LA TERRE EST-ELLE MESURABLE ?

La géodésie
ou le voyage de l'homme au-delà des frontières

Comment peut-on déterminer la forme de la Terre sans quitter sa surface ? Comment peut-on exactement localiser notre position sur Terre ? Comment peut-on mesurer exactement les distances entre différents points de notre planète ?
La science de la géodésie (ainsi que la cartographie qui lui est étroitement liée) s'est développée en tentant de répondre à ces questions. Aujourd'hui, chaque nation a ses propres institutions chargées de mesurer son territoire, de produire des cartes exactes, et nous sommes arrivés à un très haut degré de précision. Toutefois, les récents progrès de la recherche spatiale et de la géodésie satellitaire ont non seulement apporté une précision encore plus grande mais ont également ouvert la voie à de nombreux autres domaines de recherche. Par exemple, l'étude beaucoup plus précise des différences d'altitudes à la surface de la Terre, en particulier des immenses surfaces océaniques (la géodésie océanographique), soulève de nombreuses questions entièrement nouvelles.

Aujourd'hui, grâce au système de positionnement global développé par les ingénieurs militaires américains, nous sommes capables de déterminer les positions sur Terre avec une précision au millimètre. Cette technologie, combinée avec les émetteurs radio, rend possible de gouverner avec précision de gros bateaux le long des fleuves, de conduire des camions à travers les vastes étendues d'un continent ou de localiser une fuite dans un un pipeline.

Mais comment avons-nous réussi à déterminer la forme de la Terre à l'époque où nous ne disposions pas de ces instruments modernes, et comment avons-nous développé des méthodes de mesure toujours plus précises ? Ce développement n'a pas été un processus régulier et linéaire. Après les premiers travaux effectués par les membres de l'école d'Alexandrie quelques siècles avant notre ère, qui ont permis de déterminer la forme sphérique de la Terre, deux mille ans se sont écoulées sans aucun progrès significatif. Durant cette période, l'homme a dû dépasser un certain nombre des limites fondamentales de sa pensée. D'abord, il a dû reconnaître que l'hypothèse selon laquelle il est sur une surface plane le place devant des paradoxes insolubles et, finalement, ne peut pas être juste. Ensuite, il a dû trouver une preuve tangible que la Terre est bel et bien une sphère (ou un sphéroïde). Enfin, il a dû admettre que la sphère terrestre, contrairement à une surface plane, intègre la caractéristique de « courbure dans le petit », ainsi qu'un autre principe de notre Univers, le changement perpétuel.

Nous allons à présent voir comment mesurer ce sphéroïde en continuelle transformation.

Mesurer une distance : plus facile à dire qu'à faire

Il n'est pas évident de mesurer une distance rectiligne car nous nous trouvons toujours sur une surface courbe. En effet, mesurer des lignes sur une sphère n'est pas si simple. Bien sûr, on peut prétendre connaître l'étendue d'un terrain comme un jardin ou un champ, en marchant droit quelques dizaines de mètres, puis en

CAROLINE HARTMANN

allant quelques dizaines de mètres à gauche, puis en arrière, parallèlement au premier trajet, puis encore quelques dizaines de mètres à gauche jusqu'au point de départ. Voilà, c'est fait ! Alors, certains pourraient se demander pourquoi nous avons besoin d'un service géodésique.

Néanmoins, si l'élu d'une municipalité ou d'un département veut connaître cette surface précisément, ou si un marin désire savoir la position exacte de son navire, il doit connaître les « véritables » distances entre plusieurs points de la sphère terrestre. Plus l'étendue devant nous est grande, moins nous pouvons éviter cette question : qu'*est*-ce qu'une direction droite ? Est-ce que j'avance précisément vers le nord, ou de combien de degrés vers le nord-ouest, et ainsi de suite ?

On peut imaginer qu'un compas suffirait. Cependant, même si l'on suit tout droit la direction d'un compas, les conditions du chemin entraîneront une imprécision trop grande, même pour déterminer la longueur du chemin. Admettons que nous suivions le compas vers le nord. D'abord, nous devons nous rappeler de faire toujours des pas de la même longueur. Nous avons donc besoin d'un étalon de mesure. Si nous arrivons au bord d'une rivière, nous ne pouvons continuer, à moins qu'elle soit assez peu profonde pour la passer à gué. Dans le cas contraire, nous devons prendre un bateau. Mais alors comment allons-nous mesurer la distance *exacte*, et comment savons-nous que nous continuons notre trajet *exactement* au point opposé de l'autre côté de la rivière ?

Au bout d'un certain temps, on peut arriver au pied d'une montagne. Même le moindre pas au-dessus de la surface de la rivière crée une incertitude dans la mesure de la distance. De plus, lorsque nous allons sur la montagne, nous avons une différence de hauteur tout comme une différence dans la distance horizontale. Mais que devons-nous mesurer si nous voulons vraiment définir la distance entre deux positions : la distance « marchée » ou la « véritable » distance, comme sur la surface de l'océan ? Si nous voulons réaliser une carte, nous devons utiliser la seconde sinon il est fort probable que nous n'arriverions jamais à l'endroit désiré. Par conséquent, la géodésie n'utilise jamais de mesure directe des distances sur Terre ; elle emploie la méthode de triangulation. Cette méthode, que nous allons décrire par la suite, a été découverte par le mathématicien et astronome hollandais Willebrord Snell van Royen (1591-1626). Elle a permis à l'homme de franchir une étape décisive pour mesurer, indépendamment de ses perceptions sensorielles, la forme de la Terre.

Où suis-je ?

Déterminer une position précise sur la surface terrestre est aussi difficile que de mesurer la distance entre deux points. Que ferions-nous si nous étions perdus en plein milieu du désert ? Evidemment, nous voudrions trouver le chemin le plus court pour arriver aux habitations les plus proches. Pour mieux se guider, les membres de l'école d'Alexandrie, comme Hipparque, divisèrent la Terre en parties précisément définies de la même manière qu'ils l'avaient fait pour le ciel. Ils utilisaient des lignes comme les méridiens (cercles de longitude), où le Soleil en tout point de ces lignes atteint sa position la plus haute en même temps, ainsi que les cercles de latitude, où l'angle entre l'horizon de l'observateur (la ligne perpendiculaire au fil à plomb) et la direction du pôle céleste (qui est parallèle à l'axe de la Terre), est le même en tout point du cercle.

Si nous voulons *exactement* savoir où nous sommes, nous devons déterminer en premier lieu notre distance au pôle le plus proche (qui est dans la direction nord-sud) et, ensuite, notre distance d'une certaine position définie comme zéro, dans la direction est-ouest. La première mesure est notre latitude géographique, la seconde notre longitude.

Etant donné qu'un cercle fait 360°, il est plus judicieux de mesurer ces distances en angles car, comme nous allons le voir, il n'est pas facile de déterminer la longueur exacte d'un arc. Toutefois, il est possible de mesurer l'angle à l'aide d'un instrument (un quadrant ou un théodolite), et ainsi de déterminer notre position.

Pour y parvenir, nous déterminons

d'abord la latitude, comme il est montré en **figure 1**, c'est-à-dire l'angle entre l'horizon de l'observateur (perpendiculaire au fil à plomb) et la ligne pointant vers le pôle céleste. La longitude est l'angle entre la ligne du méridien de l'observateur et le méridien de Greenwich en Angleterre. Mesurer la longitude était encore un problème non résolu au XVIIIe siècle. En effet, la différence de longitude entre deux points est équivalente à la différence d'heure locale qui est souvent donnée en termes d'heures, minutes et secondes au lieu de degrés. Or, jusqu'en 1630, chaque pays calculait sa propre heure par rapport au méridien de la capitale du pays. C'est seulement depuis la fin du XIXe siècle que le méridien de Greenwich a été généralisé comme le point 0°.

En principe, nous devons donc être capables de déterminer le temps qui s'écoule entre l'observation d'un événement astronomique spécifique et le moment où il survient au méridien 0. Nous savons, étant donné la rotation de la Terre sur son axe, que l'instant où le Soleil atteint sa position la plus haute survient 4 minutes avant ou après pour chaque degré en direction est-ouest.

Dans tous ces exemples et mesures possibles, nous avons implicitement supposé que la Terre était une sphère parfaite. Toutefois, nos mesures ne seront pas parfaitement justes. Comme Christiaan Huygens l'a démontré au XVIIIe siècle, la Terre n'est pas une sphère parfaite mais aplatie aux pôles : c'est un sphéroïde. Cet aplatissement entraîne des différences dans la détermination de la latitude.

Aujourd'hui, on peut voir dans les images satellite que la Terre n'est même pas un parfait sphéroïde : aux pôles, il a des bosses de différentes tailles et ressemble presque à une pomme (**Figure 2**). Par rapport à une sphère parfaite, le pôle sud est environ 25 m plus proche du plan équatorial alors que le pôle nord s'en trouve éloigné d'environ 20 m. Depuis que Carl Friedrich Gauss (1777-1855) a décrit la forme de la Terre comme un géoïde, dont la surface est définie comme étant perpendiculaire à la direction de la gravité en tout point, il est devenu évident que ces déformations sont de nature fondamentalement différente que l'irrégularité des montagnes et des vallées présentes à la surface de la Terre.

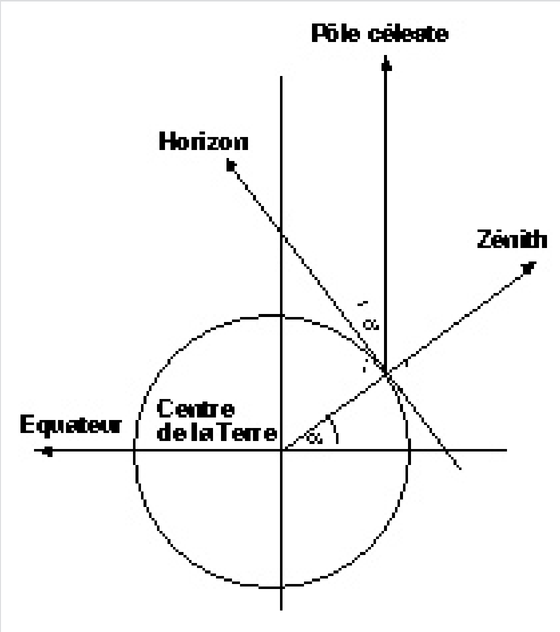


Figure 1.
Pour déterminer l'élévation du pôle céleste α et, de cette façon, la latitude géographique, le théodolite est fixé horizontalement. Ensuite, à travers le télescope, on vise le pôle céleste. La valeur recherchée est l'angle entre l'horizon (la ligne perpendiculaire au fil à plomb) et le pôle céleste. Le dessin montre qu'il s'agit du même angle que celui existant entre la direction de la gravité, c'est-à-dire le zénith de l'observateur, et l'équateur de la Terre. Au pôle nord, α = 90 ° ; à l'équateur, α = 0°.

Des perceptions sensorielles à la preuve exacte

Nous allons maintenant nous intéresser à quelques-unes des étapes qui nous ont conduites à la véritable forme de la Terre.

L'hypothèse selon laquelle la Terre est sphérique a été émise par les pythagoriciens de la Grèce antique. Ils croyaient que les planètes sphériques, parmi lesquelles la Terre, étaient disposées suivant un ordonnancement harmonique et décrivaient une danse circulaire à des distances déterminées par les intervalles musicaux. Avec cette hypothèse, ils se sont tout de même trouvés face à différents problèmes qui ne pouvaient être résolus avec l'approche pythagoricienne reposant sur l'expérience quotidienne. En toute honnêteté, beaucoup d'entre nous aujourd'hui trouveraient difficile d'expliquer ces paradoxes.

Premièrement, se pose la question des personnes vivant sur le côté opposé de la Terre. Si je me tiens debout d'un côté de la sphère, cela signifie-t-il que les personnes de l'autre côté doivent se tenir sur leur tête ? Mais eux-mêmes diront qu'ils se tiennent droit. Comment est-il possible que la même direction soit le haut pour les uns et le bas pour les autres ?

Deuxièmement, on ne pouvait expliquer comment les nombreuses parties de la Terre tenaient ensemble, en particulier les immenses masses d'eau des océans. Par conséquent, il était nécessaire de prouver que la forme de la Terre était sphérique.

Eratosthène (environ 276-192 avant J.-C.), un élève de l'école d'Alexandrie et directeur de sa fameuse librairie, fut le premier à se libérer des notions découlant principalement de la perception des sens. Il élabora une preuve indiscutable que la forme de la Terre était sphérique et cela en mesurant ce qu'il ne pouvait pas voir. Des amis, peut-être certains des derniers héritiers des pythagoriciens, lui parlèrent d'un puits à Syène, en Egypte (il s'agit maintenant de la ville d'Assouan), où le Soleil éclairait le fond du puits le jour d'été où il atteint sa plus haute position dans le ciel, le solstice d'été. Ce jour-là, à Alexandrie, Eratosthène mesura donc l'ombre projetée par un bâton vertical, exactement perpendiculaire à la Terre. Compte tenu que la distance entre Syène et Alexandrie était connue, il calcula la circonférence de la Terre comme étant dans la même relation à cette distance que l'angle de l'ombre portée du bâton le serait à un cercle complet de 360° (**Figure 3**).

La preuve qu'apporta Eratosthène

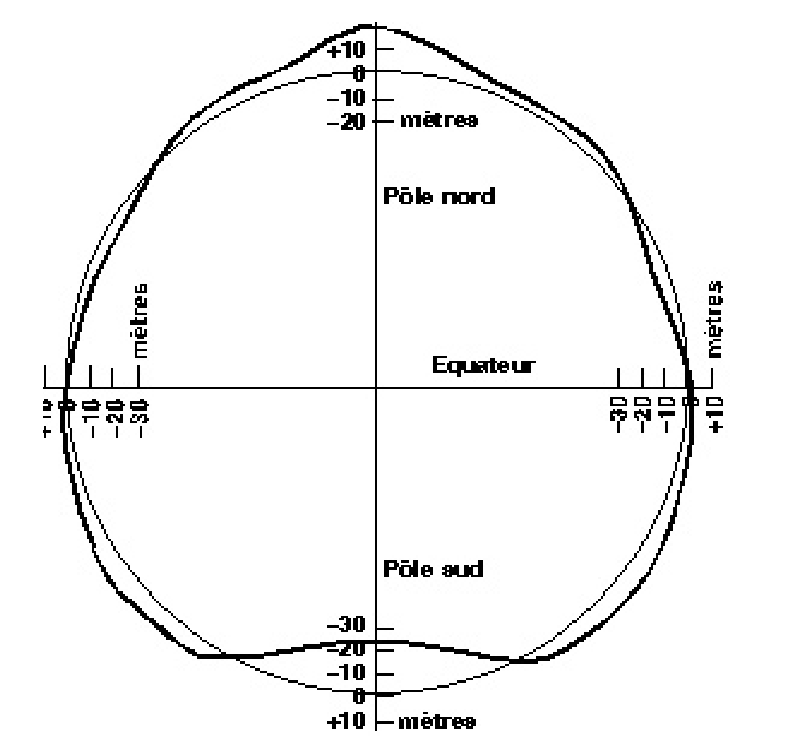


Figure 2. Les mesures de satellite montrent les irrégularités de la forme terrestre.

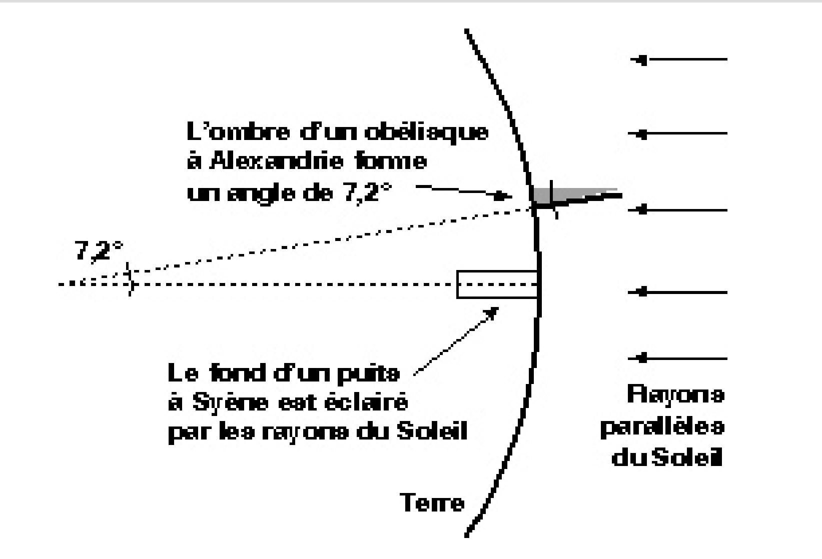


Figure 3. La mesure par Eratosthène de la circonférence de la Terre reposait sur le calcul de l'angle de l'arc entre Alexandrie et Syène (Assouan) situées sur le même méridien, séparées par une distance d'environ 833 km.
Eratosthène avait remarqué qu'au solstice d'été, la lumière du Soleil arrive perpendiculairement au fond d'un puits à Syène et qu'au même moment, à Alexandrie, le Soleil projette l'ombre d'un obélisque en formant un angle de 7,2° (voir ci-dessus). Avec ces indications, il devenait simple de calculer avec précision la circonférence de la Terre. En effet, si 1/50 du cercle (7,2°) est égal à 833 km, alors la circonférence totale est de 41 650 km.

fut une révolution pour l'humanité, déterminant une connaissance pratique de la nature qui était inconcevable avant ces savants grecs. Le pouvoir d'imagination de l'homme s'était élevé au-dessus de la croyance selon laquelle on peut déduire logiquement tous les phénomènes en se basant sur la seule perception des sens. Eratosthène a atteint un plus haut niveau de connaissance.

Attendre environ deux mille ans pour le pas suivant

A cette époque, on aurait pu s'attendre à un développement rapide dans de nombreux domaines de la science et ses applications. Mais, au lieu de cela, la découverte d'Eratosthène fut mise à l'écart durant de nombreux siècles. C'est seulement au XVI^e siècle que cette connaissance de la véritable forme terrestre réapparut – environ deux mille ans plus tard ! En effet, jusqu'en 1580, le géographe Conrat von Ulm parlait encore simplement de la *« géodésie, qui consiste en des mesures de terrains prouvées et fiables »*.

Ce grand pas en arrière était surtout lié au déclin de la science durant l'époque de domination romaine et les siècles qui suivirent. Bien sûr, il y avait des savants qui se sont efforcés de propager les connaissances de l'école d'Alexandrie, comme Isidore de Séville et Bede le Vénérable. Néanmoins, les cultes, la superstition et le mysticisme, qui étaient du point de vue de l'oligarchie un excellent moyen de contrôle social, dominaient les esprits d'une grande partie de la population. Le culte d'Apollo, par exemple, agissait comme un service secret très bien organisé.

De plus, toute pensée scientifique indépendante était bloquée par l'influence de Ptolémée, au II^e siècle après J.-C. à Alexandrie. En effet, celui-ci a systématiquement falsifié les découvertes réalisées à son époque. Par exemple, il utilisa les valeurs imprécises données par Strabon, un astronome ayant une vision de retour à la nature, au lieu des mesures beaucoup plus précises d'Eratosthène. En conséquences, les mesures de longitude étaient trop petites d'un tiers, l'équateur était trop loin au nord, la mer Méditerranée était de moitié trop longue et l'Asie était repoussée à l'est de 50° ! Dans son *Almageste*, Ptolémée présentait les idées d'Hipparque et d'Eratosthène mais, dans sa seconde étude intitulée *Introduction géographique à la représentation de la Terre*, il se ravisa et utilisa les valeurs erronées fournies par Marin de Tyr et Posidonios. Il mentionne un instrument d'observation qu'il prétend avoir construit mais sans expliquer du tout comment il fonctionne. Dans sa *Géographie*, la mesure de la Terre n'est expliquée qu'en principes, sans aucune figure donnée.

Les Romains s'intéressaient peu à la forme réelle de la Terre et, de manière générale, à toute démarche scientifique. Le progrès scientifique était jugé inutile dans leur société où il y avait assez d'esclaves pour accomplir les labeurs. Ils s'intéressaient uniquement à revendiquer les territoires qu'ils avaient conquis, et à généraliser les formes existantes d'agriculture. Afin de déterminer leurs acquisitions territoriales, les arpenteurs romains définirent une ligne est-ouest appelée *decumanus*, et une ligne de midi le *cardo*, par lesquelles ils divisaient un territoire donné. Les terres étaient mesurées à l'aide de longues routes entre lesquelles ils découpaient des triangles rectangles. Mais ces angles n'étaient en fait jamais mesurés et l'on peut imaginer combien ces routes étaient « parallèles » en réalité. La méthode de mesure romaine était totalement linéaire. Il n'est alors pas surprenant que leurs idées sur la forme de la Terre sont rapidement devenues similaires à celles des Egyptiens au IVe siècle avant J.-C. (**Figure 4**).

C'est seulement après que le compas fut développé et la navigation capable de dépasser l'étape du cabotage, que la question de la véritable forme de la Terre réapparut. Dès le XIIIe siècle, certains marins cherchèrent une route transatlantique pour aller en Inde. Mais sans cartes fiables, c'était un voyage vers l'inconnu.

Navigation et cartographie

Entre admettre la forme sphérique de la Terre et avoir une véritable compréhension de l'unicité de cette forme, nous devons franchir un autre pas que nous ferons seulement si nous voulons vraiment « découvrir » cette sphère. C'est le cardinal et savant Nicolas de Cues (1401-1464) qui démontra pour la première fois dans *De circuli quadratura* (*La quadrature du cercle*), qu'il est impossible de définir la grandeur réelle de la circonférence d'un cercle en utilisant une unité de mesure linéaire. Ainsi, le Cusain créa un niveau plus élevé de compréhension de la géométrie. Il enseignait que la Terre était une sphère, tournant autour de son propre axe. Plus tard, il élabora la première carte fiable d'Europe centrale, et une carte du monde qui fut imprimée après sa mort en gravure sur cuivre, un an avant que Christophe Colomb découvre l'Amérique.

Le lien entre le développement de la production des cartes, la géodésie et la découverte de la vraie forme terrestre, est démontré par les travaux de deux autres savants : le mathématicien, astronome et mécanicien Regiomontanus (Johann Müller

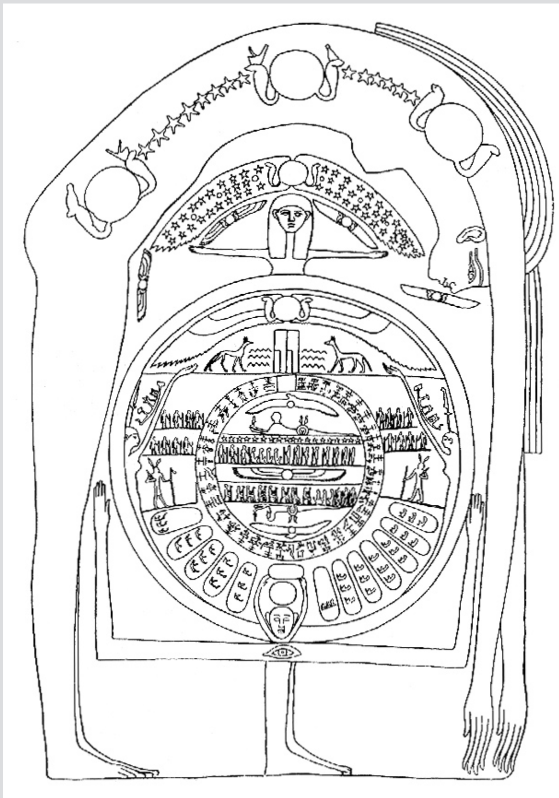
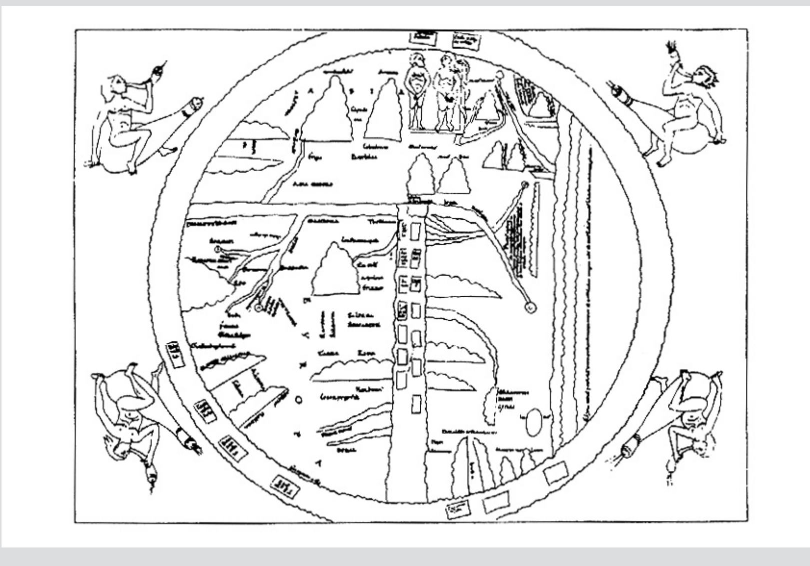


Figure 4.
Le dessin de gauche provient d'un sarcophage de Saqqarah, datant du IVe siècle avant J.-C.
Le corps du dieu du ciel de l'Egypte ancienne, Nut, embrasse la Terre comme un cercle, avec les provinces d'Egypte formant une ceinture.
Ci-dessous se trouve une copie du XIIe siècle de la fameuse carte mondiale de Turin.

Sources : *Bulletin of the Metropolitan Museum of Egypt*, 9/1914 ; Deutsches Museum de Munich.



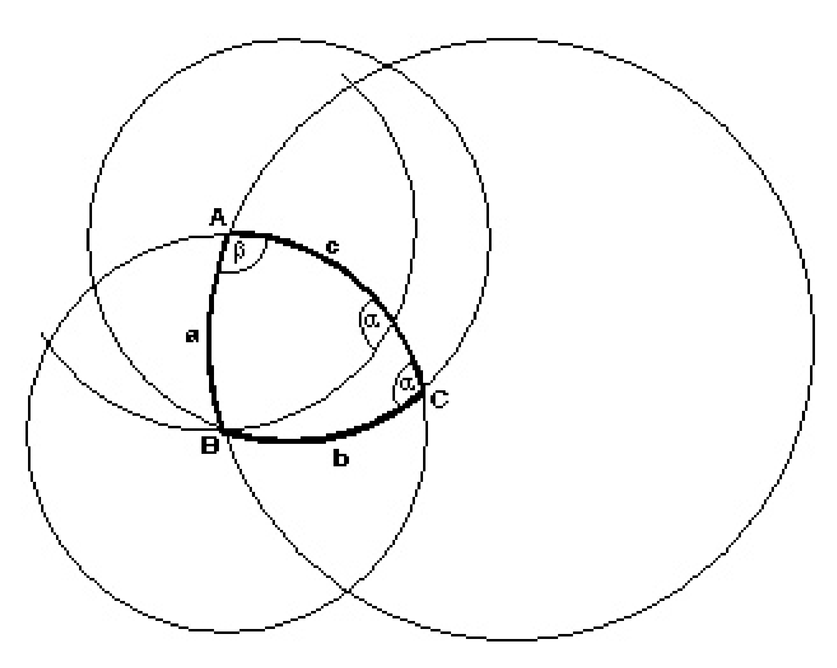


Figure 5. **Il s'agit ici de l'exemple 35 du troisième tome de *De triangulis omnimodis libri quinque* de Regiomontanus, où il parle du triangle sphérique ABC : « *Lorsque deux triangles sphériques ont leurs côtés égaux à l'exception d'un seul, les angles situés à l'opposé des côtés égaux sont aussi égaux.* » Regiomontanus traite des triangles planes dans les deux premiers tomes et des triangles sphériques dans les trois derniers.**

de Königsberg, 1436-1476), et son élève, le mathématicien et navigateur Martin Behaim de Nuremberg (1459-1507), dont les recherches et découvertes furent étudiées en détail par celui qui découvrit la triangulation, Willebrord Snell.

Comme on l'a vu précédemment dans la détermination de la latitude, la mesure des angles est indispensable pour définir une position sur la Terre. Si on dessine une image d'une petite section de la Terre, comme le Cusain le fit pour l'Europe centrale, une nouvelle question est soulevée sur les véritables distances entre deux positions. Peut-on ici aussi mesurer les angles au lieu des distances, ce qui serait forcément difficile et imprécis ? Comment le fait-on sur une sphère ? Ou, graphiquement, si l'on dessine un carré sur un ballon dégonflé, et que l'on gonfle ensuite, qu'arrive-t-il au carré ? Les angles aux sommets resteront-ils de 90° ? Ou, à l'inverse, comment représente-t-on une figure sur la surface courbe du ballon (ou de n'importe quelle partie de la Terre), sur une feuille de papier plane ?

Pour répondre à ces questions, les travaux de Regiomontanus sont d'une grande importance. Il fut le premier à expliquer la méthode de mesure des angles et de calcul des relations entre les angles et les côtés d'un triangle, dans son étude *De triangulis omnimodis libri quinque* (*Cinq tomes sur des triangles de toutes sortes*), créant ainsi une véritable science de la trigonométrie des triangles plans et sphériques. La **figure 5** donne un exemple de l'approche de Regiomontanus.

De plus, il fut le premier à calculer avec précision les positions des comètes à l'aide d'instruments qu'il avait lui-même conçus. Son élève, Martin Behaim, emporta les astrolabes et éphémérides de Regiomontanus au Portugal où il resta de 1484 à 1486. Christophe Colomb et Vasco de Gama avaient tous les deux ses *Ephemerides ab anno 1475-1506* à bord de leur bateau, et en les utilisant, Amerigo Vespucci détermina la position géographique de l'embouchure du fleuve Orinoco. De retour à Nuremberg, Behaim créa le premier globe, une image complète de la Terre dans une forme sphérique.

Le problème de la « courbure dans le petit »

C'est une propriété spécifique de la sphère, à l'opposé du cylindre, de ne pouvoir être dépliée simplement sur une surface plane. Il n'y a pas de linéarité, et toute tentative de représenter une section sur une surface plane ou une carte, comprendra nécessairement des distorsions. Ce phénomène ne fut étudié en profondeur que tardivement, avec la définition du terme « courbure gaussienne ».

Les cartes des océans étaient jusque vers 1400, de simples cartes planes, qui ne représentaient pas la véritable relation entre les distances de longitudes et de latitudes. C'est seulement lorsque les méthodes de projection furent développées, d'abord en 1569 par Mercator (1512-1594), que des progrès significatifs furent réalisés. Dans la projection de Mercator, parfois appelée « projection par latitude croissante », la surface de la Terre est projetée au moyen de rayons émanant de son centre, sur un cylindre renfermant l'équateur. Une image est ainsi créée, qui est fortement déformée par rapport à la sphère mais exacte du point de vue des angles dans le petit (**Figure 6**). Si deux lignes se croisent avec un angle spécifique sur Terre, elles se croiseront avec le même angle sur l'image projetée. Seules les surfaces polaires ne peuvent être représentées par cette méthode, puisque les lignes des latitudes s'accroissent rapidement jusqu'à l'infini.

La projection de Mercator représenta un progrès considérable pour la navigation. L'explorateur Magellan fut le premier des temps modernes à chercher à prouver empiriquement que la Terre est une sphère, par son voyage autour du monde de 1519 à 1521. Cette tentative, à laquelle il ne survécut pas lui-même, marqua l'histoire.

Premières tentatives de mesure du globe terrestre

Les travaux entrepris pour prouver scientifiquement la forme de la Terre ont donné un élan décisif pour le développement de la cartographie. Jean-François Fernel (1497-1558), un médecin français, est l'un des premiers qui tentèrent de mesurer directement les degrés de latitude. En 1528, Fernel décrivit, dans sa *Cosmotheoria*, comment il mesura la latitude de 48° 38' à Paris, et se déplaça à une certaine distance vers un autre lieu quatre jours après, en comptant les tours d'une roue de circonférence connue. Ce second lieu fut choisi de manière à ce que la différence de latitude soit calculée de 1°, en utilisant la hauteur du Soleil à midi et sa déclinaison. En décomptant une certaine valeur – sans donner d'explication détaillée – il parvint à déterminer la longueur d'un arc de 1° à 101,1 km.

Compte tenu de sa mesure imprécise de la hauteur du Soleil, son résultat fut considéré comme un accident chanceux. Snell suspectait ouvertement une fraude. Une fois de plus, le problème évident était la mesure directe de la distance, qui faisait nécessairement de cette tentative un échec.

Une autre tentative à mentionner est celle de Regnier Gemma Frisius (1508-1555), qui est souvent appelée à tort une triangulation. Gemma Frisius définit une soi-disant distance de référence entre les tours des églises de Bruxelles et d'Anvers. En utilisant un disque circulaire gradué, semblable à un quadrant, il détermina par visée directe la distance à laquelle se trouvaient d'autres lieux. Ces disques étaient orientés exactement vers le nord au moyen d'un compas. Les points d'intersection de ces directions étaient ensuite déterminés graphiquement sur une feuille de papier. A partir de ces lieux, Gemma Frisius poursuivit de la même manière, créant devant lui de nouveaux points de mesure (**Figure 7**). Le point faible de cette méthode réside dans le fait que la distance de référence n'est pas connue. La ligne de Bruxelles à Anvers était la base du calcul de toutes les autres distances, cependant Gemma Frisius ne mesura jamais la longueur réelle de cette distance.

La découverte de la triangulation

C'est le mathématicien, astronome et cartographe hollandais Willebrord Snell qui découvrit comment se libérer de la mesure directe des distances sur Terre. Avec sa mesure de la longueur de l'arc de 1° entre les lieux de Bergen op Zoom et Alkmaar aux Pays-Bas, il introduisit une méthode très précise – la triangulation – au lieu d'estimer ou de mesurer directement (mais de manière imprécise) la longueur d'un arc de 1° sur Terre.

Dans son étude en deux volumes *Eratosthenes Batavus - De Terreni ambitus vera quantitate* (*L'Eratosthène hollandais - De la vraie grandeur de*

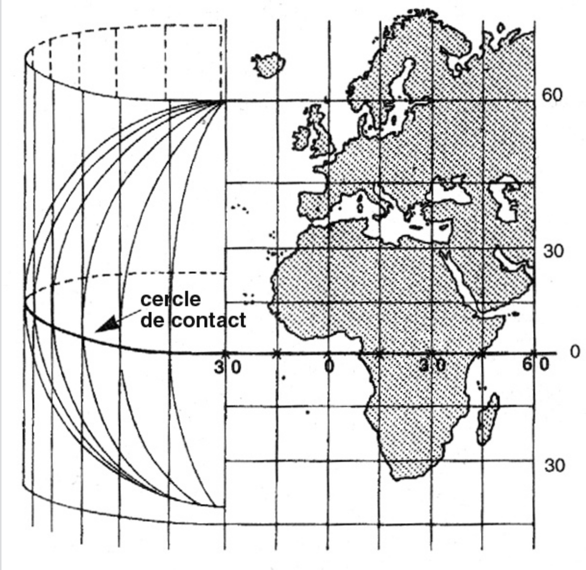


Figure 6. La projection de Mercator. Projection de la sphère terrestre sur le cylindre qui l'enferme. Par cette projection, les distances entre les cercles de latitude deviennent plus grandes, à mesure que l'on s'éloigne de l'équateur. Près des pôles, les distances s'accroissent à l'infini. Compte tenu de cette distorsion, la projection de Mercator est essentiellement utilisée pour représenter les régions entre 50° Nord et 50° Sud. Le grand intérêt de cette projection réside dans le fait qu'elle préserve les angles.

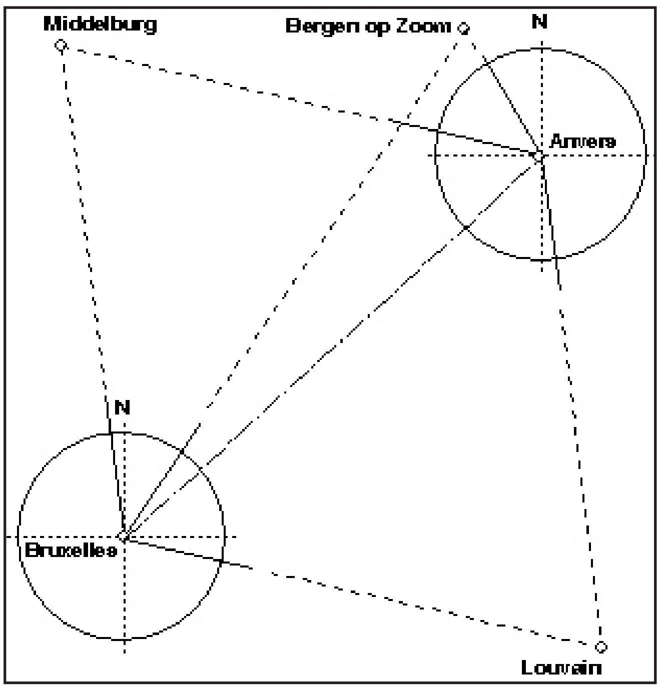


Figure 7. Cette méthode imaginée par Regnier Gemma Frisius peut être utilisée pour réaliser des cartes mais elle ne permet pas de mesurer les distances réelles.

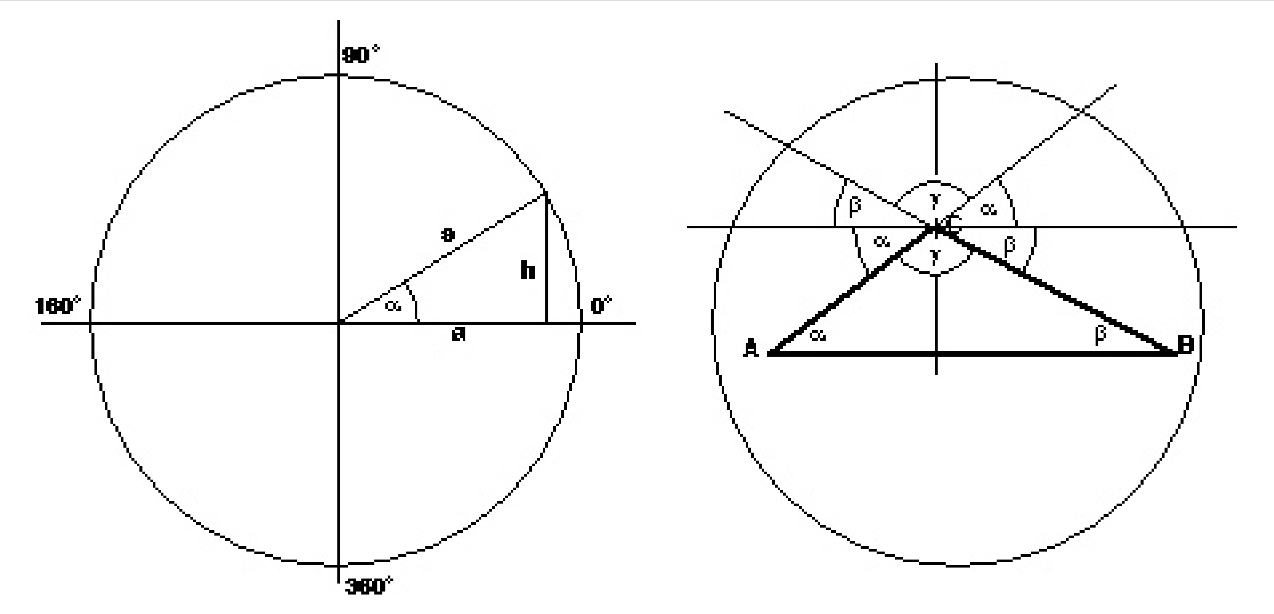


Figure 8. Les fonctions trigonométriques sont représentées par les côtés d'un triangle rectangle de Pythagore :
(1) sin α = h/s = côté opposé/hypoténuse
cos α = a/s = côté adjacent/hypoténuse
(2) La somme des angles d'un triangle plan est toujours de 180°. Les triangles et les relations entre leurs côtés et leurs angles s'expliquent le plus facilement à l'aide des cercles. Puisque la circonférence d'un cercle est toujours de 360°, il est facilement démontrable par déplacement parallèle que $\alpha + \beta + \gamma = 180°$.

la circonférence de la Terre), Snell explique qu'il souhaitait mesurer la circonférence de la Terre d'une manière plus précise que celle d'Eratosthène. Les raisonnements qu'il expose et ses calculs reposent sur des mesures réelles qui peuvent être vérifiées.

Comme on l'a vu dans les essais précédents décrits plus haut, la mesure de distances rectilignes sur Terre pose des difficultés insurmontables. Hero d'Alexandrie, par exemple, environ au IIIe siècle après J.-C., notait dans sa *Dioptria* qu'il n'existe aucune bonne mesure s'il y a des montagnes, des vallées ou même des océans au milieu. Cependant, on trouve de nombreuses irrégularités, même le long de distances réduites de quelques kilomètres. De plus, le matériau des étalons ou des chaînes de mesure peut être déformé par les changements de température, ou déplacé par le vent, ce qui empêchera d'obtenir la précision nécessaire.

Même la méthode de mesure des distances par la mesure de l'angle du Soleil avec une baguette perpendiculaire à la Terre (la méthode d'Eratosthène), était considérée par Snell comme trop imprécise. Il critiqua le fait qu'Eratosthène avait présupposé les rayons du Soleil parallèles, négligeant ainsi, étant donné la taille notre étoile, la très légère différence d'angles des rayons émanant de différents côtés.

Regiomontanus avait écrit plusieurs études sur le perfectionnement de la trigonométrie, comprenant *De docta triangulorum* et *De triangulis omnimodis libri quinque* (Nuremberg, 1533), qui traitaient de la possibilité de calculer des angles et des triangles. Il calcula les premières tables détaillées de sinus pour un rayon unité de 60 000, pour des angles allant jusqu'à 90°, et une autre table plus complète de sinus pour un rayon de 6 000 000. Il introduisit aussi le *versine* (1 – cos α), bien qu'il n'utilisa pas ce terme lui-même.

Snell avait étudié tous les travaux de Regiomontanus, avant qu'il ne considère la triangulation comme une méthode de mesure de la Terre en utilisant la trigonométrie plane. Regiomontanus expliqua toutes les relations et les connexions légitimes entre les triangles plans et sphériques, en utilisant le cercle, la sphère et leurs mouvements. Un nouveau savoir fut ainsi acquis selon lequel les triangles sont en vérité « créés » par un certain nombre de mouvements circulaires. Ce savoir, hélas, n'est plus enseigné. En effet, à l'école, les triangles sont présentés comme des constructions statiques d'une géométrie linéaire, et leurs lois sont enseignées comme des formules mortes. Le grand intérêt des triangles se trouve dans leur relation étroite au cercle, et ainsi aux fonctions trigonométriques. Leurs relations internes (**Figure 8**) ont été oubliées et donc mystifiées dans ce qui est enseigné aujourd'hui.

Les dessins de Snell dans *Eratosthenes Batavus* démontrent combien il était fasciné par le fait que sa méthode puisse déterminer la position précise d'un point sur Terre, en mesurant les angles et en calculant la longueur des côtés des triangles. Plus tard, il rassembla toutes les observations astronomiques de Regiomontanus et les publia en 1618, avec celles de Bernhard Walther et William IV, comte de Hesse-Cassel.

Ainsi, pour élaborer une méthode de mesure indirecte des distances, Snell va s'inspirer de la tradition de pensée du Cusain et de Regiomontanus. Il libéra de cette façon la géodésie de la mesure directe des distances sur la surface terrestre et de toutes les méthodes fondées sur la seule perception sensorielle.

Regardons maintenant comment

Snell détermina la vraie distance entre deux degrés de latitude car c'est en accomplissant cette tâche qu'il développa la première méthode de triangulation. Celle-ci est encore utilisée de nos jours (bien que sous une forme redéfinie par Gauss et quelques autres), pour mesurer exactement la forme terrestre.

La stratégie de Snell était la suivante. D'abord, il chercha à trouver deux positions aux Pays-Bas situées à 1° indépendamment de leur latitude géographique. En déterminant la latitude géographique d'Alkmaar et Bergen op Zoom à l'aide de la méthode décrite plus haut, il trouva qu'Alkmaar est exactement à 1° au nord de Bergen op Zoom. Toutefois, afin de déterminer la longueur exacte de l'arc de 1° (distance YX dans la **figure 9**), il dût projeter la distance Bergen op Zoom-Alkmaar (g) sur le méridien d'Alkmaar. Pour améliorer la précision de ses calculs, il considéra aussi le méridien de la ville de Leyde, et projeta la distance Leyde-Alkmaar (s) sur la section de méridien EO.

Snell s'intéressa ensuite à deux triangles rectangles, OEY et ZXY. En utilisant le théorème de Pythagore, il put déterminer la longueur XY qui est équivalente à la longueur de 1° de latitude. Cela constitua ses premières réflexions. Puis, il lui restait à mesurer les distances.

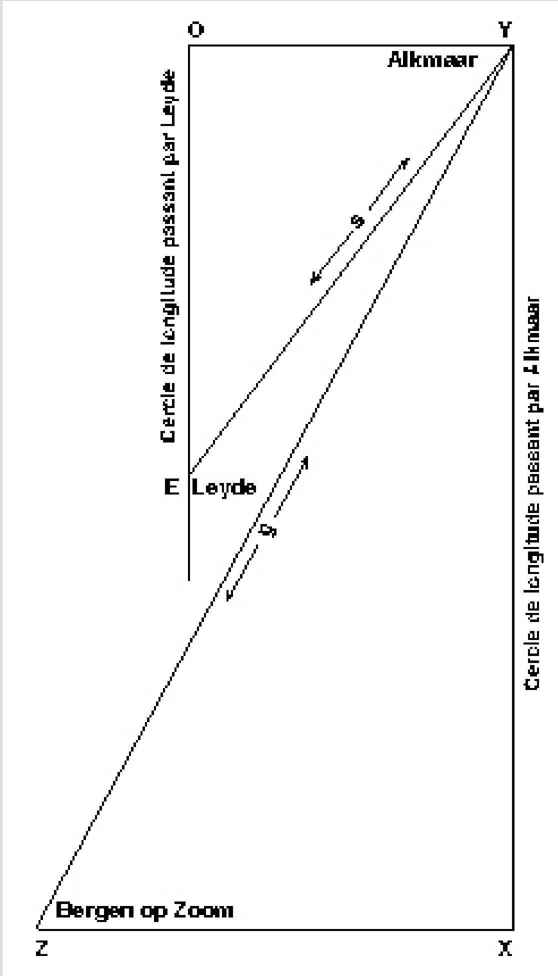
Sa démarche suivante fut de déterminer vingt-trois lieux situés dans la région entre les deux méridiens traversant Alkmaar et Bergen op Zoom. Il rechercha ensuite des points proéminents très visibles et caractéristiques de ces villes, comme les tours d'églises ou les hôtels de ville, sur lesquels il avait besoin de s'appuyer pour mesurer les triangles. Les distances entre ces villes étaient inférieures à celle séparant Alkmaar de Bergen op Zoom, mais encore trop grandes pour être mesurées directement. Toutefois, il avait une idée sur la façon de contourner la mesure directe : il inventa le principe d'élargissement de la base.

Pour établir une mesure réelle, il choisit d'abord la petite distance de Leyde à Soeterwoude. Afin de réaliser son plan, il mesura une courte distance de quelques mètres très précisément. Utilisant une double rangée de baguettes en bois fabriquées spécialement à cet effet, il posa ces baguettes parallèlement (voir **figure 10**).

Figure 9. La triangulation de Snell. Suivant le théorème de Pythagore :

$$g = \sqrt{XY^2 + ZX^2}$$

$$s = \sqrt{EO^2 + OY^2}$$



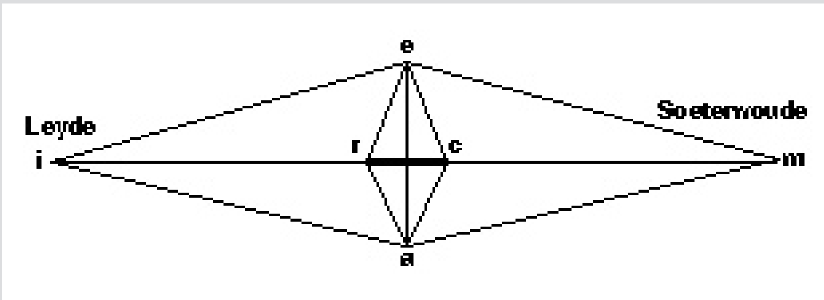


Figure 10. Méthode de Snell d'élargissement de la base. A partir de la base dont les extrémités sont r et c, on choisit les points e et a (par exemple des tours bien visibles), tels que les angles erc et ecr puissent être mesurés par un quadrant ou un théodolite. D'après les lois des triangles planes, Snell a calculé l'angle rec et les côtés ec et er. Le triangle rac est déterminé de la même manière. L'angle era est évidemment era = erc + cra, et étant donné que les deux côtés er et ar et l'angle era qu'ils forment sont connus, Snell a réussi à calculer la distance ea suivant la règle des cosinus développée par Regiomontanus :

$$ea = \sqrt{te^2 + ta^2 - 2 . re . ra . \cos \sphericalangle era}$$

La distance ea est ensuite utilisée comme nouvelle base pour calculer les grands triangles ema et eia qui, en suivant la même méthode, conduisent à la distance recherchée, celle séparant Leyde (i) de Soeterwoude (m).

Cette distance courte mais précisément mesurée, avec les extrémités r et c, constitua sa référence. Il n'importait pas si cette distance était sur la ligne reliant Leyde et Soeterwoude. Il marqua ensuite deux autres points (e et a) localisés quelques mètres à droite et à gauche de la ligne rc, et mesura les angles erc et ecr depuis les points d'extrémités de sa référence rc. Puis, regardant le triangle erc, il calcula selon les lois de la trigonométrie l'angle rec = 180 – ($\sphericalangle$ erc + $\sphericalangle$ ecr). Le côté rc étant connu, il calcula par la suite les côtés ec et er de la manière suivante :

$$ec = rc \cdot \frac{\sin \sphericalangle erc}{\sin \sphericalangle ecr}$$

et

$$er = rc \cdot \frac{\sin \sphericalangle ecr}{\sin \sphericalangle rec}.$$

Il trouva ainsi tous les côtés et les angles du triangle. Il détermina de la même façon le triangle plus petit rac. De plus, l'angle era est évidemment la somme des angles erc et arc, il put donc calculer la distance entre e et a d'après la loi des cosinus en trigonométrie plane :

$$ea = \sqrt{re^2 + ra^2 - 2 \cdot re \cdot ra \cdot \cos \sphericalangle era}.$$

Cela s'appelle la méthode d'élargissement de la base, du fait que la base relativement petite rc est mesurée directement puis élargie par le procédé décrit plus haut. Cette nouvelle distance ea sert ensuite de base pour le calcul des triangles plus grands aei et ame, pour arriver à la longueur de la distance mi (de Leyde à Soeterwoude).

Ce n'était pourtant que la première étape de sa gigantesque entreprise. Dans l'étape suivante, Snell mesura et calcula le triangle Soeterwoude (g) - Leyde (E) - Waffenaria (d), connaissant le côté gE de sa première mesure et déterminant, à l'aide de son quadrant, les angles Egd et gEd afin de se repérer au clocher de l'église de Waffenaria (**Figure 11**). A partir des calculs trigonométriques, il déduisit les côtés gd et Ed. Après avoir calculé les triangles Vorschooten-Leyde-Soeterwoude et Leyde-Waffenaria-Vorschooten, avec lesquels il détermina la distance Vorschooten-Waffenaria à l'aide de la méthode d'élargissement de la base, il trouva ensuite les distances du réseau La Haye-Waffenaria-Vorschooten-Leyde, en prenant la distance Vorschooten-Waffenaria comme référence pour déterminer la distance La Haye-Leyde.

Ainsi, Snell créa pas à pas un réseau de petits triangles et se rapprocha de plus en plus de la longue distance entre Alkmaar et Bergen op Zoom (**Figure 11**). Concernant la méthode de ces nombreux et petits pas, il écrivit : *« J'ai choisi la piste suivante pour résoudre le problème : en différenciant les problèmes individuels en plusieurs triangles individuels, j'ai pu rapidement et aisément achever l'ensemble du travail.* » (*Eratosthenes Batavus*, p. 169).

La mesurer d'un angle

Le grand paradoxe de la détermination de la surface courbe de la Terre par l'utilisation de mesures linéaires a donc été réduit à une tâche beaucoup plus réalisable : mesurer les angles entre des points fixes et individuels sur Terre. Mais comment peut-on mesurer réellement ces angles ? Pour cela, on utilise des théodolites. Dans l'Antiquité, Hero d'Alexandrie avait construit l'un des meilleurs instruments de mesure des angles qu'il appela « *dioptra* », dont le théodolite moderne est dérivé.

La partie principale d'un théodolite est un cercle horizontal (appelé *limbus*), gradué avec la plus haute précision. Au centre du cercle se trouve un télescope, que l'on peut faire tourner horizontalement et possède une aiguille (appelée *alhidade*). Les premiers théodolites n'avaient pas de télescope et l'on devait s'appuyer

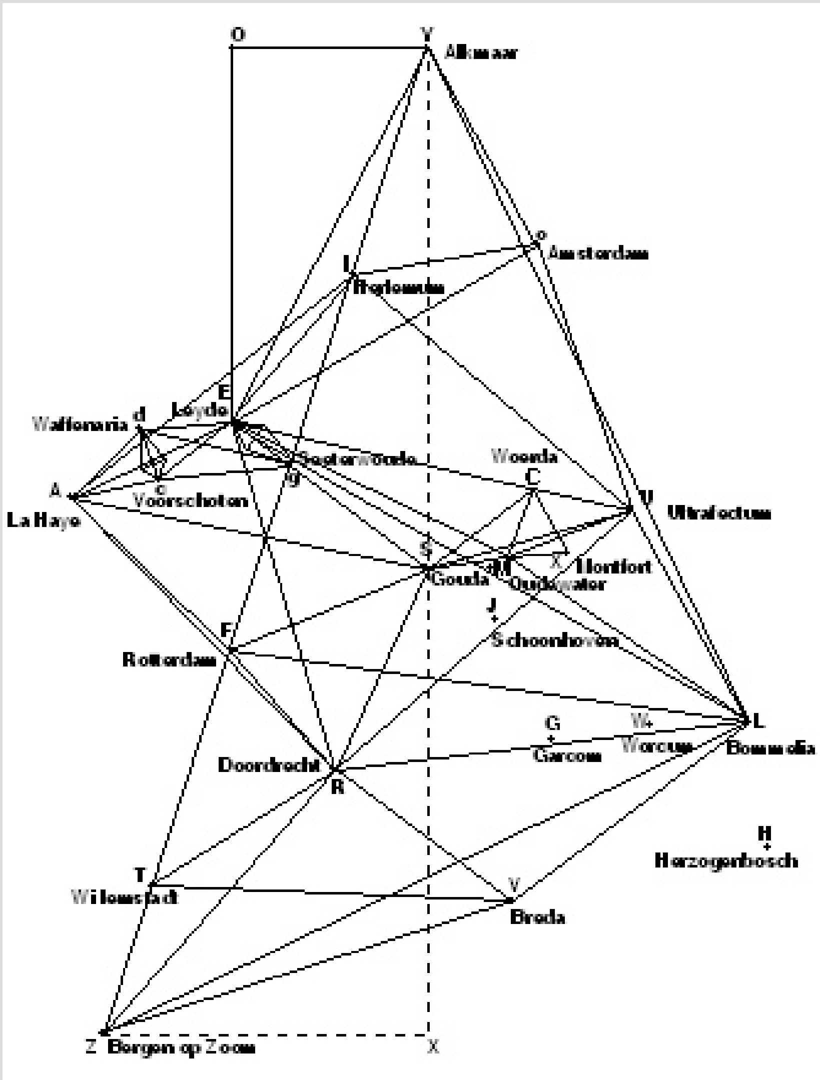


Figure 11. Le réseau de vingt-trois tours proéminentes de villes des Pays-Bas choisies par Snell, et les distances tracées entre les positions individuelles qu'il calcula par la méthode d'élargissement de la base.

sur une observation à l'œil nu. Le télescope est orienté vers le sommet d'un objet et l'angle est lu sur le cercle horizontal. Ensuite, on oriente le télescope vers un deuxième objet et on lit de nouveau l'angle. La différence entre les deux angles correspond à l'angle recherché.

Pour augmenter la précision, l'opération peut être répétée. Nous pouvons mesurer ainsi l'« angle horizontal » (**Figure 12**), c'est-à-dire l'angle entre les points situés sur le niveau défini par le cercle horizontal du théodolite. Ce cercle est placé de façon exactement perpendiculaire au fil à plomb, c'est-à-dire à la direction du centre de la Terre, en utilisant un instrument de nivellement très précis.

Le fait qu'un théodolite mesure toujours l'angle horizontal est ce qui le distingue. Si nous prenons repère sur la tour d'un hôtel de ville, par exemple, on obtient un triangle rectangle défini par une ligne inclinée jusqu'à la tour, une ligne horizontale à la base de la tour et la hauteur de la tour elle-même. En se repérant à un autre objet, on aboutit à un triangle similaire. Le problème lié au fait que l'angle entre les lignes inclinées est différent de celui existant entre les lignes horizontales, ne nous concerne pas dans la mesure des angles horizontaux.

Dans toutes ces mesures se trouvent de nombreuses sources d'erreur,

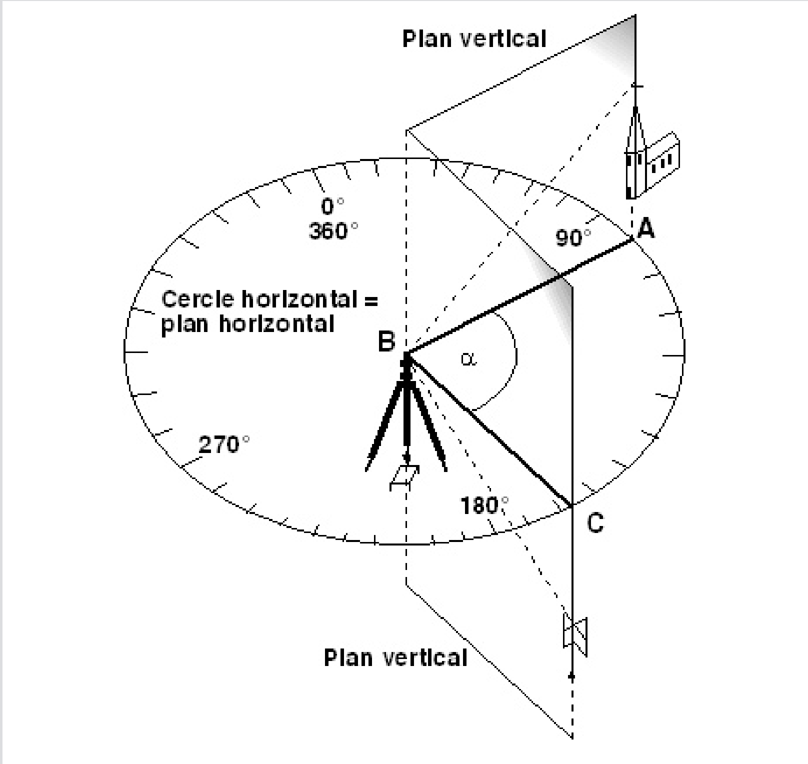


Figure 12. Nous voulons mesurer l'angle a entre l'observateur B, où le théodolite est centré et mis à niveau, et les deux positions A et C. Pour cela, nous prenons repère au point A et lisons l'angle sur le cercle horizontal du théodolite (qui est divisé en 360°) ; puis nous nous repèrons au point C et lisons de nouveau l'angle sur le cercle horizontal. La différence entre les deux angles est l'angle a que nous recherchons. Seuls les angles horizontaux peuvent être mesurés avec cet instrument.

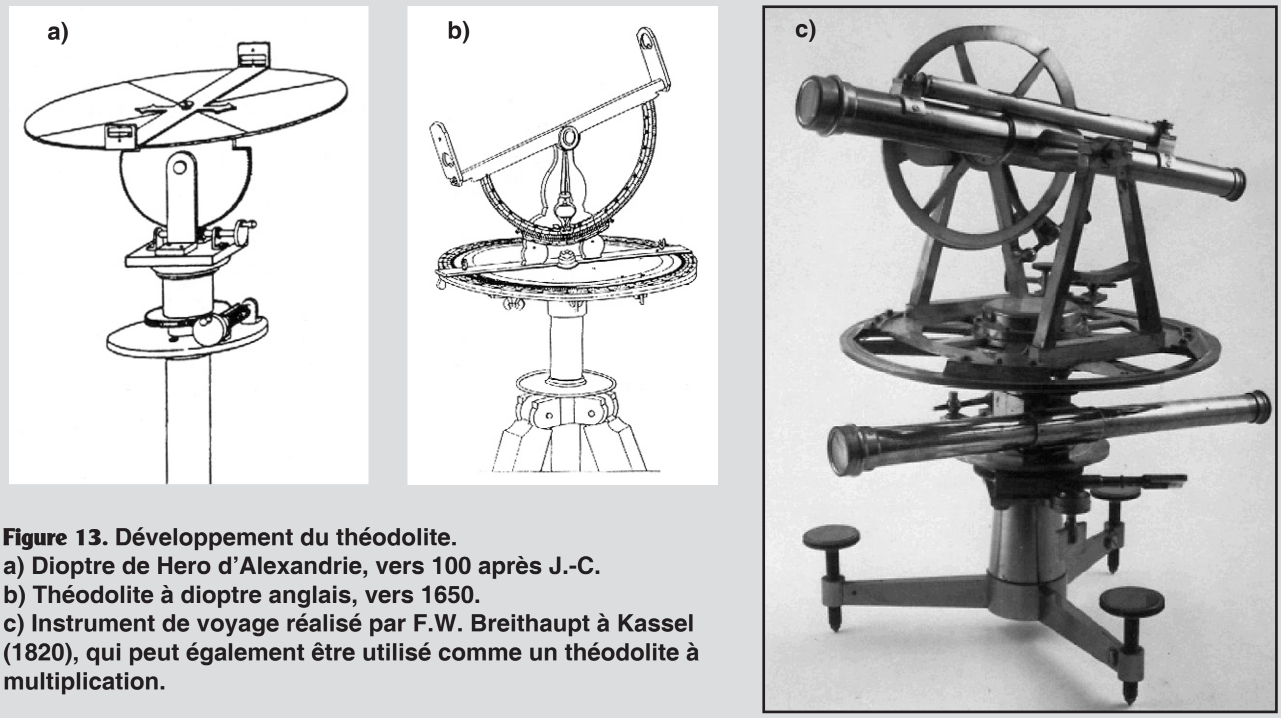


Figure 13. Développement du théodolite.
a) Dioptre de Hero d'Alexandrie, vers 100 après J.-C.
b) Théodolite à dioptre anglais, vers 1650.
c) Instrument de voyage réalisé par F.W. Breithaupt à Kassel (1820), qui peut également être utilisé comme un théodolite à multiplication.

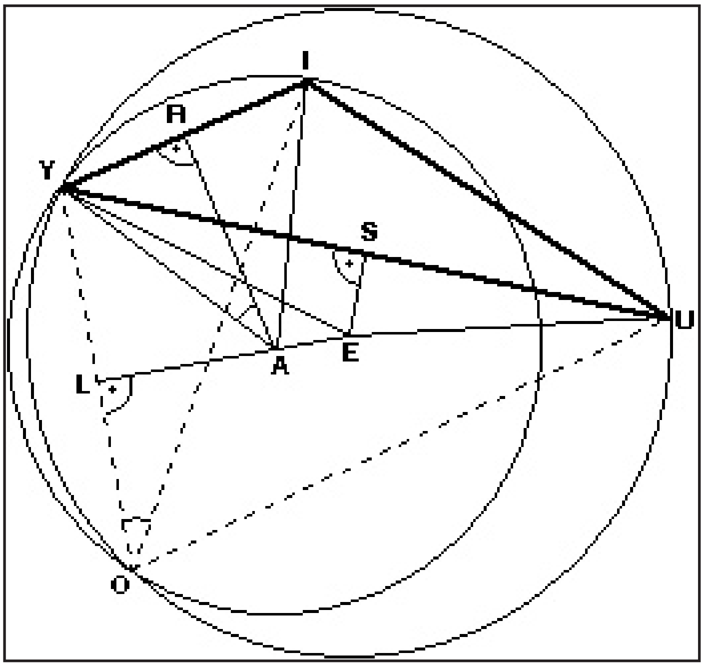


Figure 14. La méthode de triangulation de Snell a permis de résoudre le problème connu aujourd'hui comme le problème de Pothenot ou le « problème de récession ». En fait, il faudrait plutôt l'appeler le problème de Snell-Pothenot. Hipparque avait déjà traité du fait que pour déterminer l'éphéméride du Soleil, nous devons trouver le point le plus proche du centre d'un cercle donné où les rayons vers trois points connus sur la périphérie du cercle sont perpendiculaires les uns aux autres. Snell reformula le problème : si les distances entre trois points donnés sont connues, les distances à un quatrième point sont connues également, et nous pouvons donc nous repérer aux trois autres points pour mesurer les angles respectifs.
Snell rechercha la distance entre O et I qu'il déduisit des distances données entre Y, U et I, et des angles YOI et YOU, qu'il mesura. La construction géométrique qu'il utilisa était la suivante : si l'on croise les bissectrices des angles avec YI et YO ainsi qu'avec YU et YO, le point d'intersection des deux premières lignes A est le centre du cercle de rayon YA, à la périphérie duquel les points O, Y et I se trouvent. Les rayons se calculent ensuite ainsi :
YA = YI / (2 sin YOI) et YE = YU / (2 sin YOU).
Dans le triangle AEY, les deux côtés et l'angle qu'ils forment sont connus et, par conséquent, l'angle AEY également. Comme LE est perpendiculaire à YO, on peut aussi calculer YO :
YO = 2 YE . sin AEY.
On calcule ensuite OU dans le triangle OUY, et OI dans le triangle OIY. On connaît enfin les côtés OY, OI et OU.

mais avec le développement des télescopes optiques, de la mécanique fine et le perfectionnement des échelles sur les cercles horizontaux, le théodolite devint un instrument incontournable dans la géodésie moderne (**Figure 13**).

Aujourd'hui, en plus du cercle horizontal, le théodolite possède un cercle vertical pour mesurer les angles verticaux, un télescope pouvant tourner autour de l'axe vertical et de l'axe incliné et un dispositif permettant de lire l'échelle sur les cercles, et d'orienter l'axe vertical précisément dans la direction du fil à plomb.

Le développement rapide des machines-outils au XIXe siècle permit des mesures encore plus précises. Parmi les sociétés qui devinrent réputées pour la précision de leurs instruments géodésiques, dans la seconde moitié du XIXe siècle et les premières décennies du XXe, on peut mentionner l'atelier de Carl Zeiss de Iéna en Allemagne, où F.W. Breithaupt construisit les instruments développés par Reichenbach, ceux d'Otto Fennel à Kassel et de Max Hildebrand à Freiberg en Saxe ; les travaux de R. & A. Rost à Vienne ; et les sociétés Wild à Herrbrugg et Held à Aarau, en Suisse.

Un réseau de triangles

Quand il eut mesuré la première distance entre Leyde et Soeterwoude, Snell consacra des années à mesurer de nombreuses et courtes distances, en utilisant la méthode d'élargissement de la base, pour créer un réseau de vingt-trois triangles au total (**Figure 11**), qui s'ajoutaient jusqu'à former la distance entre Alkmaar et Bergen op Zoom. Il revint ensuite à sa construction géométrique initiale et, en calculant les deux triangles rectangles, il arriva à la valeur de la distance qui équivaut exactement à 1° de latitude géographique :

1° = 28 500 étalons rhénans (= 107,3 km).

Il put par la suite calculer la circonférence de la Terre, d'après la relation simple :

U : 107,3 km = 360° : 1°, où U est la circonférence totale de la Terre.

Dans ses études, Snell découvrit davantage de mesures possibles comme, par exemple, la méthode de la récession afin de déterminer les distances à un quatrième point à partir des distances données entre trois autres points (**Figure 14**). Cette méthode devint plus tard cruciale pour les grands projets de cartographie.

Le paradoxe de cette méthode est que nous mesurons des triangles comme si nous étions sur une surface plane, c'est-à-dire que l'on utilise les règles de la trigonométrie plane (comme la somme des angles d'un triangle est toujours de 180°), mais en tissant un réseau de triangles, nous pouvons mesurer la courbure du sphéroïde terrestre.

Carl Friedrich Gauss fut vraiment le premier à étudier les petites imprécisions dans la triangulation qui proviennent des lois de la trigonométrie plane, et s'efforça d'améliorer les méthodes d'observation et de mesure. Selon lui, l'axiome suivant lequel la somme des angles d'un triangle est égale à 180° ne serait mis en cause que, probablement, en mesurant les immenses distances entre les étoiles. Gauss était en contact permanent avec l'atelier de Reichenbach à Benediktbeuren et il le rencontrait pour discuter de nouvelles idées et de comment perfectionner les mesures.

La méthode de triangulation fut d'abord utilisée dans le relevé de Wurtemberg (1624-1635), menée sur l'initiative personnelle du mathématicien et orientaliste W. Schickard de Tübingen. Bien qu'il travaillait avec l'administration du duc, il dut aussi compter sur l'aide de la population de la région. Afin de déterminer les points de repère les plus visibles, il fit appel à des artistes, des écoliers et des étudiants pour inspecter les lieux autour de leurs villes de résidence et laisser leurs notes à sa disposition, faisant naître ainsi un intérêt ardent pour l'étude de la géodésie.

Le réseau trigonométrique fut construit exactement suivant la méthode de Snell. Près du fleuve Neckar, une base de 3 900 pieds fut mesurée pour être ensuite utilisée selon la méthode d'élargissement de la base. Des points localisés dans des vallées étroites, et ne pouvant être visés directement, furent déterminés suivant la méthode de Snell. Pour cette grande étude, Schickard construisit des instruments triangulaires pliants. Malheureusement, à cause de la guerre de Trente Ans, Schickard mourut très jeune et les gravures des cartes ne purent être achevées. Peu de temps après Schickard, W. Bachmayer utilisa la méthode de Snell pour mesurer la région de la cité impériale d'Ulm.

La première grande étude fut réalisée en France en 1671, dirigée par l'astronome Jean Picard (1620-1682). Dans l'illustration de son réseau triangulaire, on peut distinguer la base initiale déterminée selon la méthode de Snell de l'élargissement de la base (XY dans la **figure 15**). Dans ses mesures, Picard put se servir de nombreuses innovations dans la technologie instrumentale. Après le développement du télescope au début du siècle, il était nécessaire de définir précisément la direction visée par des repères fixes, quadrillage ou mire, afin de les utiliser pour ces observations. De plus, les repères permettaient de réaliser des mouvements précis, visibles sur une division approximative du cercle. Picard fut le premier à utiliser des réticules dans ses télescopes, faits de cheveux ou de fils métalliques.

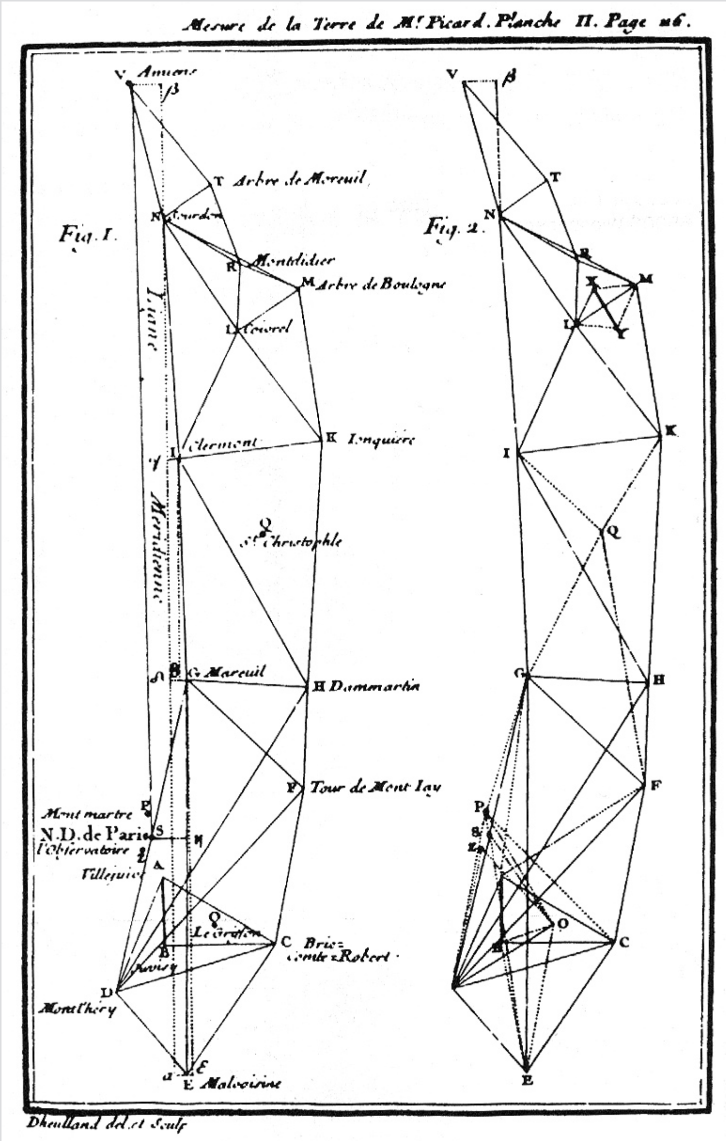


Figure 15. La triangulation de Picard. Le dessin de gauche comprend une ligne fine qui représente le méridien. A droite, on peut remarquer la base XY vers le haut du dessin.

Pour la triangulation, Picard détermina l'arc du méridien, comme Snell l'avait fait, avec une série de triangles. La **figure 15** indique la ligne méridienne à gauche et la base d'origine XY à droite.

Suivant l'exemple français, bientôt tous les pays européens furent cartographiés pour des raisons militaires, administratives ou autres. D'autres perspectives s'ouvraient en dehors de l'Europe, grâce aux expéditions scientifiques comme celles d'Alexander von Humboldt en Amérique du Sud et en Russie. La première carte géographique et topographique de la France fut produite en 1744 par Cassini de Thury. Au Danemark, des mesures commencèrent en 1766, en Saxe en 1780, en Angleterre en 1784, et les années suivantes dans les autres pays.

De réels progrès dans la méthode de triangulation, dans les théodolites et la mécanique fine en général, furent étroitement liés aux travaux de Carl Friedrich Gauss en géodésie et d'autres domaines. Gauss ouvrit une ère entièrement nouvelle, en terme de profondeur conceptuelle et de précision. Son travail reste encore aujourd'hui comme un défi à la science moderne, qui doit encore achever les tâches qu'il a définies. n