant que nous évitons la question du changement axiomatique et que nous admettons tacitement une simple commensurabilité entre les cycles – ce qui peut s'appeler « linéarité dans le petit ».

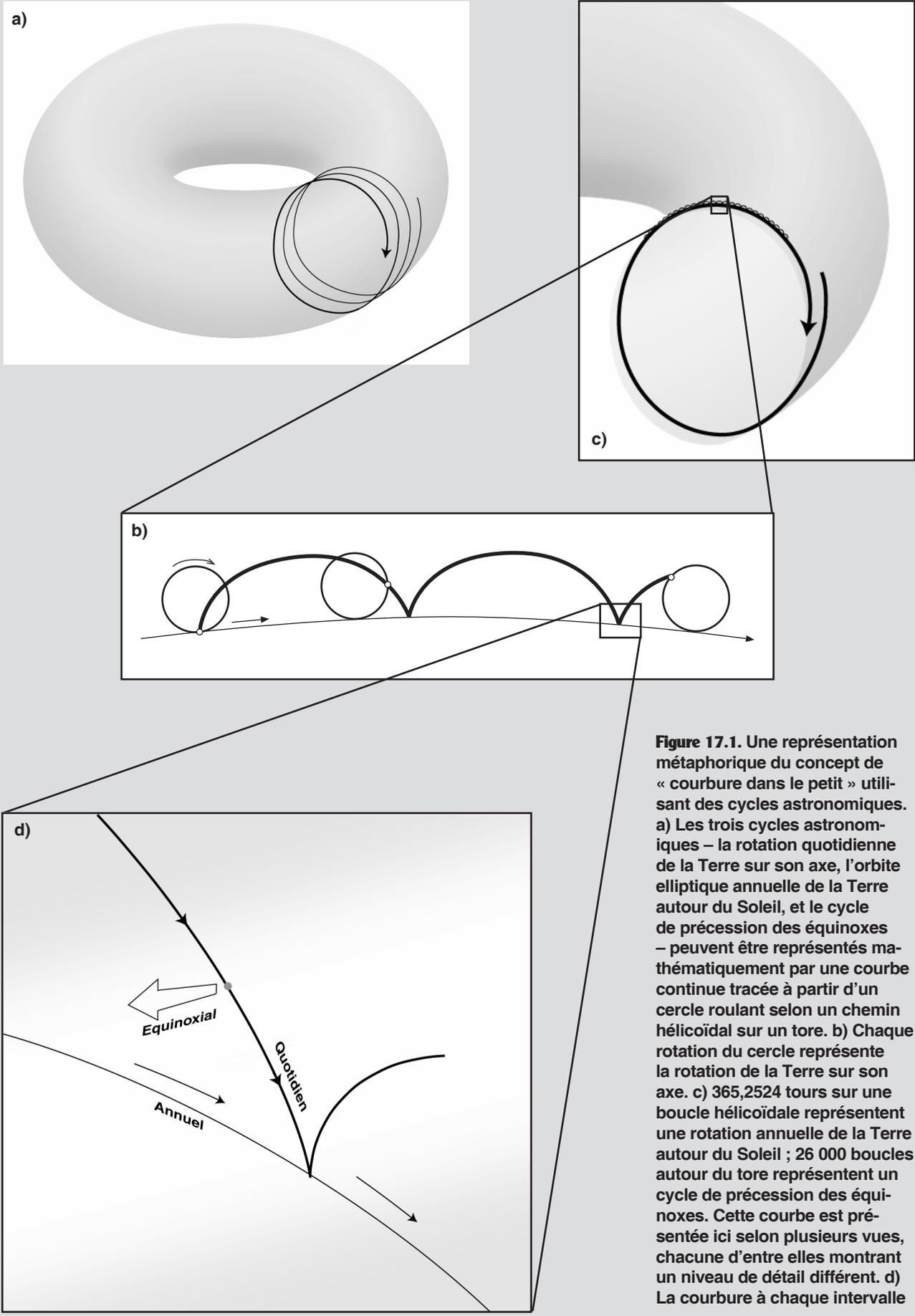
## La question de la méthode

Citons quelques exemples où cette question de méthode apparaît de manière inévitable.

1. Les paradoxes de toutes les théories mécanistes du son. La « théorie standard » qui remonte à Descartes, Euler, Cauchy, etc., considère l'air comme un « médium élastique » homogène dans lequel le son se propage selon des ondes longitudinales de compressions et dépressions alternées du médium. Le « médium homogène élastique » de Descartes est à l'évidence un conte de fées. Nous savons que le comportement de l'air dépend de l'existence de certaines microsingularités électromagnétiques appelées molécules. Nous pouvons également être certains d'une chose : quoi que puisse exactement *être* le son, sa propagation dépend d'une manière ou d'une autre de l'activité fonctionnelle de ces molécules. C'est là que Boltzmann introduisit la supposition sans fondement, qui n'est différente que superficiellement de celle de Descartes et Euler, selon laquelle les molécules sont des « corps simples » inertes, interagissant seulement par des collisions élastiques à la manière idéalisée de balles de tennis.

L'expérience laisse peu de doute sur le fait que les molécules de l'air sont de manière constante dans un état de mouvement turbulent très rapide à des vitesses hypersoniques, et que leurs mouvements changent rapidement de direction – ce que l'on peut grossièrement désigner sous le terme de « collisions ». Chaque seconde, une simple molécule participera, conformément à cette caractéristique, à des centaines de millions ou plus de tels événements. Par contre, ces « collisions » sont tout sauf simples ; ce sont des processus électromagnétiques très compliqués dont Boltzmann a, par facilité, décidé d'ignorer la nature.

Poussons le tableau simpliste qui en résulte aux limites de son absurdité. Imaginez que l'on observe un volume microscopique d'air qui ne contient que quelques molécules et à une échelle de temps de quelques milliardièmes de seconde. Où se trouve l'onde sonore ? Selon la méthode statistique, l'énergie de l'onde



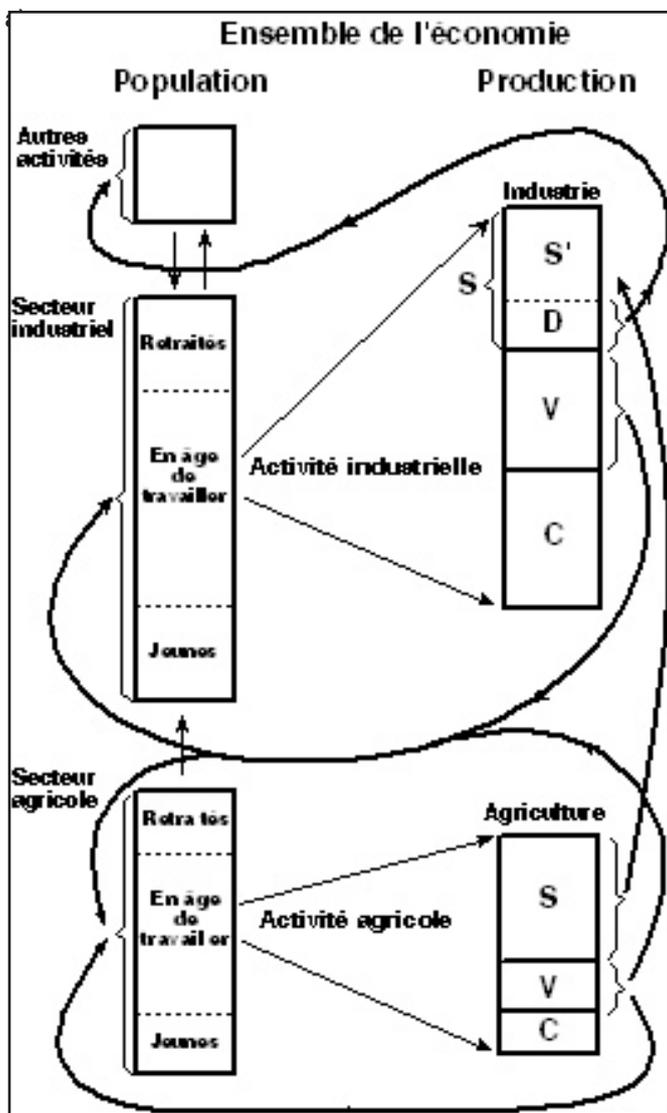
**Figure 17.1.** Une représentation métaphorique du concept de « courbure dans le petit » utilisant des cycles astronomiques. a) Les trois cycles astronomiques – la rotation quotidienne de la Terre sur son axe, l'orbite elliptique annuelle de la Terre autour du Soleil, et le cycle de précession des équinoxes – peuvent être représentés mathématiquement par une courbe continue tracée à partir d'un cercle roulant selon un chemin hélicoïdal sur un tore. b) Chaque rotation du cercle représente la rotation de la Terre sur son axe. c) 365,2524 tours sur une boucle hélicoïdale représentent une rotation annuelle de la Terre autour du Soleil ; 26 000 boucles autour du tore représentent un cycle de précession des équinoxes. Cette courbe est présentée ici selon plusieurs vues, chacune d'entre elles montrant un niveau de détail différent. d) La courbure à chaque intervalle

sonore passant à travers une portion d'air minuscule est des milliers voire des millions de fois plus petite que celle du mouvement « thermique » turbulent dans une portion d'air correspondante sans perturbation.

Dans ce cas, *qu'est-ce* que l'onde sonore pour une molécule individuelle se déplaçant à une vitesse hypersonique, dans le court intervalle de temps séparant deux collisions successives ? Le son existe-t-il à une pareille

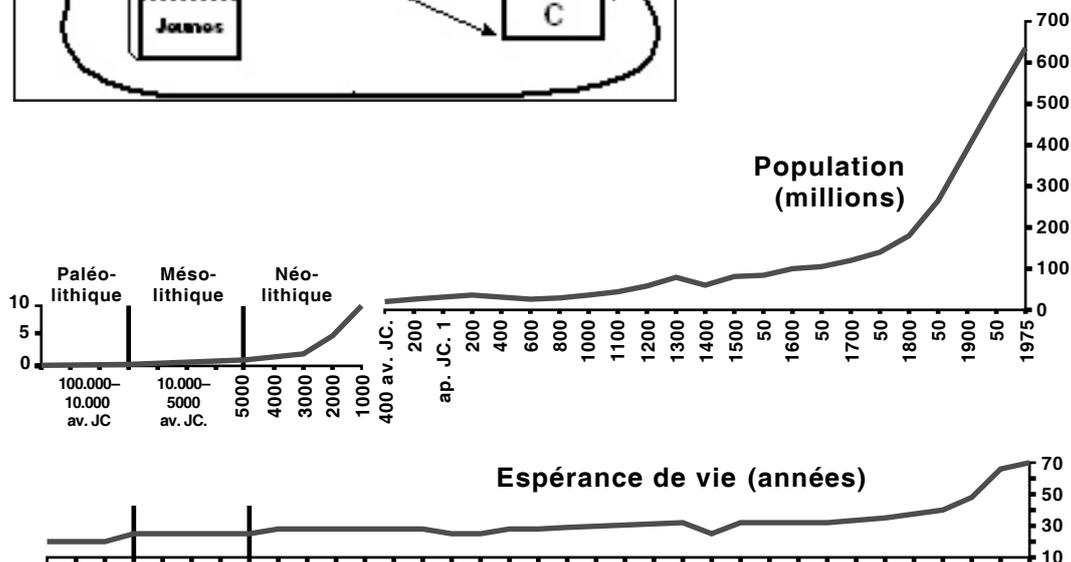
échelle ? Selon Boltzmann, non : une onde sonore n'est rien d'autre qu'une corrélation statistique – un fantôme mathématique !

2. Comme cela est impliqué par



**Figure 17.2.** Représentations schématiques utilisées par Lyndon LaRouche pour décrire plusieurs cycles économique cruciaux. Comme les cycles astronomiques l'avaient montré précédemment, ces cycles sont emboîtés les uns dans les autres et contribuent simultanément à l'« action » de l'économie productive à un instant donné. a) Les cycles de production et de consommation transforment la composition interne de la force de travail et du capital. b) Cycles longs de développement démographique.

b)



les effets dits photoniques, la lumière n'est pas simplement une onde. Sa propagation (même dans un « vide » supposé) implique certainement un grand nombre d'événements individuels à une échelle subatomique. Cependant, la physique quantique standard nie l'existence d'une relation stricte légitime entre la propagation d'une « onde » de lumière et le comportement des photons individuels. La « lumière » n'est-elle rien d'autre qu'une corrélation statistique ?

3. La caractéristique des processus vivants est une action conique spirale autosimilaire. Mais l'*activité fonctionnelle* des singularités électromagnétiques dont dépendent toutes les formes de vie connues est tout sauf simple et « lisse », à la manière dont l'imagination naïve tendrait à mal interpréter le terme « action conique spirale ». Si l'on descend au niveau microscopique des abruptes et intenses « impulsions » d'activité électromagnétique, et des millions d'événements chimiques par seconde, comment pourrions-nous localiser ce qui correspond à la caractéristique « onde longue » que nous appelons la « vie » ?

4. Quelqu'un de compétent en économie physique doit prendre en considération un grand réseau de cycles qui s'inscrivent dans le cycle socio-reproductif global et le cycle long de croissance anti-entropique du potentiel de densité démographique *par tête* de l'espèce humaine : cycles démographiques, cycles biologiques et géophysique de l'agriculture et de la production associée, cycles de production et de consommation des paniers de biens de consommation et de production, cycles d'investissement-dépréciation industriel et infrastructurel interagissant avec les cycles d'usure technologique, etc., (**Figure 17.2**). Où se trouve, dans tous ces cycles, l'agent causal de la croissance de l'économie réelle ?

5. Considérons cela d'un point de vue quelque peu différent. Dans l'étendue de l'histoire de l'humanité, nous pouvons reconnaître une continuité dans le développement culturel reflété par des accroissements d'ordre de grandeur du potentiel démographique de l'espèce humaine. Mais ce développement est par définition un « disconti-

nuum » : sa mesure ultime est la vie humaine individuelle, le quantum du processus historique. Rien ne se déroule « collectivement » selon un « phénomène social » issu d'un certain « *Zeitgeist* » [« esprit du temps », NdT]. Rien n'a lieu qui ne soit le produit d'actions spécifiques d'êtres humains individuels (y compris les omissions) – actions délimitées par les fonctions de la personnalité individuelle. Cependant, à l'échelle des « cycles longs » de l'histoire, une vie humaine est un moment court avec un commencement abrupt et une fin abrupte. Si nous prenions, pour ainsi dire, un microscope historique et examinions l'animation trépidante qui entoure un individu au cours de sa brève existence, verrions-nous la fonction qui est responsable du « cycle long » du développement de l'humanité ? Ne serait-ce pas un « infinitésimal » par rapport à l'incessante animation trépidante de l'existence ? Et pourtant, c'est cet « infinitésimal » qui représente la force la plus puissante de l'Univers !

## Un « discontinuum » bien tempéré

---

Quelle leçon pouvons-nous tirer de ces exemples ? Le cas de la société humaine est le plus concluant : l'existence efficiente du cycle long dans les cycles courts n'est localisée que dans *la caractéristique axiomatique de l'action dans le petit*.

Ainsi, la relation entre les cycles longs et les cycles courts n'existe pas dans le domaine naïf des perceptions sensorielles ; elle n'est pas non plus susceptible de représentation littérale dans le formalisme mathématique. La découverte des caractéristiques axiomatiques et des passages entre de telles caractéristiques est la propriété exclusive de la cognition humaine ! Quelle caractéristique s'applique nécessairement aux cycles courts en vertu de leur participation à la venue au monde d'un cycle long donné ? Dans ce contexte, on reconnaît le potentiel unique de l'individu créateur autoconscient par le changement délibéré des axiomes de son action, pour changer l'ensemble de l'« orbite » de l'histoire pour les centaines ou milliers d'années à venir ! Pour diriger les forces de l'Univers, nous n'avons pas

besoin de connaître tous les détails d'un processus donné ; il nous suffit d'intervenir sur ses caractéristiques axiomatiques essentielles.

La solution de Gauss pour Cérès est cohérente avec ce point de vue. Sa construction n'est pas simple dans le sens de la géométrie euclidienne scolaire. Pour résoudre ce problème, nous avons dû nous concentrer sur la signification du fait qu'il n'y a pas de simple commensurabilité ou de relation linéairement déductible entre :

(i) les intervalles angulaires formés par les observations de Piazzi depuis la Terre ;

(ii) les trois positions correspondantes de Cérès dans l'espace ;

(iii) le processus orbital qui génère le mouvement de Cérès et les « éléments » de l'orbite prise en tant que totalité ;

(iv) l'ensemble de l'ordre harmonique képlérien du système solaire dans lequel s'inscrit une multitude de cycles astronomiques de courbure incommensurable.

Nous avons dû nous poser la question suivante : quelle *relation harmonique* doit sous-tendre le réseau d'intervalles entre les positions observées de Cérès, en vertu du fait que ces positions apparentes ont été générées par l'action combinée de la Terre et de Cérès (et implicitement du reste du système solaire) ? Comme Kepler l'a montré, c'est dans les relations harmoniques géométriques – et pas dans les grandeurs scalaires nominales *en tant que telles*, quelles que soient leurs grandeurs – que les caractéristiques axiomatiques d'action physique sont reflétées dans l'espace visuel.

Le point crucial qui se dégage avec force de notre recherche s'exprime par la cohérence et en même temps par la différence incommensurable entre les aires triangulaires des observations discrètes, d'une part, et les secteurs orbitaux, d'autre part. C'est pour le même motif que Gauss avait auparavant effectué ses travaux sur la moyenne arithmétique-géométrique. Comment appellerons-nous cela ? Un « discontinuum bien tempéré » !

*A titre d'exercice, nous invitons le lecteur à appliquer l'essence de la méthode de Gauss concernant la relation entre les différents niveaux du devenir à l'ensemble de la conception d'une œuvre de musique classique. Vous voyez, il reste encore bien des montagnes à escalader.*

n