

# Comment Gauss a déterminé l'orbite de Cérès

(1ère partie)

JONATHAN TENNENBAUM  
BRUCE DIRECTOR

*Nous vous proposons ici de vous emmener pour un formidable voyage — celui de la découverte de l'orbite de Cérès par un jeune mathématicien de 24 ans, Carl Gauss. Pour arriver à bon port, nous ne prendrons pas de raccourcis. Il nous faudra même quelques fois prendre un détour, s'arrêter en chemin ou revenir sur nos pas... mais vous ne serez pas déçu du voyage car les contrées que nous traverserons s'appellent géométrie, mathématique, physique et astronomie.*

*Cet article a été conçu dans le cadre d'un effort international visant à présenter de manière pédagogique certaines découvertes fondamentales de l'histoire des sciences. Il a d'abord été publié dans le journal américain The New Federalist, sous une forme hebdomadaire correspondant ici aux différentes sections. Nous commençons avec un avant-propos de l'économiste américain Lyndon LaRouche, initiateur de ce projet pédagogique.*

## AVANT-PROPOS

**D**epuis Euclide jusqu'à Legendre, la géométrie a reposé sur un certain nombre de suppositions axiomatiques qui avaient été admises comme si elles étaient évidentes par elles-mêmes. Avec un peu de réflexion, il devrait être évident que ces suppositions ne sont pas nécessairement exactes. De plus, les relations entre ces elles ont demeuré entièrement dans l'obscurité. Plus frappant encore : ce qui est généralement enseigné à l'école dans les cours de mathématiques, même aujourd'hui, repose sur la doctrine totalement absurde selon laquelle l'extension dans l'espace ou dans le temps s'effectuerait selon une parfaite continuité, sans la moindre interruption, et cela même dans l'infiniment petit. En fait, toute tentative de prouver cette supposition, comme par exemple la célèbre mystification tautologique de Leonhard Euler, se fonde sur une géométrie qui présuppose axiomatiquement une continuité parfaite. Par contre, il a été démontré que la supposition selon laquelle l'extension dans l'espace et dans le temps doit être non délimitée était arbitraire et, en fait, fausse.



**Figure 1.1.** Positions de la planète inconnue (Cérès), observée par Giuseppe Piazzi le 2 janvier, le 22 janvier et le 11 février 1801, et se déplaçant lentement dans le sens contraire des aiguilles d'une montre sur « la sphère des étoiles fixes ».

Le point de vue de Riemann, qu'il rappelle dans la phrase concluant sa dissertation *Sur les hypothèses qui servent de base à la géométrie*, est que, pour arriver à élaborer une géométrie acceptable pour la physique, il faut quitter le domaine des mathématiques pour entrer dans celui de la physique expérimentale. C'est la clef pour résoudre les problèmes cruciaux que pose la représentation des processus vivants ou de tous les processus qui, comme l'économie physique et la composition musicale classique, sont définis à partir des processus cognitifs supérieurs de l'esprit humain individuel. De plus, du fait que les processus vivants et les processus cognitifs sont des modes efficaces d'existence de l'univers dans sa totalité, il ne devrait pas exister de physique expérimentale dont les lois fondamentales ne soient pas cohérentes avec le principe anti-entropique fon-

damental de la cognition humaine. [...]

Par définition, tout principe de la physique (par exemple) validé expérimentalement peut être considéré comme la dimension d'une géométrie d'espace-temps physique de « dimension  $n$  ». C'est nécessaire à partir du moment où ce principe a été validé par la mesure ; c'est-à-dire validé par la mesure de l'*extension*. Cela inclut des suppositions axiomatiques fondées expérimentalement et concernant l'espace et le temps. La question qui se pose alors est la suivante : comment ces «  $n$  » dimensions sont-elles interreliées pour produire un effet qui soit caractéristique de cet espace-temps physique ? Ce fut le génie de Riemann de reconnaître dans les applications expérimentales que Gauss avait faites de son approche sur les résidus biquadratiques aux mesures cruciales dans l'astrophysi-

que, la géodésie et le géomagnétisme, la clef des implications cruciales de l'approche sur une théorie générale des surfaces courbes — approche se fondant sur la généralisation de ces mesures. [...]

### Ce que l'art doit apprendre d'Euclide

La différence cruciale entre la science et l'art développés par la Grèce classique, d'une part, et le travail des précurseurs Egyptiens qui s'opposaient à la Mésopotamie et à Canaan, d'autre part, s'exprime le plus clairement possible dans la notion platonicienne d'*idées*. L'existence de la science moderne repose sur la notion grecque classique d'idée relativement parfaite telle qu'elle est définie par

Platon. Cela s'exprime, par exemple, dans la méthode socratique d'hypothèses qui a permis le développement de l'Europe. Ce qui est arrivé à la géométrie euclidienne à l'époque moderne présente un type crucial de démonstration de ce principe ; ainsi, le mérite de Riemann fut d'avoir corrigé les erreurs d'Euclide en utilisant la même méthode socratique que celle qui avait été mise en œuvre pour produire une géométrie qui avait été, jusqu'à Riemann, l'un des plus importants héritages de l'Antiquité. C'est d'une importance capitale pour rendre clair le principe sous-jacent de motif générateur de composition musicale en polyphonie classique. [...]

L'ensemble de définitions, d'axiomes et de postulats déduit des hypothèses sous-jacentes implicites concernant l'espace, est typique de l'utilisation la plus élémentaire de la notion d'hypothèse. Il s'agit plus précisément d'une hypothèse *déductive* qu'il faut distinguer de formes supérieures d'hypothèses telles que les hypothèses *non linéaires*. A partir du moment où est établie l'hypothèse sous-jacente d'un ensemble de propositions, on peut anticiper sur un bien plus grand ensemble de propositions que l'original qui peuvent être, elles aussi, cohérentes avec l'hypothèse déductive. La liste implicitement sans fin de théorèmes satisfaisants à cette dernière condition, peut être appelée un *réseau de théorèmes*. [...]

Le principe habituel d'organisation interne sous-jacent à un tel type de réseau déductif est l'*extension*, et il est intégral à la notion de mesure. Cette notion d'extension est la notion d'un type d'extension caractéristique du domaine du choix de réseau de théorèmes en question. Toute connaissance scientifique repose sur des questions conduisant à une notion généralisée de l'extension. Ainsi, toute pensée rationnelle relève d'un caractère intrinsèquement géométrique.

En première approximation, tout système déductif cohérent peut être décrit dans les termes d'un réseau de théorèmes. Cependant, comme le point caractéristique crucial de la découverte de Riemann l'illustre de la manière la plus claire, l'essence du savoir humain est le *changement*, le changement d'hypothèse dans le sens selon lequel est développé le problème du paradoxe ontologique dans le *Parménide* de Platon. En résumé, la

caractéristique de la connaissance ou de l'existence humaine n'est pas exprimable selon un mode mathématique-déductif mais doit plutôt être exprimée sous la forme d'un *changement* d'une hypothèse vers une autre hypothèse. Le type de changement en question est le changement d'une hypothèse relativement inférieure vers une hypothèse relativement supérieure. L'action du changement scientifique révolutionnaire d'une hypothèse relativement inférieure vers une hypothèse relativement supérieure est la caractéristique du progrès humain, de la connaissance humaine et du développement légitime de cet univers dont la maîtrise par l'humanité s'exprime par l'augmen-

tation du potentiel de densité démographique relative de notre espèce.

Le processus de changement révolutionnaire ne peut avoir lieu que par le médium de la métaphore, à la manière dont le principe de contradiction a été présenté ci-dessus. De même qu'Euclide était nécessaire, que le travail en géométrie descriptive de Monge et le travail de Gauss et de leurs associés permirent à Riemann de détrôner Euclide, de même tout le savoir humain repose sur cette forme de changement révolutionnaire qui s'avère être la qualité *agapique* de solution à un paradoxe ontologique.

Lyndon LaRouche

Extraits de « Behind the Notes », *Fidelio*, Summer 1997.

## 1. INTRODUCTION

Le 1er janvier 1801, premier jour d'un nouveau siècle. Dans les premières heures de ce jour-là, scrutant le ciel avec son télescope à Palerme, Giuseppe Piazzi découvrit un objet qui se présentait comme un petit point de lumière dans le ciel noir de la nuit (**Figure 1.1**). Il nota sa position par rapport aux autres étoiles dans le ciel. Le lendemain, il vit le même point de lumière mais celui-ci occupait alors une position légèrement différente dans la voûte céleste connue.

Il n'avait jamais vu cet objet avant et il n'existait aucun compte rendu faisant état de son existence. Piazzi passa les nuits suivantes à observer attentivement ce nouvel objet, notant soigneusement chaque changement de position. Se servant de la méthode utilisée par les astronomes depuis la nuit des temps, il enregistra sa position comme étant l'intersection de deux cercles sur une sphère imaginaire dont lui-même se trouverait au centre (**Figure 1.2**). (Les astronomes l'appellent « sphère céleste » ; les cercles sont similaires à la latitude et la longitude sur la Terre.) Un ensemble de cercles est perpendiculaire à l'équateur céleste, montant perpendiculairement à l'horizon de l'observateur puis descendant. L'autre ensemble de cercles est parallèle à l'équateur céleste.

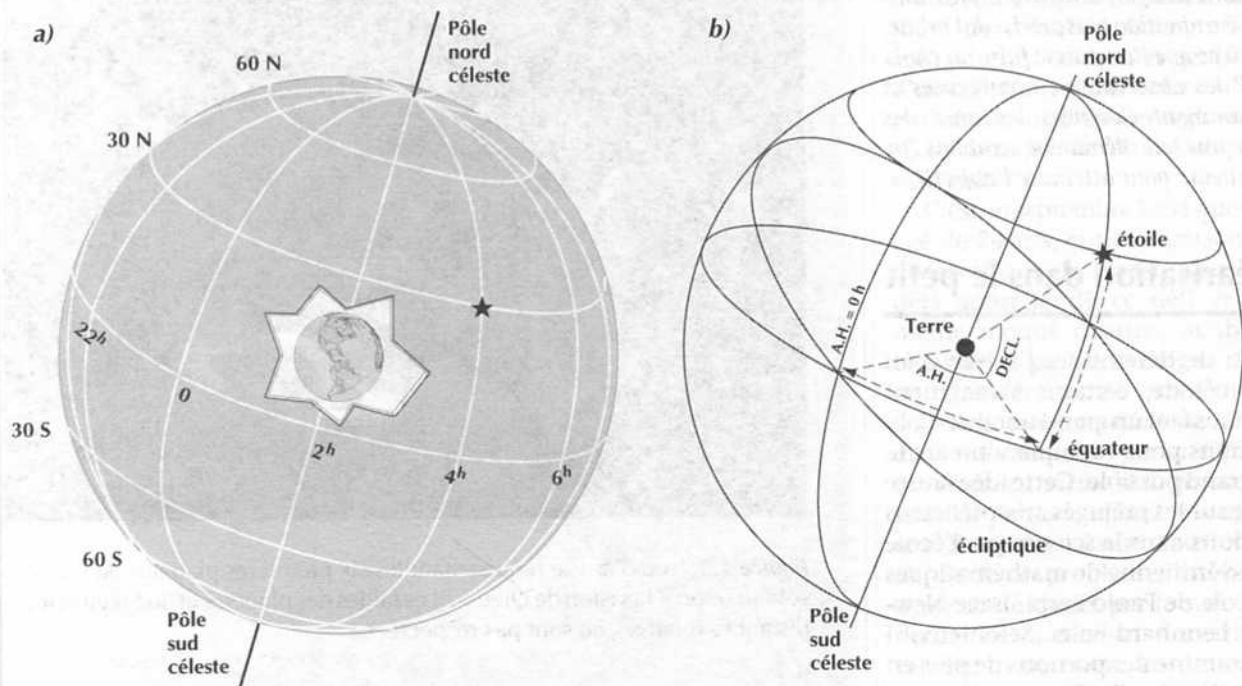
Pour déterminer l'un de ces cer-

cles, il faut effectuer une mesure angulaire : la position d'un cercle longitudinal est déterminée par un angle (ou arc) appelé « angle horaire », et celle d'un cercle parallèle à l'équateur céleste, par la « déclinaison »\* (**Figure 1.2b**). Ainsi, deux angles suffisent pour déterminer la position de n'importe quel point sur la sphère céleste. C'est en fait comme cela que Piazzi communiqua ses observations aux autres astronomes.

Piazzi parvint à relever des changements de position de cet objet en effectuant dix-neuf observations pendant les quarante-deux jours qui suivirent. Le 12 février, l'objet finit par être masqué par la lumière du Soleil et ne fut plus observable. Pendant toute cette période, il avait parcouru un angle de seulement 9° sur la sphère céleste.

Qu'est-ce que Piazzi avait découvert ? Était-ce une planète, une étoile, une comète ou quelque chose d'autre qui n'avait pas de nom ? (Au début, Piazzi pensait avoir découvert une petite comète sans queue. Plus tard, il supposa, avec quelques autres, qu'il s'agissait d'une planète entre Mars et Jupiter.) Et maintenant qu'il

\* La figure 1.1 montre la sphère céleste telle que vue par un observateur, avec une grille permettant de mesurer l'angle horaire et la déclinaison.



**Figure 1.2.** La sphère céleste. a) Depuis la nuit des temps, les astronomes ont relevé leurs observations des corps célestes comme étant des points sur la surface d'une sphère imaginaire appelée sphère céleste ou « sphère des étoiles fixes » avec la Terre en son centre. On peut voir les angles horaires et les déclinaisons. b) On détermine la position d'un objet en mesurant son angle horaire et sa déclinaison.

avait disparu, quelle pouvait être sa trajectoire ? Quand et où serait-il visible à nouveau ? S'il était en orbite autour du Soleil, comment sa trajectoire pourrait-elle être déterminée à partir de ces maigres observations réalisées depuis la Terre, elle-même en rotation autour du Soleil ?

Piazzi avait-il observé cet objet alors que ce dernier s'approchait ou s'éloignait du Soleil ? S'approchait-il ou s'éloignait-il de la Terre au moment où les observations ont été réalisées ? Du fait que toutes les observations n'apparaissent que comme des changements de position sur la sphère céleste, quel mouvement ces changements de positions reflétaient-ils ? Qu'auraient été ces changements de position si Piazzi les avait observés depuis le Soleil ? Ou depuis un point à l'extérieur du système solaire, selon la « vision de Dieu » ? (**Figure 1.3**)

Il s'écoula six mois avant que les observations de Piazzi soient publiées dans le principal journal d'astronomie en langue allemande, *Correspondance mensuelle pour la promotion de la connaissance de la Terre et du ciel* de von Zach, mais la nouvelle de sa

découverte était déjà connue des principaux astronomes d'Europe qui scrutaient, sans succès, le ciel pour retrouver l'objet. Sans une détermination précise de sa trajectoire, sa redécouverte resterait incertaine.

Il n'existait aucun précédent dont on puisse s'inspirer pour résoudre ce casse-tête. L'expérience précédente dont on disposait pour déterminer la trajectoire d'un nouvel objet était la découverte d'Uranus en 1781 par William Herschel. A cette époque-là, les astronomes avaient pu observer la position d'Uranus pendant une longue période de temps et enregistrer ses changements de position par rapport à la Terre.

A partir de ces observations, les mathématiciens s'étaient contentés de se demander : « Sur quelle courbe cette planète se déplace-t-elle de manière à ce que l'on obtienne ces observations particulières ? » Si une courbe ne produisait pas le résultat mathématique souhaité, une autre était essayée.

Comme Carl F. Gauss le décrit dans la préface de son livre de 1809, *Théorie du mouvement des corps céles-*

*tes se déplaçant au voisinage du Soleil selon des sections coniques :*

« A partir du moment où il fut établi avec certitude que le mouvement de la nouvelle planète, découverte en 1781, ne correspondait pas à l'hypothèse d'une parabole, les astronomes essayèrent de lui adapter une trajectoire circulaire, ce qui conduit à des calculs très simples. Par un heureux accident, l'orbite de cette planète avait une très petite excentricité, en conséquence de quoi les éléments résultant de l'hypothèse circulaire suffirent, du moins en première approximation, pour servir de base à la détermination des paramètres elliptiques.

« Il y a eu une conjonction d'autres circonstances très favorables. La lenteur du mouvement de la planète et la très faible inclinaison de son orbite par rapport au plan de l'écliptique permirent non seulement de simplifier les calculs et d'utiliser des méthodes spéciales qui ne conviennent pas dans d'autres cas, mais elles dissipèrent l'appréhension, la crainte que la planète, perdue dans les rayons du Soleil, puisse ensuite échapper aux recherches des astronomes (une appréhension que certains astronomes auraient pu ressentir, surtout si son éclat avait été

moins brillant). Ainsi, comme on pouvait, sans danger, remettre à plus tard une détermination plus précise de l'orbite, jusqu'à ce que l'on puisse faire un choix parmi des observations nombreuses et suffisamment éloignées les unes des autres, une telle démarche semblait être la meilleure pour atteindre l'objectif. »

## Linéarisation dans le petit

Afin de déterminer l'orbite d'un corps céleste, certains s'imaginent qu'il nous faut un grand nombre d'observations pour « remplir » un arc le plus grand possible. Cette idée fautive repose sur les préjugés aristotéliens introduits dans la science par l'école anglo-vénitienne de mathématiques — l'école de Paolo Sarpi, Isaac Newton et Leonhard Euler. Selon eux, si l'on examine des portions de plus en plus petites de n'importe quelle courbe de la nature, on constatera qu'elles ressemblent de plus en plus à des segments de droite — de telle sorte que, pour des intervalles suffisamment petits, la différence devient pratiquement insignifiante et peut être ignorée. Cette idée est dénommée « linéarisation dans le petit ».

Dès le milieu du xv<sup>e</sup> siècle, Nicolas de Cues avait établi que la linéarisation dans le petit n'a pas sa place dans les mathématiques, si celles-ci ont la prétention de refléter la réalité. Le Cusain démontra que le cercle représente une espèce de courbe fondamentalement différente de la ligne droite et que cette différence d'espèce ne disparaît pas — et ne s'atténue même pas — lorsque nous considérons des portions de cercles de plus en plus petites (Figure 1.4). Compte tenu du nombre croissant de leurs sommets, les polygones inscrits ou circonscrits différent de plus en plus du cercle.

Etendant la découverte du Cusain à l'astronomie, Johannes Kepler découvrit que le système solaire était ordonné selon un certain nombre de principes harmoniques. Chaque petite portion du système solaire, comme les petits intervalles d'orbites planétaires, reflète ce même principe harmonique dans sa totalité. L'appel de Kepler à l'invention d'un concept mathématique permettant de mesurer cette autosimilarité incita Gottfried Leibniz à développer le calcul infinitésimal. L'ensemble du travail de Sarpi, Newton et Euler n'est rien

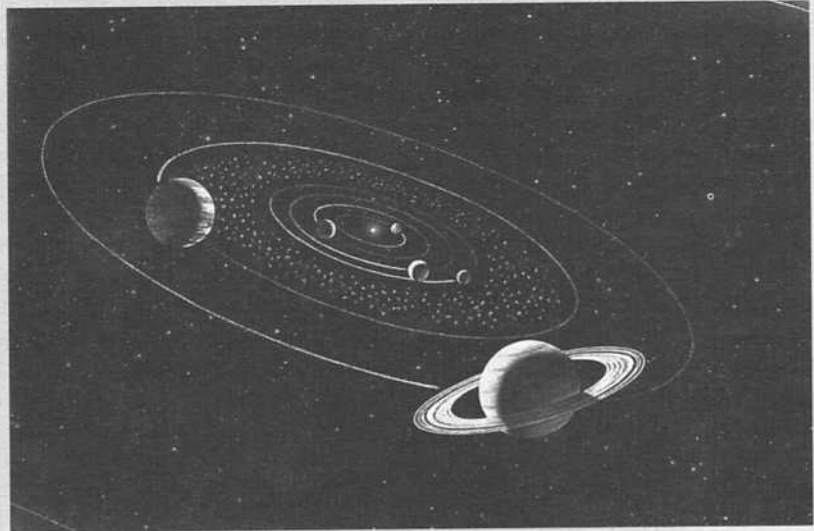


Figure 1.3. Vue d'artiste représentant les six premières planètes du système solaire selon « la vision de Dieu ». (Les tailles des planètes et du Soleil et leurs distances relatives ne sont pas respectées.)

d'autre qu'une fraude perpétrée par l'oligarchie anglo-vénitienne contre l'œuvre de Nicolas de Cues, Kepler et Leibniz.

Si l'on appliquait les fausses mathématiques de Sarpi *et al.* à l'astronomie, l'Univers physique deviendrait de plus en plus linéaire dans le petit et, par conséquent, plus l'arc délimité par la série d'observations serait petit, moins ces observations nous en apprendraient sur la forme de l'orbite entière. Cette approche erronée tient la route, ici, que si le problème de la détermination de l'orbite d'une planète inconnue est traité comme un problème purement mathématique.

Considérons par exemple trois points sur un plan (Figure 1.5). Sur combien de courbes ces points peuvent-ils se trouver? Ajoutons alors d'autres points. Plus nombreux sont les points couvrant une plus grande portion de la courbe, plus précise est la détermination de cette courbe. Un petit changement dans la position des points peut provoquer un grand changement dans la forme de la courbe. Moins nombreux sont les points et plus proches sont-ils les uns des autres, moins précise sera la détermination mathématique de la courbe.

Si cette fausse mathématique était appliquée à l'Univers, la détermination d'une orbite serait pratiquement impossible, à moins d'essayer de la faire « cadrer » avec une courbe ou de

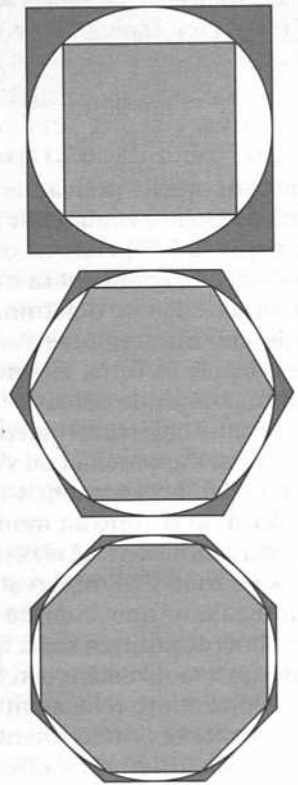
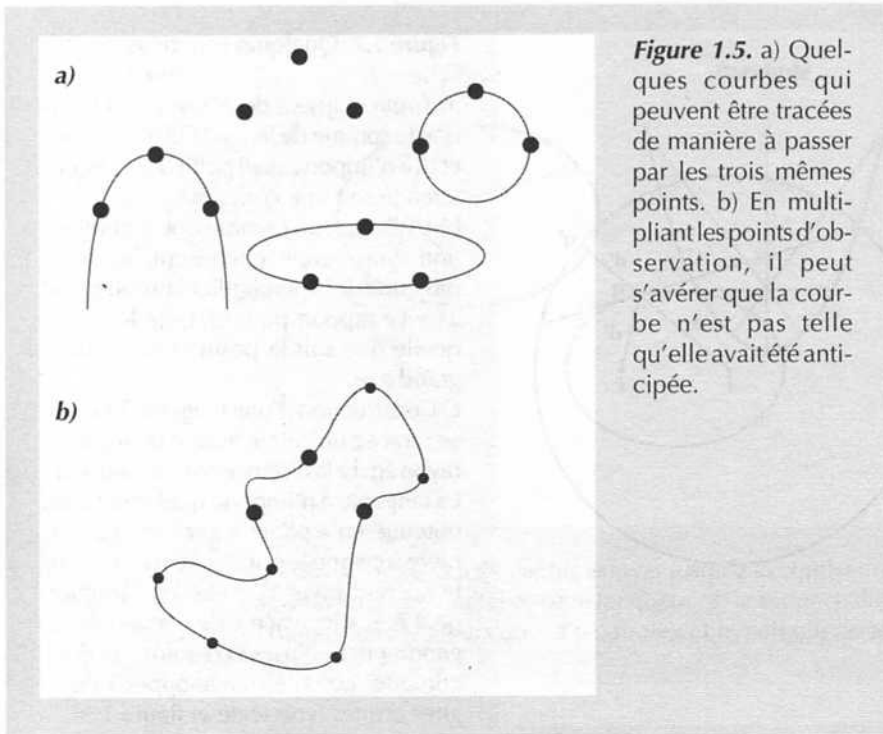


Figure 1.4. Nicolas de Cues a montré que quelle que soit la multiplication du nombre de côtés du polygone, le cercle n'est jamais atteint. Le polygone et le cercle sont des figures d'espèces différentes.



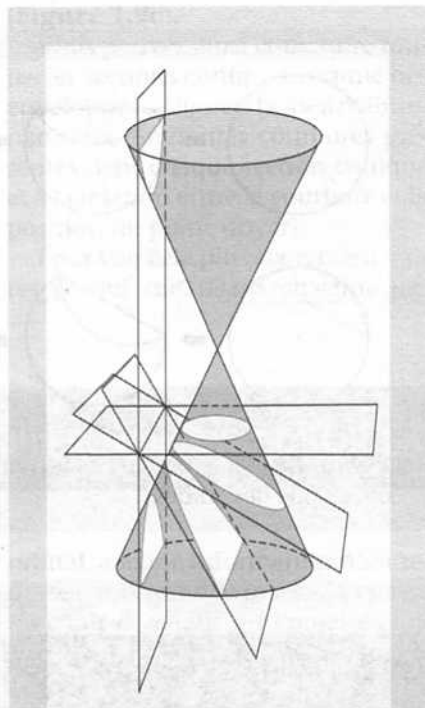
**Figure 1.5.** a) Quelques courbes qui peuvent être tracées de manière à passer par les trois mêmes points. b) En multipliant les points d'observation, il peut s'avérer que la courbe n'est pas telle qu'elle avait été anticipée.

faire des corrélations statistiques à partir du plus grand nombre possible d'observations. Les changements de position observés pour un objet dans le ciel nocturne ne sont cependant pas des points sur une feuille de papier. Ces changements de position sont les reflets de l'action physique qui est autosimilaire dans chacun de ses intervalles d'action, dans le sens où le comprenaient le Cusain, Kepler et Leibniz. Le corps céleste ne se déplace jamais le long d'une ligne droite mais s'en écarte d'une manière caractéristique à chaque intervalle, aussi petit qu'il soit.

En fait, si on se focalise sur le *trait caractéristique* de la « non-linéarité dans le petit » d'une orbite, alors plus petit sera l'intervalle d'action que nous étudions, plus précise sera la détermination de l'orbite dans sa totalité ! Ce point clef va devenir beaucoup plus clair au fur et à mesure que nous suivrons les traces de Gauss dans sa détermination de l'orbite de Cérès.

Ce ne fut que par accident que le problème de la détermination de l'orbite d'Uranus a pu être résolu sans remettre en question l'approche erronée de la linéarisation dans le petit. Néanmoins, le problème posé par la découverte de Piazzini anéantissait tout espoir de résolution avec cette mauvaise méthode. L'Univers a montré qu'Euler était un sot.

(Des années plus tard, Gauss déter-



**Figure 1.6.** Génération des sections coniques en coupant un cône avec un plan en rotation. Quand le plan est parallèle à la base, la section est un cercle. Quand le plan commence à tourner, on obtient des ellipses jusqu'à ce que le plan soit parallèle au côté du cône, cas où l'on obtient une parabole. Si la rotation se poursuit on obtient des hyperboles.

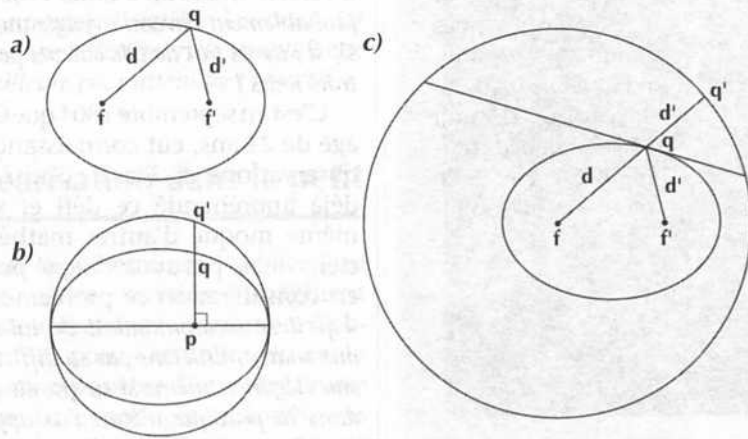
minera en une heure la trajectoire d'une comète qui avait demandé trois jours de calculs à Euler, effort au cours duquel ce dernier perdit la vue d'un œil. Gauss dit d'Euler : « *Je serais probablement devenu aveugle moi aussi, si j'avais fait de tels calculs pendant trois jours !* »)

C'est en septembre 1801 que Gauss, âgé de 24 ans, eut connaissance des observations de Piazzini. Gauss avait déjà appréhendé ce défi et s'était même moqué d'autres mathématiciens de ne pas avoir daigné prendre en considération ce problème alors « *qu'il se recommandait de lui-même aux mathématiciens par sa difficulté et son élégance, même si sa grande utilité dans la pratique n'était pas apparente* ». Etant donné que d'autres considéraient ce problème insoluble et avaient été dupés par le succès accidentel de la mauvaise méthode, il refusait de croire en des circonstances qui rendraient sa résolution nécessaire. Gauss, pour sa part, considéra la résolution du problème avant que sa nécessité se présente d'elle-même, sachant grâce à ses études de Kepler et Leibniz, qu'une telle nécessité apparaîtrait certainement.

## Introduction aux sections coniques

Avant d'embarquer pour notre voyage vers la redécouverte de la méthode par laquelle Gauss déterminera l'orbite de Cérès, nous proposons au lecteur d'enquêter par lui-même sur certaines caractéristiques simples des courbes que nous rencontrerons dans les sections suivantes. Comme nous le verrons plus loin, Kepler a découvert que les planètes qu'il connaissait tournaient autour du Soleil suivant des orbites de forme elliptique. A l'époque de Gauss, des objets, comme les comètes, avaient été observés se déplaçant selon des orbites dont la forme était celle d'autres courbes du même type. Toutes ces courbes peuvent être engendrées en coupant un cône suivant différents angles et sont, pour cela, appelées « sections coniques » (**Figure 1.6**).

Les sections coniques peuvent être construites de différentes manières (**Figure 1.7**). Le lecteur pourra avoir un sens préliminaire de certaines des propriétés géométriques des sections



**Figure 1.7.** Quelques propriétés de l'ellipse.

a) Toute ellipse a deux foyers  $f$  et  $f'$  tels que la somme de leurs deux distances  $d$  et  $d'$  à n'importe quel point de la circonférence soit une constante.

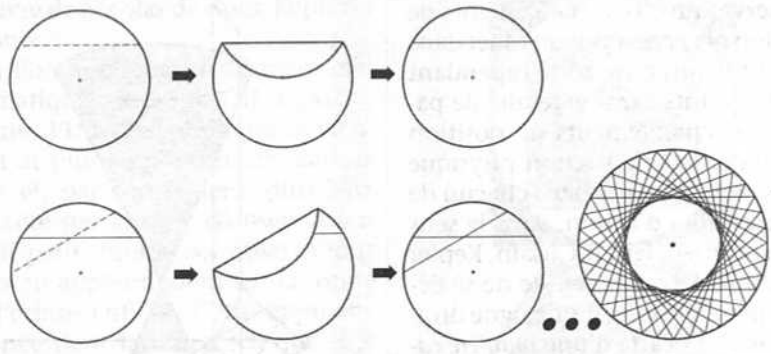
b) L'ellipse vue comme une « contraction » du cercle circonscrit, selon la direction de la perpendiculaire au grand axe. Le rapport  $pq : pq'$  reste le même quelle que soit la position de  $p$  sur le grand axe.

c) Construction d'une tangente à l'ellipse : tracez un cercle autour du foyer de rayon égal à la distance constante  $d + d'$ . La tangente à n'importe quel point  $q$  est obtenue en « pliant » le cercle de manière à ce que le point  $q'$  se retrouve sur le second foyer  $f'$ . Cette construction peut être « inversée » de manière à engendrer des ellipses et d'autres sections coniques comme « enveloppes » de lignes droites (voir texte et figure 1.9).

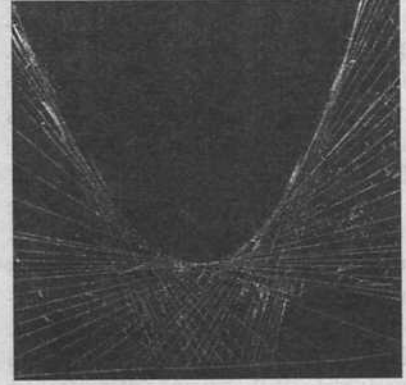
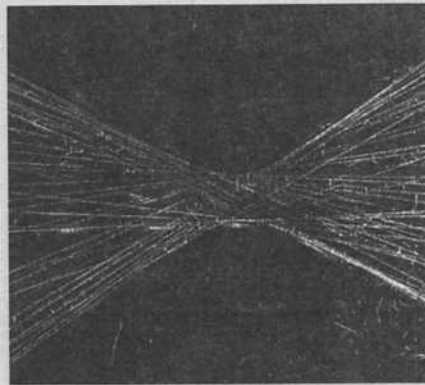
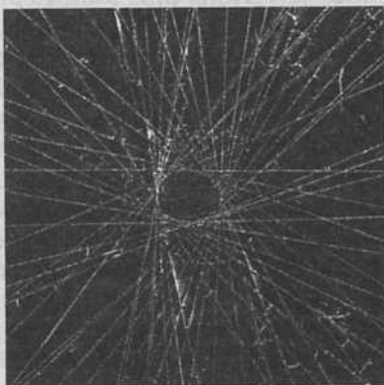
coniques, en réalisant la construction suivante.

Prenez une feuille de papier sulfurisé et tracez un cercle sur celle-ci (**Figure 1.8**). Repérez le centre du cercle. Pliez ensuite la feuille de manière à ramener la circonférence du cercle sur le point central, tout en marquant bien le pli. Dépliez le papier et recommencez en ramenant un autre point de la circonférence sur le centre. Recommencez en parcourant toute la circonférence (environ vingt-cinq fois). A la fin, vous pourrez observer un autre cercle enveloppé dans les plis du papier.

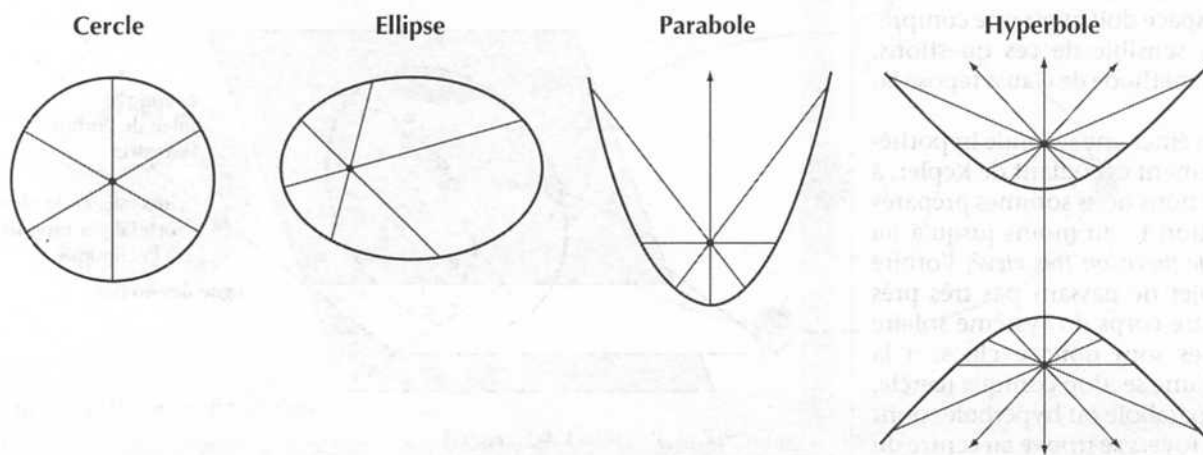
Prenez maintenant une autre



**Figure 1.8.** Pliage d'un cercle pour engendrer un autre cercle comme enveloppe des cordes.



**Figure 1.9.** Sections coniques engendrées comme enveloppes de lignes droites. De gauche à droite, ellipse, hyperbole et parabole.



**Figure 1.10.** La longueur de la droite tracée depuis le foyer jusqu'à la courbe change lorsqu'elle tourne, sauf dans le cas du cercle. Dans le cas d'une orbite planétaire, cette longueur est la distance de la planète au Soleil. Notez que le cercle et l'ellipse sont des courbes fermées alors que la parabole et l'hyperbole ne sont pas délimitées.

feuille et faites la même chose mais, cette fois-ci, en choisissant un point quelque peu éloigné du centre. A la fin de l'expérience, les plis enveloppent une ellipse pour laquelle le point est l'un des foyers (**Figure 1.9a**).

Répétez cette opération plusieurs fois en prenant chaque fois un point de plus en plus éloigné du centre. En prenant ensuite un point à l'extérieur du cercle, on obtient une hyperbole (**Figure 1.9b**). En procédant de

la même manière, avec une droite et un point, on obtient une parabole (**Figure 1.9c**).

Vous pouvez ainsi construire toutes les sections coniques comme des enveloppes de lignes. Pensez maintenant aux différentes courbures présentes dans chaque section conique et à la relation entre la courbure et la position du point (foyer).

Pour voir cela plus clairement, faites ce qui suit. Dans chacune des

constructions, tracez une ligne droite du foyer jusqu'à la courbe (**Figure 1.10**). Comment la longueur de cette ligne change-t-elle au fur et à mesure qu'elle tourne autour du foyer ? Comment ce changement évolue-t-il d'une courbe à une autre ?

Dans les sections suivantes, nous découvrirons comment ces relations géométriques reflètent l'ordonnement harmonique de l'Univers.

**Bruce Director**

## 2. KEPLER NOUS MET SUR LA VOIE

**Q**ue fit Gauss que les autres astronomes et mathématiciens de son époque ne firent pas, et qui a conduit ces derniers à faire des prévisions complètement fausses sur la trajectoire de la nouvelle planète ? Peut-être devrions-nous consulter le maître de Gauss, Johannes Kepler, pour obtenir de sa part quelques indices au sujet de ce mystère ?

D'abord, Gauss adopte l'hypothèse cruciale de Kepler selon laquelle *le mouvement d'un objet céleste est déterminé seulement par son orbite*, conformément aux principes intelligibles, et démontrés par Kepler, qui gouvernent tous les mouvements connus dans le système solaire. Dans la façon dont Kepler détermine le mouvement

orbital, aucune information n'est requise concernant la masse, la vitesse ou d'autres détails sur l'objet en lui-même. De plus, comme Gauss l'a démontré et comme nous allons le redécouvrir nous-mêmes, l'orbite et le mouvement orbital dans sa totalité peuvent être déduits de rien de plus que de la « courbure » interne de n'importe quelle portion de la courbe, aussi petite soit-elle.

Réfléchissez bien à cela. C'est ici que la science de Kepler, Gauss et Riemann se distingue *absolument* de celle de Galilée, Newton et Laplace. Les orbites et les changements d'orbite (qui dépendent à leur tour d'orbites d'ordre supérieur) sont *ontologiquement premiers*. La relation entre l'orbite képlérienne — en tant qu'exis-

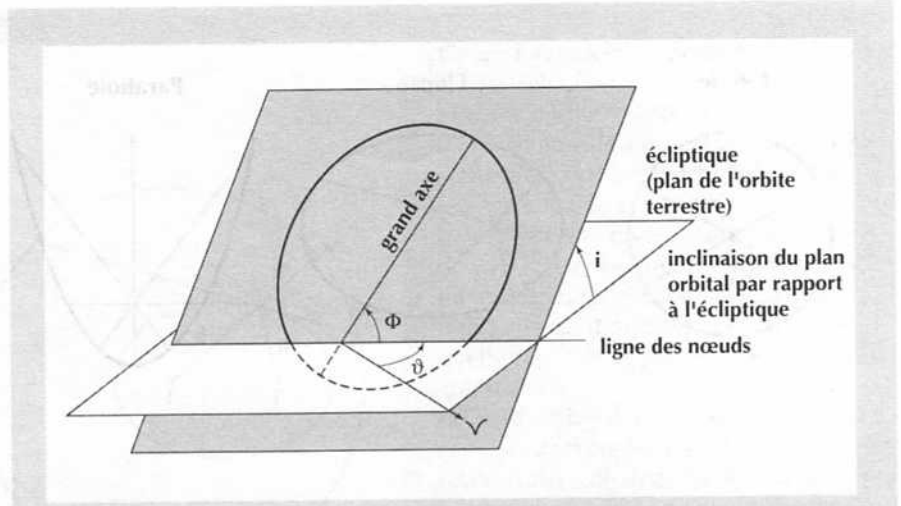
tence relativement « atemporelle » — et la série de positions successives du corps en orbite, est similaire à la relation entre une hypothèse et son réseau de théorèmes. De ce point de vue, nous pouvons dire que c'est l'orbite qui « déplace » la planète et non la planète qui crée l'orbite par son mouvement !

Si nous interférons avec le mouvement d'un objet en orbite, nous menons une action sur l'orbite dans son ensemble. Le résultat est un changement d'orbite et cela entraîne, à son tour, un changement dans le mouvement visible de l'objet que nous imputons à notre action. C'est ainsi que l'Univers fonctionne, et non par les « attractions-répulsions » bestiales de la physique du point masse de Sarpi

et Newton. Tout astronaute compétent qui veut réussir un rendez-vous dans l'espace doit avoir une compréhension sensible de ces questions. Toute la méthode de Gauss repose là-dessus.

Gauss émet une seconde hypothèse, également découlant de Kepler, à laquelle nous nous sommes préparés à la section 1 : au moins jusqu'à un niveau de précision très élevé, l'orbite d'un objet ne passant pas très près d'un autre corps du système solaire (les lunes sont donc exclues) a la forme d'une section conique (cercle, ellipse, parabole ou hyperbole) dont l'un des foyers se trouve au centre du Soleil. Dans de telles conditions, le mouvement d'un objet céleste est *entièrement déterminé* par un jeu de cinq paramètres, appelés par les astronomes les « éléments de l'orbite », et qui spécifient la forme et la position de l'orbite dans l'espace. A partir du moment où l'on connaît les « éléments » d'une orbite, et aussi longtemps que l'objet reste sur l'orbite spécifiée, on peut entièrement déterminer son mouvement pour tous les temps passé, présent et futur !

Gauss a montré comment les « éléments » de n'importe quelle orbite, et de ce fait l'ensemble du mouvement orbital lui-même, peuvent être déduits de rien de plus que de la courbure de n'importe quelle portion « arbitrairement petite » de l'orbite. Il a également démontré comment cette orbite peut être déduite — d'une manière tout à fait ingénieuse — des « intervalles » définis par seu-



**Figure 2.1.** On utilise un ensemble de trois angles pour spécifier l'orientation spatiale d'une orbite képlérienne donnée par rapport à l'orbite de la Terre. a) L'angle d'inclinaison  $i$  que le plan de l'orbite en question fait avec le plan de l'écliptique (le plan de l'orbite de la Terre). b) L'angle  $\Phi$  que le grand axe de l'orbite fait avec la ligne des nœuds (la ligne d'intersection entre le plan de l'orbite et le plan de l'écliptique). c) L'angle  $\vartheta$  que la ligne des nœuds fait avec un axe fixe  $n$  dans le plan de l'écliptique (on choisit généralement pour ce dernier, la direction de l'« équinoxe vernal »).

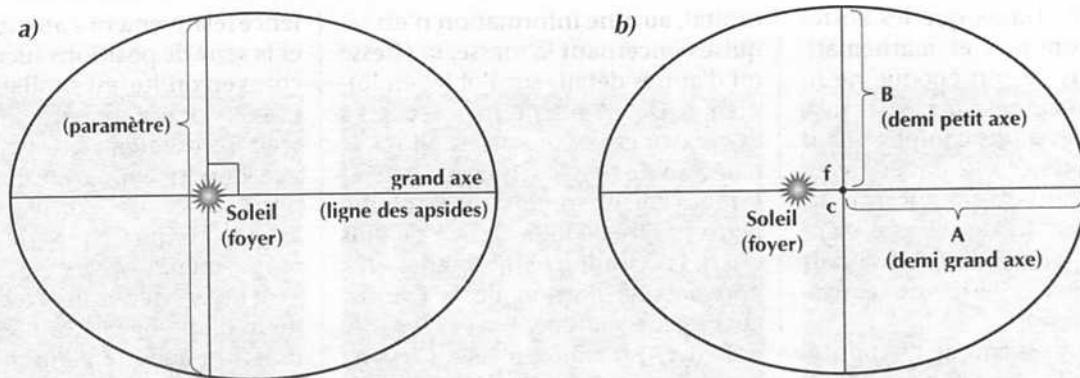
lement trois bonnes observations peu espacées des positions apparentes de l'objet depuis la Terre !

### Les « éléments » d'une orbite

Les éléments d'une orbite képlérienne elliptique sont les suivants :

- Deux paramètres déterminant la position du plan de l'orbite de l'objet par rapport au plan de l'orbite de la Terre, appelé « plan de l'écliptique » (Figure 2.1). Du fait que le Soleil est le foyer commun des deux orbites, les deux plans orbitaux se coupent selon une droite, appelée *ligne des nœuds*. La position relative des deux plans est déterminée seulement lorsque l'on connaît :

- (i) leur angle d'inclinaison com-



**Figure 2.2.** a) L'échelle relative de l'orbite peut être mesurée par la perpendiculaire à la ligne des apsides, la ligne passant par les foyers. Cette perpendiculaire est connue sous le nom de « paramètre » de l'orbite. b) L'excentricité est mesurée comme le rapport entre la distance  $f$  du foyer au centre de l'orbite (le point  $c$  est le point milieu du grand axe) et  $A$ , le demi grand axe. Dans le cas du cercle, le foyer et le centre coïncident et  $f = 0$  ; pour l'ellipse  $0 < f/A < 1$ .

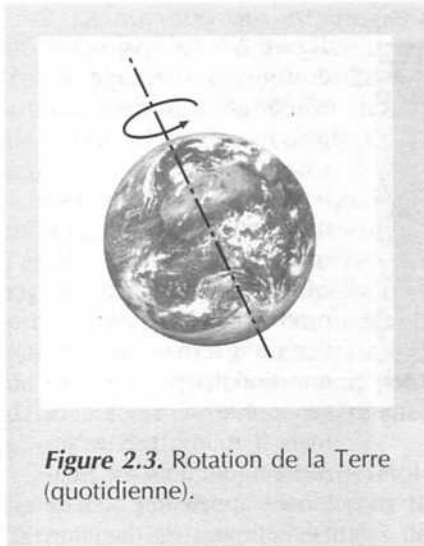


Figure 2.3. Rotation de la Terre (quotidienne).

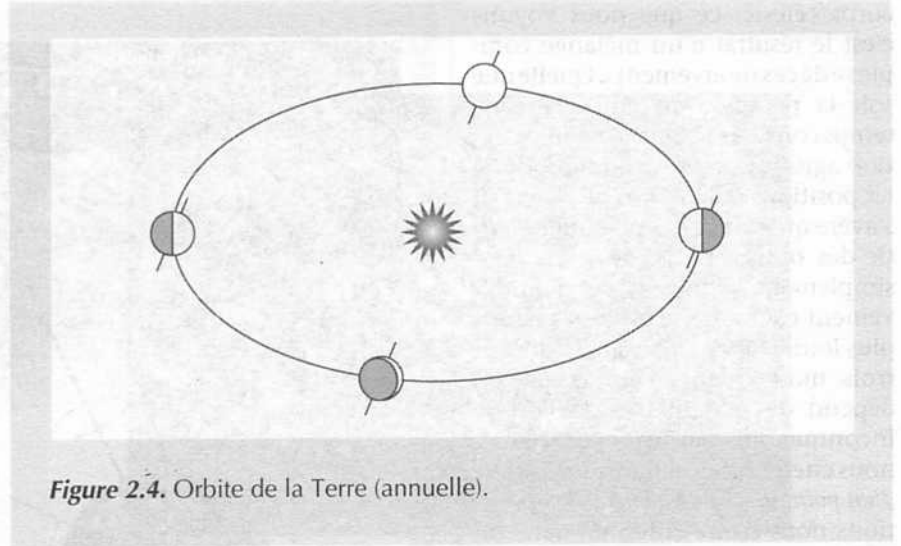


Figure 2.4. Orbite de la Terre (annuelle).

mun (c'est-à-dire l'angle entre les plans) ;

(ii) et l'angle entre la ligne des nœuds et un axe connu dans le plan de l'orbite de la Terre.

• Deux paramètres spécifiant la forme et l'échelle totale de l'orbite de l'objet (Figure 2.2). Il n'est pas nécessaire de rentrer ici dans les détails mais les paramètres les plus couramment utilisés sont :

(iii) pour l'échelle totale de l'orbite, telle que déterminée, par exemple, par sa largeur lorsqu'elle se trouve coupée par une perpendiculaire au grand axe passant par le foyer (le centre du Soleil) ;

(iv) pour la forme, un paramètre appelé *excentricité* que nous aborderons plus loin mais dont la valeur est 0 pour une orbite circulaire, entre 0 et

1 pour une orbite elliptique, 1 pour une orbite parabolique et supérieure à 1 pour une orbite hyperbolique. Plutôt que l'excentricité, on peut également utiliser le périhélie (c'est-à-dire la plus courte distance entre l'orbite et le centre du Soleil) ou son rapport au paramètre de largeur ;

• Enfin, nous avons :

(v) un paramètre spécifiant l'angle entre le grand axe de l'orbite de l'objet et la ligne des nœuds (Figure 2.1).

La totalité du mouvement de l'objet est déterminée par ces éléments de l'orbite et rien de plus. Si vous maîtrisez les principes de Kepler, vous pouvez calculer la position de l'objet pour n'importe quel instant du passé ou du futur. Tout ce que vous aurez besoin de connaître en plus des lois de Kepler et des cinq paramètres dé-

crits ci-dessus, c'est le moment où l'objet occupait (ou occupera) une position particulière sur l'orbite comme, par exemple, la position périhélicale. (Les astronomes incluent parfois dans la liste des éléments le dernier instant de passage au périhélie.)

Retournons maintenant en automne 1801, au moment où Gauss s'est intéressé à déterminer l'orbite d'un objet inconnu observé par Piazzi, avec seulement quelques mesures effectuées dans les semaines qui avaient précédé sa disparition dans l'éclat du Soleil matinal.

D'abord, le petit arc de quelques degrés que l'objet de Piazzi semblait décrire sur la sphère céleste n'était pas, bien sûr, son véritable trajet dans l'espace. En fait, les positions notées par Piazzi étaient le résultat d'une combinaison assez compliquée de mouvements. En effet, le mouvement apparent de n'importe quel objet céleste observé depuis la Terre est *principalement* la combinaison des trois processus, ou degrés d'action, suivants :

1. La rotation de la Terre sur son axe (rotation circulaire uniforme, période d'un jour). (Figure 2.3)

2. Le mouvement de la Terre sur son orbite képlérienne connue autour du Soleil (mouvement elliptique non uniforme, période d'un an). (Figure 2.4)

3. Le mouvement de l'objet sur une orbite képlérienne inconnue (mouvement non uniforme, période inconnue dans le cas d'une orbite elliptique, ou inexistante dans le cas d'une orbite parabolique ou hyperbolique). (Figure 2.5)

Ainsi, lorsque nous observons un

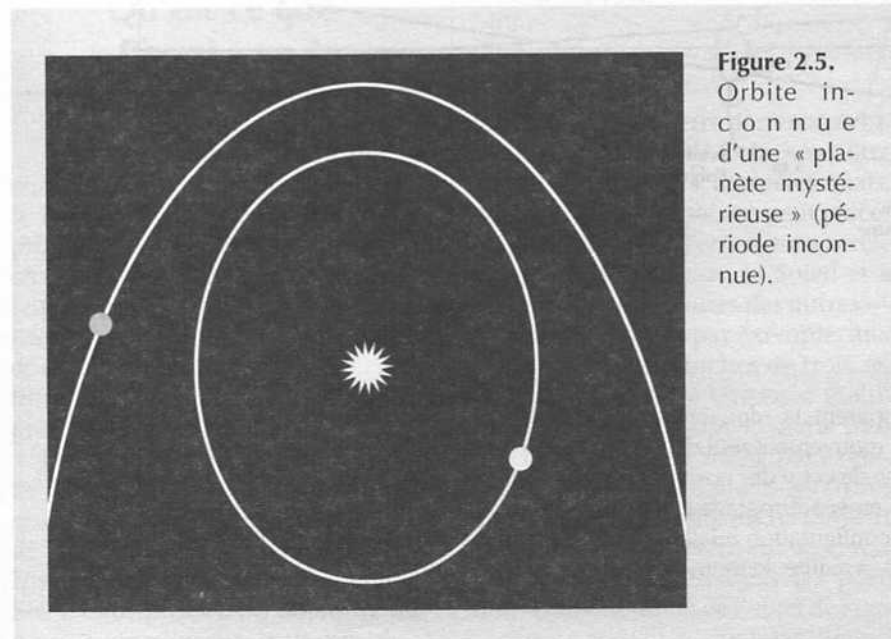


Figure 2.5. Orbite inconnue d'une « planète mystérieuse » (période inconnue).

corps céleste, ce que nous voyons c'est le résultat d'un mélange complexe de ces mouvements. Quelle que soit la petitesse de l'intervalle de temps considéré, ces trois degrés d'action agissent ensemble pour produire les positions apparentes de l'objet. Il s'avère qu'il n'est pas possible, à partir des observations, de « séparer » simplement les trois degrés du mouvement car, comme nous le verrons plus loin, la manière exacte dont ces trois mouvements sont combinés dépend des paramètres de l'orbite inconnue, qui est justement ce que nous cherchons à déterminer ! Ainsi, d'un point de vue déductif, nous pourrions nous croire enfermés dans un cercle vicieux sans espoir d'en sortir. Nous reviendrons sur ce point.

Bien que les principales caractéristiques du mouvement apparent soient le résultat du « triple produit » des deux mouvements elliptiques et du mouvement circulaire mentionnés ci-dessus, d'autres processus ont également un effet qui, bien que relativement plus petit, sont néanmoins mesurables sur le mouvement apparent. Pour ses prévisions précises, Gauss dut en particulier prendre en compte les effets connus suivants :

4. Le cycle de 25 700 ans de précession des équinoxes qui reflète un déplacement lent de l'axe de rotation de la Terre pendant la période d'observation (Figure 2.6). Le déplace-

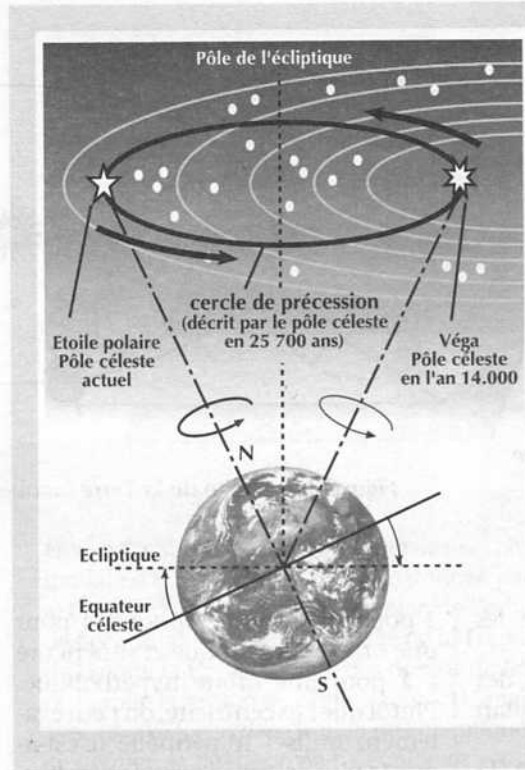


Figure 2.6. Précession des équinoxes (période de 25 700 ans). On identifie la précession comme un décalage graduel de la position apparente des étoiles à l'horizon, ainsi que comme un déplacement du pôle céleste. Ce phénomène se produit car l'axe de rotation de la Terre n'a pas une direction fixe par rapport à son orbite et aux étoiles mais il tourne très lentement autour d'un axe imaginaire appelé le « pôle de l'écliptique », la direction perpendiculaire au plan de l'écliptique.

ment angulaire de l'axe de la Terre pendant une seule année provoque un déplacement dans la position apparente des objets observés de l'ordre de dizaines de secondes d'arc (dépendant de leur inclinaison par rapport à l'équateur céleste), qui est beaucoup plus grand que la marge de précision dont Gauss avait besoin. (A l'époque de Gauss, les astronomes mesuraient

en général des positions apparentes d'objets dans le ciel avec une précision de l'ordre de la seconde d'arc, ce qui correspond à 1/1 296 000 d'une rotation complète sur un cercle. Rappelons qu'un cercle correspond à 360°; que 1° = 60 min d'arc; que 1 min = 60 sec d'arc. Gauss travaille toujours avec des précisions de l'ordre du millionième ou mieux.)

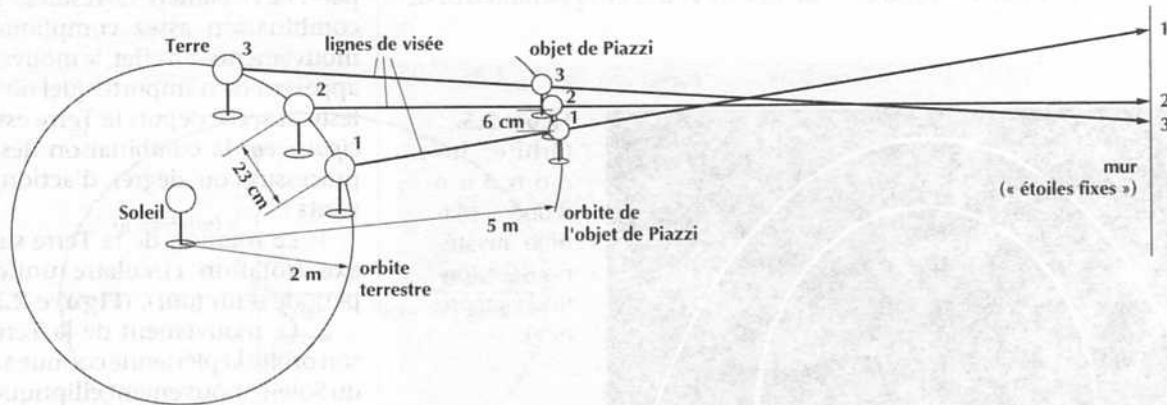


Figure 2.7. Paradoxes du mouvement apparent. Le mouvement apparent de Cérès, tel qu'il est vu de la Terre (positions 1, 2 et 3 sur le mur) est très différent du mouvement réel de Cérès sur son orbite. Sur l'exemple représenté ici, l'ordre des points 1, 2 et 3 sur le mur est l'inverse de celui des positions réelles. Ainsi, vu de la Terre, Cérès semble se déplacer en arrière ! L'apparence bizarre de mouvement rétrograde et de « boucle » est due au différentiel entre les mouvements de la Terre et de Cérès, combiné à leur configuration relative dans l'espace, le mouvement de la Terre est plus rapide que celui de Cérès (voir figure 2.8). Dans la réalité, le mouvement apparent est compliqué par le fait que les deux corps ne se déplacent pas dans le même plan.

5. La nutation qui est un petit décalage périodique de l'axe de la Terre, surimposé au cycle de 25 700 ans de précession des équinoxes, et lié principalement à l'orbite de la Lune.

6. L'aberration qui est un léger décalage de la direction apparente de l'étoile ou la planète observée par rapport à la « véritable » direction et provoqué par la combinaison des effets de la vitesse de la lumière finie et de la vitesse de l'observateur, pendant le temps que la lumière met pour l'atteindre.

7. Les positions apparentes des étoiles et des planètes, vues depuis la Terre, sont également modifiées de manière significative par la diffraction de la lumière dans l'atmosphère qui courbe les rayons lumineux provenant de l'objet observé et décale sa position apparente d'un rapport plus ou moins grand en fonction de son angle par rapport à l'horizon. Gauss supposa que Piazzi, en tant qu'astronome expérimenté, avait déjà fait les corrections nécessaires pour la diffraction dans ses mesures reportées. Néanmoins, Gauss dut accorder une certaine marge d'erreur aux mesures de Piazzi, à cause de l'imprécision des appareils optiques, de la détermination du temps, etc.

Pour finir, en plus des temps exacts et des positions observées pour l'objet dans le ciel, Gauss eut également besoin de connaître la position géographique exacte de l'observatoire de Piazzi sur la surface de la Terre.

## Qu'est-ce que Piazzi a vu ?

Admettons pour l'instant que les complications créées par les effets 4, 5, 6 et 7 posent essentiellement des problèmes de nature technique et ne changent rien à ce que Gauss appelait « le nerf de ma méthode ». Focalisons-nous d'abord sur la manière dont les trois principaux degrés d'action 1, 2 et 3 se combinent pour produire l'effet observé.

Dans un but pédagogique, essayez de reproduire l'expérience suivante qui nécessite simplement une grande pièce et des tables. (Figures 2.7) Installez un objet qui représentera le Soleil et disposez trois objets de manière à représenter trois positions

successives de la Terre dans son orbite autour du Soleil. Cela peut être réalisé de plusieurs manières mais, pour un premier essai, on peut placer les positions de la Terre sur un cercle d'environ 2 m autour du Soleil et à environ 23 cm les uns des autres — ce qui correspond, par exemple, aux positions des dimanches de trois semaines successives. Disposez maintenant trois autres objets à une plus grande distance du Soleil, par exemple à 5 m, et séparés les uns des autres de 6 à 7 cm. Ces positions ne doivent pas être nécessairement sur un cercle parfait. Elles représentent les positions hypothétiques de l'objet de Piazzi correspondant aux mêmes diman-

ches successifs que ci-dessus.

Pour bien visualiser l'effet souhaité, le meilleur choix à faire pour les « objets célestes », est de prendre des petites sphères colorées ou des perles de diamètre de 1 cm ou moins, montées à l'extrémité de petits bâtons plantés sur des supports fixes placés sur une table.

Observez alors de chacune des positions de la Terre, les positions hypothétiques de l'objet de Piazzi correspondantes et placez derrière ces derniers un tableau ou une feuille accrochée sur le mur opposé. Imaginez que ce mur représente une portion de la sphère céleste, ou la « sphère des étoiles fixes ». Marquez sur le

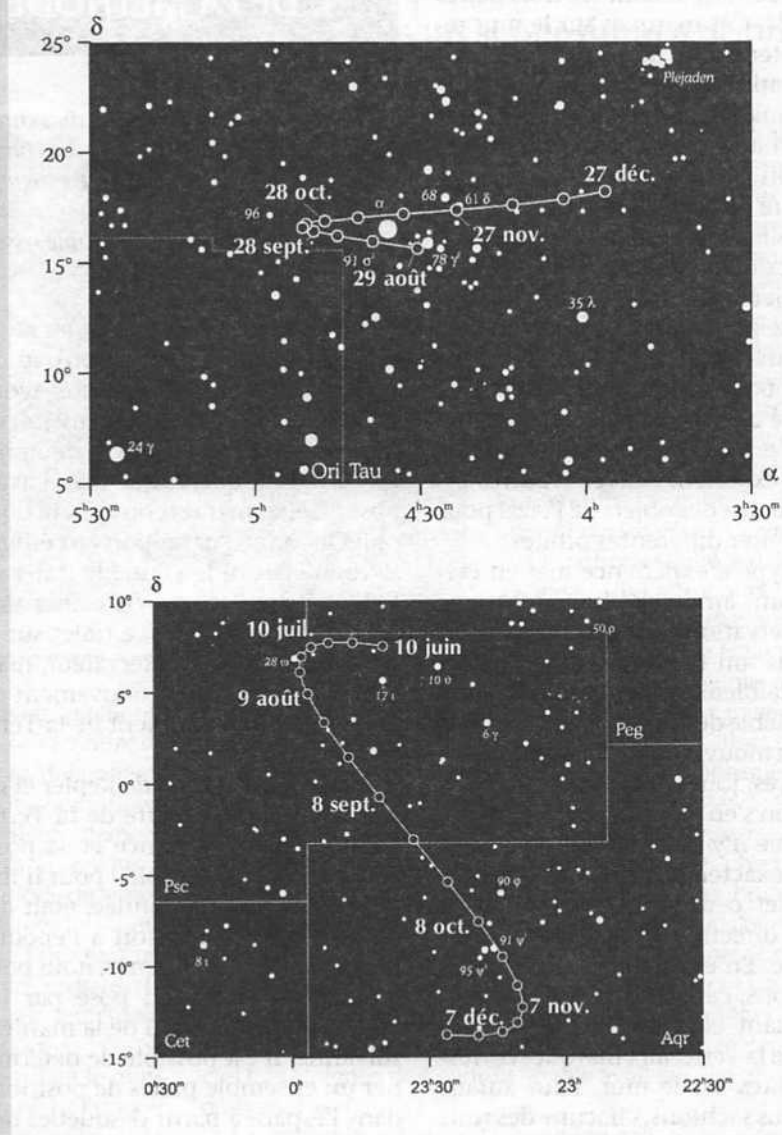


Figure 2.8. Mouvement rétrograde apparent pour Cérés (en haut) et Pallas (en bas), en 1998.

mur les points qui se trouvent sur les lignes de visée reliant les trois paires d'objets. Ces marques sur le mur représentent les « données » des trois observations de Piazzi en tant que positions apparentes des objets par rapport à la sphère des étoiles fixes, ces trois observations étant supposées être effectuées trois dimanches successifs. En reproduisant l'expérience avec différentes positions relatives des objets, nous pouvons voir comment se produisent les phénomènes de mouvement rétrograde apparent et de « boucle » (en fait, Piazzi avait observé un mouvement rétrograde). (Figure 2.8) On peut réaliser différentes expériences avec d'autres arrangements des objets de Piazzi pour représenter différentes orbites.

Ce type d'expérience met en évidence une ambiguïté frappante dans les observations. Ce que Piazzi avait vu dans son télescope n'était qu'un point faiblement lumineux, à peine discernable des étoiles fixes si ce n'est par son mouvement par rapport à ces dernières, jour après jour.

Si l'on s'en tient aux observations, il semble n'y avoir aucun moyen de savoir exactement à quelle distance cet objet peut se trouver, ni selon quelle direction il se déplace dans l'espace. En effet, tout ce dont nous disposons, ce sont trois lignes de visée reliant chacune des trois positions de la Terre, aux marques correspondantes sur le mur. Pour autant que nous sachions, chacune des trois positions de l'objet de Piazzi peut se trouver n'importe où sur la ligne de visée correspondante ! Nous connaissons les *intervalles de temps* entre les positions que nous observons (il s'agit ici d'une période d'une semaine), mais à quoi cela peut-il nous servir ? Ces durées ne nous disent pas par elles-mêmes à quelle vitesse l'objet se déplace réellement, s'il est proche ou lointain et s'il s'éloigne ou se rapproche.

Quel que soit le bout par lequel on prend le problème, il ne semble y avoir aucun moyen de déterminer ses positions dans l'espace d'une manière déductive, à partir des observations. Mais n'avons-nous pas oublié ce que Kepler nous a enseigné sur la primauté de l'orbite par rapport aux mouvements et aux positions ?

Gauss ne l'avait pas oublié et nous découvrirons sa solution dans les sections qui suivent.

Jonathan Tennenbaum

### 3. DE LA MÉTHODE, PAS DU TÂTONNEMENT

« Dans des investigations du genre de celle qui nous occupe, il ne faut pas tant se demander comment les choses se sont passées, qu'étudier en quoi elles se distinguent de tout ce qui est arrivé jusqu'à présent. »

C. Auguste Dupin,

dans *Le double assassinat de la rue Morgue* d'Edgar Allan Poe.

Tout en ayant à l'esprit les paroles de Dupin, revenons au dilemme sur lequel nous avons buté au cours de notre discussion de la section précédente. Ce dilemme est lié au fait que ce que Piazzi avait observé en tant que mouvement d'un objet inconnu par rapport aux étoiles fixes, n'était ni le véritable trajet de l'objet dans l'espace ni même une simple projection de ce trajet sur la sphère céleste de l'observateur, mais plutôt le résultat du mouvement de l'objet et du mouvement de la Terre pris ensemble.

Grâce aux travaux de Kepler et de ses successeurs, l'orbite de la Terre, comprenant sa distance et sa position par rapport au Soleil pour n'importe quel jour de l'année, était déterminée avec précision à l'époque de Gauss. En conséquence, nous pouvons énoncer le défi posé par les observations de Piazzi de la manière suivante : il est possible de déterminer un ensemble précis de positions dans l'espace à partir desquelles ont été effectuées les observations de Piazzi, compte tenu du mouvement pro-

pre de la Terre. Nous pouvons tracer, pour chacune de ces positions, une ligne de visée dans la direction selon laquelle Piazzi a vu l'objet à ce moment-là. Tout ce que nous est permis de dire avec certitude à propos des véritables positions de l'objet inconnu à l'instant donné, c'est que chaque position se trouve *quelque part* le long de la ligne droite correspondante. Qu'allons-nous faire ?

Face à une ambiguïté aussi manifeste, toute tentative de « faire coller une courbe » échoue. En effet, nous n'avons aucune position bien définie à partir de laquelle on pourrait faire « coller » une orbite ! Toutefois, n'avons-nous pas *quelque chose* de plus qui pourrait nous aider ? Après tout, Kepler nous a appris que les *formes géométriques des orbites* sont (au moins jusqu'à un certain niveau élevé de précision) des sections coniques planes, ayant comme foyer commun le centre du Soleil. Kepler nous a également légué un ensemble de contraintes cruciales (que nous examinerons à la section 7) qui déterminent le mouvement précis sur n'im-

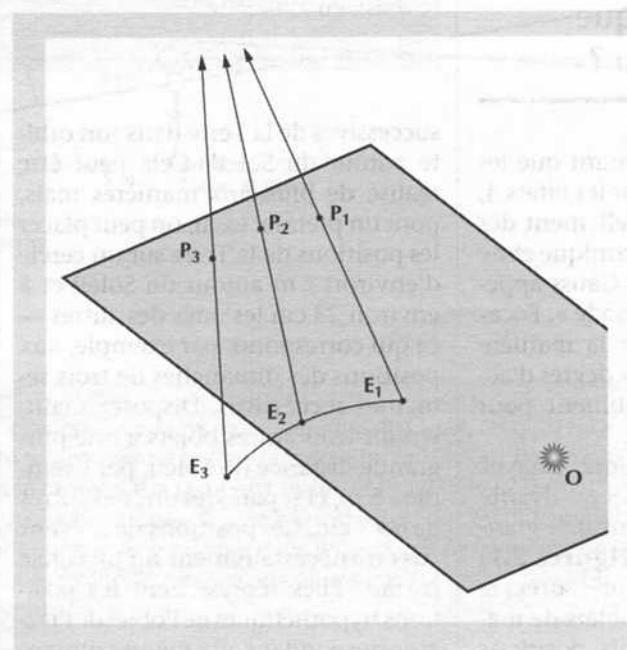


Figure 3.1.

Les observations de Piazzi définissent trois « lignes de visée » depuis trois positions de la Terre  $E_1, E_2, E_3$ , mais ne nous indiquent pas où se trouve la planète sur ces lignes. Nous savons par contre que ces positions se trouvent sur un plan passant par le Soleil.

## Carl Gauss : « Déterminer l'orbite d'un corps céleste sans supposition *a priori* »

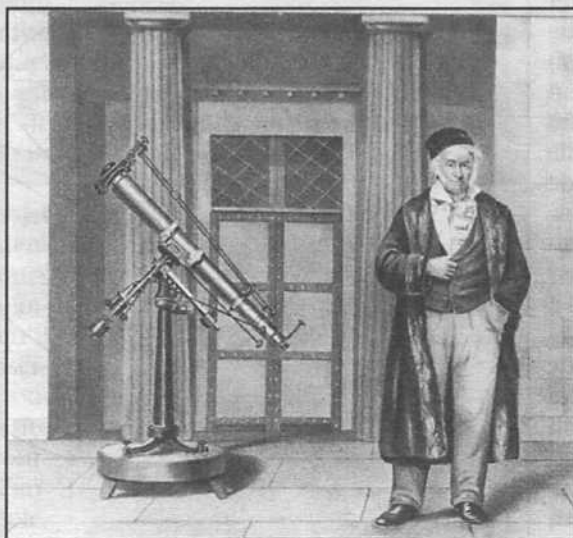
Extrait de la préface de la *Théorie du mouvement des corps célestes se déplaçant dans le voisinage du Soleil selon des sections coniques* de Gauss.

Il semble un peu étrange que le problème général — déterminer l'orbite d'un corps céleste sans supposition *a priori*, à partir d'observations ne couvrant pas une large période de temps et sans faire un choix ayant pour but d'appliquer des méthodes de calcul particulières — ait été presque totalement négligé jusqu'au début de ce siècle ;

ou, du moins, n'ait été traité par personne avec l'attention que réclamait son importance, alors qu'il se recommandait de lui-même aux mathématiciens par sa difficulté et son élégance, même si sa grande utilité dans la pratique n'était pas apparente. Une opinion a universellement prévalu, selon laquelle une détermination complète à partir d'observations couvrant une petite période de temps était impossible — une opinion sans fondement — alors qu'il est maintenant clairement établi que l'orbite d'un corps céleste peut être pratiquement déterminée à partir de quelques bonnes observations effectuées sur seulement quelques jours, et ce sans supposition *a priori*.

Il m'est venu à l'esprit quelques idées pendant le mois de septembre 1801, [alors que j'étais] engagé à l'époque sur un sujet très différent, qui semblèrent m'indiquer la solution du problème important dont je viens de parler.

Dans de telles circonstances — par peur d'être entraîné trop loin par un problème séduisant — il n'est pas rare que nous rejetions certaines associations d'idées qui, avec un peu plus d'attention, se seraient avérées fructueuses en donnant un résultat qui, sans elles, aurait été perdu par négligence. Et le même destin peut échoir aux concepts



qui n'auront pas eu la chance de se présenter à un moment propice permettant de les sélectionner. A cette époque-là, l'annonce de la découverte de la nouvelle planète, le 1er janvier de cette année, avec le télescope de Palerme, était le sujet de toutes les conversations ; et peu de temps après furent publiées les observations effectuées par le distingué astronome Piazzi entre la date citée ci-dessus et le 11 février.

On ne trouve nulle part dans les annales de l'astronomie une aussi grande opportunité de montrer de manière éclatante la valeur de ce problème — et

une plus grande opportunité semble difficile à imaginer — que dans cette crise et cette nécessité urgente, alors que tout espoir de découvrir dans les cieux, après presque un an, cet atome de planète parmi d'innombrables petites étoiles, ne reposait que sur une connaissance assez approximative de son orbite basée sur ces quelques observations. Aurais-je jamais pu trouver de meilleure opportunité pour tester la valeur pratique de mes conceptions que là, en les utilisant pour déterminer l'orbite de la planète Cérés qui, pendant ces quarante-et-un jours, avait décrit un arc géométrique de seulement trois degrés et qui, après qu'un an se soit écoulé, devrait être cherchée dans une région du ciel très éloignée de l'endroit où elle avait été vue pour la dernière fois ?

La méthode fut pour la première fois appliquée en octobre 1801, et la première nuit claire (le 7 décembre 1801), où la planète fut cherchée dans la direction qui en résultait, rendit le fugitif à ses observateurs. Trois autres nouvelles planètes furent ensuite découvertes, ce qui donna de nouvelles opportunités pour examiner et vérifier l'efficacité et la généralité de la méthode.

[Souligné dans l'original.]

porte quelle orbite, à partir du moment où sont connus les « éléments » de l'orbite présentés à la section précédente.

Malheureusement, les observations de Piazzi ne nous donnent même pas le *plan* dans lequel se trouve l'orbite de l'objet. Comment allons-nous le trouver ?

Considérez un plan arbitraire passant par le Soleil. Les lignes de visée des observations de Piazzi vont l'intersecter suivant un certain nombre de points tels que chacun d'entre eux

est un candidat pour la position de l'objet à l'instant considéré. Essayez ensuite de construire une section conique, avec pour foyer le Soleil, passant par ces points ou au moins le plus près possible d'eux... Hélas ! Nous sommes en train d'essayer de faire « coller » une courbe ! (Figure 3.1)

Pour finir — et c'est là qu'apparaît un aspect nouveau important — vérifiez si les intervalles de temps, définis par un mouvement képlérien le long de la section conique en ques-

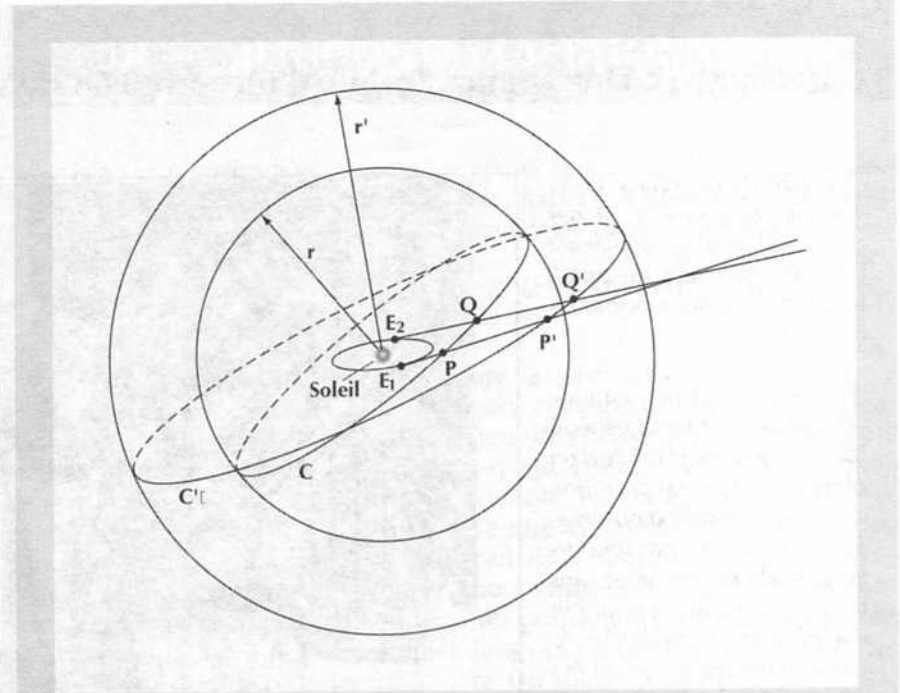
tion entre les points donnés, sont en accord avec les intervalles de temps réels des mesures de Piazzi. S'ils ne conviennent pas — ce qui est presque toujours le cas — alors nous devons rejeter cette orbite. Par exemple, si les points d'intersection sont très éloignés du Soleil, alors le mouvement devra, à cause des contraintes de Kepler, être très lent sur l'orbite correspondante ; au-delà d'une certaine distance, les intervalles de temps correspondants seront plus grands que les durées réelles séparant les obser-

vations de Piazzi. Par contre, si les points sont très proches du Soleil, le mouvement sera trop rapide pour s'accorder avec les temps de Piazzi.

La considération des intervalles de temps nous permet ainsi de délimiter quelque peu une zone de recherche, mais le domaine des solutions possibles demeure malgré cela monstrueusement grand. A part Gauss, tous les astronomes se sentirent obligés de faire des suppositions *a priori* afin de réduire fortement l'étendue des possibilités et de limiter ainsi au minimum le nombre de leurs essais au hasard.

L'astronome Wilhelm Olbers et d'autres décidèrent, par exemple, de partir de l'hypothèse de travail selon laquelle l'orbite recherchée serait pratiquement circulaire, cas dans lequel le mouvement deviendrait particulièrement simple. La troisième contrainte de Kepler (appelée souvent « Troisième Loi ») détermine une valeur spécifique de mouvement uniforme sur un cercle à partir du moment où le rayon de l'orbite circulaire est connu. Selon cette troisième contrainte, le carré de la période de temps d'une orbite circulaire fermée (c'est-à-dire circulaire ou elliptique) mesurée en années est égal au cube du grand axe de l'orbite mesuré en unité astronomique (une unité astronomique est égale au grand axe de l'orbite terrestre). Olbers prit ensuite deux mesures de Piazzi et calcula le rayon qu'une orbite circulaire devrait avoir pour être en accord avec ces deux observations.

Il est facile de voir comment procéder selon ce principe : les deux observations définissent deux lignes de visée, chacune ayant pour origine la position de la Terre au moment de l'observation. Imaginez une sphère de rayon variable  $r$  centrée sur le Soleil (**Figure 3.2**). Pour chaque choix de  $r$ , cette sphère va intersecter les lignes de visée en deux points P et Q. Ayant supposé que la planète se déplacerait selon une orbite circulaire de rayon  $r$ , les points P et Q seraient les deux positions correspondant aux deux instants des deux observations, et l'orbite serait le grand cercle de la sphère passant par ces deux points. Par ailleurs, les contraintes de Kepler nous permettent de savoir exactement quelle serait la taille de l'arc que devrait parcourir n'importe quelle planète pendant l'intervalle entre les deux observations, si son orbite était



**Figure 3.2.** Méthode pour déterminer l'orbite de Cérès dans l'hypothèse où cette orbite serait circulaire. Deux observations de Cérès définissent deux lignes de visée venant de deux positions de la Terre  $E_1$  et  $E_2$  (les positions de la Terre au moment des observations). Une sphère de rayon  $r$  et ayant pour centre le Soleil intersecte les lignes de visée en deux points P et Q, qui se trouvent sur un unique grand cercle C de cette sphère. Une sphère avec un rayon différent  $r'$  définirait deux autres points P' et Q' et une différente orbite hypothétique C'. Déterminez la valeur unique de  $r$  pour laquelle la taille de l'arc PQ serait en accord, selon les lois de Kepler, avec le mouvement qu'une planète aurait réellement en se déplaçant sur l'orbite circulaire C pendant l'intervalle de temps entre les deux observations.

un cercle de rayon  $r$ . Comparez ensuite l'arc déterminé à partir des contraintes de Kepler avec l'arc réel entre P et Q lorsque la longueur du rayon  $r$  varie, et relevez la ou les valeurs de  $r$  pour lesquelles les deux coïncident. Cette détermination peut être aisément traduite sous forme d'une équation mathématique dont la résolution numérique ne pose pas de problème particulier. Ayant ainsi trouvé une orbite circulaire qui « collait » avec deux observations, Olbers fit des comparaisons avec d'autres mesures pour corriger son orbite initiale.

A travers toute l'Europe, vers la fin de l'année 1801, des astronomes commencèrent à chercher l'objet que Piazzi avait observé aux mois de janvier et février, en se basant sur des approximations du type de celle d'Olbers. En vain ! Gauss publia en décembre de la même année son hypothèse sur l'orbite de Cérès reposant sur sa propre

méthode de calcul d'un type complètement nouveau. Selon les calculs de cette méthode, l'objet se trouverait à plus de  $6^\circ$  au sud des positions prévues par Olbers, un angle énorme en astrophysique. Peu de temps après, l'objet fut trouvé très près de la position prévue par Gauss.

Contrairement à toutes les autres, la méthode de Gauss n'utilisait aucun procédé d'essais au hasard. Sans émettre aucune supposition *a priori* sur la forme particulière de l'orbite et en n'utilisant que trois mesures bien choisies, Gauss parvint à construire immédiatement une bonne première approximation de l'orbite, puis l'améliora sans aucune observation supplémentaire jusqu'à un degré de précision tel qu'il rendit possible la redécouverte de l'objet de Piazzi.

Pour réussir cela, Gauss considéra l'ensemble des observations (comprenant aussi bien les temps que les positions apparentes) comme étant

un ensemble d'intervalles harmoniques. Même si les mesures s'enchevêtraient — et c'était le cas — avec des effets de projection le long de lignes de visée et le mouvement de la Terre, nous devons partir du fait que la courbure sous-jacente, déterminant une orbite entière à partir de n'importe quel segment arbitrairement petit, est d'une certaine manière exprimée de façon légitime dans un tel réseau d'intervalles.

Pour déterminer l'orbite de l'objet de Piazzi, nous devons arriver à identifier les caractéristiques spécifiques qui révèlent l'orbite dans son ensemble à partir, pour ainsi dire, de ce qu'il y a « entre les intervalles » des observations et qui la distinguent de toutes les autres orbites. Cela nécessite que nous conceptualisions la courbure supérieure sous-jacente à l'ensemble de la variété des orbites képlériennes. En fait, cette courbure supérieure ne pouvait pas être exprimée de manière adéquate à partir du type de fonctions mathématiques qui existaient avant le travail de Gauss.

Nous pouvons éclairer quelque peu

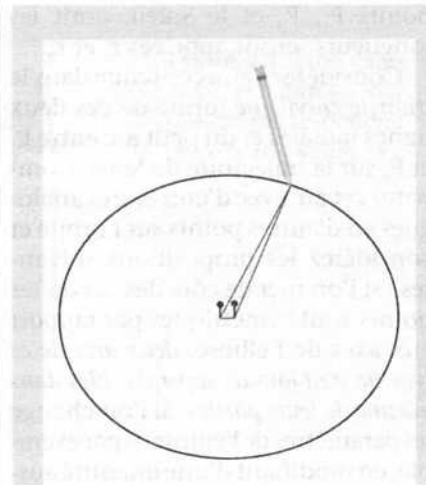


Figure 3.3. Construction d'une ellipse de la forme de l'orbite de Mars.

ces questions à partir de la recherche expérimentale élémentaire en géométrie que nous allons maintenant décrire. En utilisant la méthode habituelle de la ficelle et des deux clous, construisez une ellipse ayant la for-

me de l'orbite de Mars de la manière suivante (Figure 3.3). Plantez deux clous distants de 5,6 cm l'un de l'autre, dans une planche lisse recouverte par un papier blanc. Prenez un bout de ficelle de 60 cm et fixez chacune de ses extrémités à un clou (vous pouvez également faire une boucle avec la ficelle de  $60 + 5,6 = 65,6$  cm et la disposer autour des deux clous). Tendez la boucle avec la pointe d'un crayon et tracez l'ellipse comme cela est indiqué. Les positions des deux clous représentent les foyers. La courbe tracée est une représentation à l'échelle de l'orbite de Mars avec le Soleil à l'un des foyers.

Vous remarquerez que la courbe est difficile à distinguer d'un cercle à l'œil nu. En effet, marquez le point milieu de l'ellipse (qui est le milieu du segment des deux foyers), et comparez les distances de plusieurs points de la circonférence au centre. Vous trouverez une dispersion maximale de l'ordre de seulement 1 mm (1,3 mm pour être plus précis) entre la distance maximum (la distance entre les deux extrémités du grand

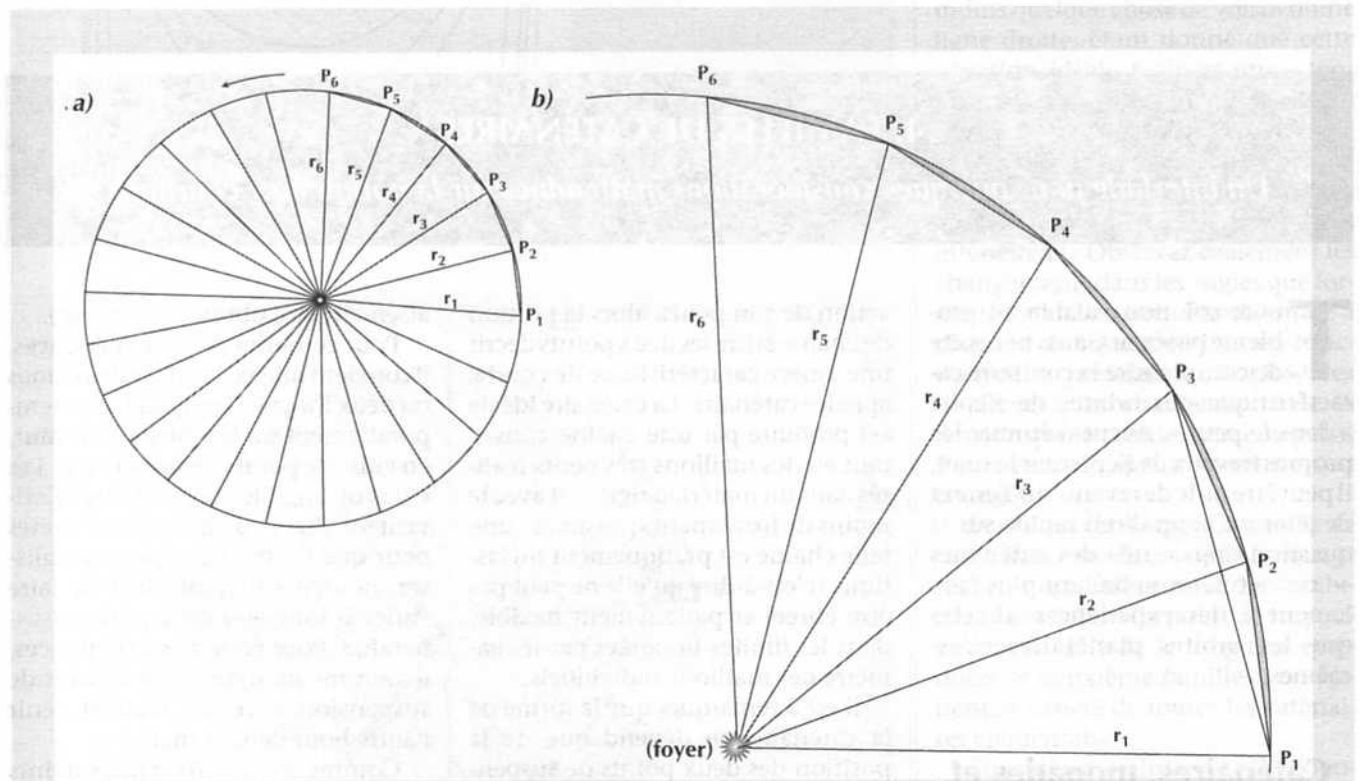


Figure 3.4. a) Les positions de Mars sur son orbite autour du Soleil à des intervalles égaux d'environ trente jours. Remarquez que les arcs orbitaux sont plus longs quand Mars est plus proche du Soleil (mouvement rapide) et plus courts quand Mars est plus loin (mouvement lent), de manière à ce que les aires des secteurs orbitaux correspondant soient égales (la « loi des aires » de Kepler). b) Vous pouvez voir sur cet agrandissement de l'orbite de Mars les petites aires séparant les cordes et les arcs orbitaux et reflétant la courbure de l'orbite sur un intervalle donné. Ces aires changent de taille et de forme d'une portion d'orbite à la suivante, ce qui reflète un changement permanent de courbure.

axe) et la distance minimum (la distance entre les deux extrémités du petit axe). Ainsi, la différence entre l'ellipse et un cercle parfait n'est de l'ordre que de quatre pour mille. Comment Kepler fut-il capable de détecter et de prouver la non-circularité de la forme de l'orbite de Mars compte tenu d'une aussi petite différence, et comment put-il déterminer avec certitude la nature exacte de cette forme non circulaire sur la base de la technologie disponible à son époque ?

Remarquez sur la **figure 3.4a** que la distance par rapport au Soleil (le foyer repéré), *change de manière sensible* lorsque l'on se déplace le long de l'ellipse.

Choisissez ensuite deux points  $P_1$  et  $P_2$  n'importe où sur la circonférence de l'ellipse à 2 cm l'un de l'autre. L'intervalle entre eux correspond à deux positions successives de Mars entre lesquelles s'est écoulée environ une semaine (en fait plus ou moins 10% de cette durée suivant l'endroit exact où se trouvent  $P_1$  et  $P_2$  par rapport au périhélie et à l'aphélie). Tracez des lignes radiales entre les

points  $P_1$ ,  $P_2$  et le Soleil, dont les longueurs seront appelées  $r_1$  et  $r_2$ .

Considérez l'aire contenue dans le *triangle curviligne* formé de ces deux lignes radiales et du petit arc entre  $P_1$  et  $P_2$  sur la trajectoire de Mars. Comparez cet arc avec d'autres arcs analogues en d'autres points sur l'orbite et considérez les propositions suivantes : si l'on met de côté des cas où les points sont symétriques par rapport aux axes de l'ellipse, *deux arcs de ce type ne sont jamais superposables dans aucune de leurs parties*. Si l'on change les paramètres de l'ellipse — par exemple, en modifiant d'une quantité aussi petite que l'on veut la distance entre deux foyers — alors *aucun* des arcs de la nouvelle ellipse, aussi petit soit-il, ne sera superposable à *aucun* des arcs de l'autre, dans aucune de leurs parties ! Chaque arc est donc caractéristique seulement de l'ellipse dont il fait partie. La même chose est vraie pour tous les types d'orbites képlériennes.

Considérez quels moyens pourraient être conçus pour reconstruire l'orbite dans son ensemble à partir de n'importe lequel de ces arcs. Quel

moyen, par exemple, permettrait de déterminer, à partir d'une petite portion de trajectoire planétaire, si elle appartient à une orbite parabolique, hyperbolique ou elliptique ?

Comparez ensuite l'arc orbital entre  $P_1$  et  $P_2$  avec le segment de droite reliant  $P_1$  et  $P_2$  (**Figure 3.4b**). Ces deux lignes délimitent ensemble une petite aire, virtuellement infinitésimale. A l'évidence, la caractéristique unique de l'orbite elliptique particulière doit être reflétée d'une certaine façon dans la *manière spécifique* par laquelle cet arc *diffère* de cette ligne, comme on peut le voir reflété dans l'aire « infinitésimale ».

Enfin, ajoutez un troisième point  $P_3$  et considérez les triangles curvilignes correspondant aux trois paires  $(P_1, P_2)$ ,  $(P_2, P_3)$  et  $(P_1, P_3)$  ensemble, ainsi que les triangles rectilignes correspondants et les aires « infinitésimales » qui les composent. Leurs relations harmoniques mutuelles et les intervalles de temps correspondants sont au cœur de la méthode de Gauss, à l'*exact opposé* de la « linéarisation dans le petit ».

Jonathan Tennenbaum

## 4. FAMILLES DE CATÉNAIRES

*Un interlude pour quelques considérations inattendues sur la notion de « courbure »*

Toute solution valable au problème posé par Gauss nécessite de comprendre la courbure caractéristique des orbites de Kepler « dans le petit ». Avant d'étudier les propres travaux de Kepler sur le sujet, il peut être utile de revenir sur Terre et de jeter un coup d'œil rapide sur la question apparentée des caténaires — ces dernières se prêtant plus facilement à des expériences directes que les orbites planétaires elles-mêmes.

### Caténaires, monades et un premier aperçu sur les fonctions modulaires

Lorsqu'une chaîne flexible est suspendue par deux points et qu'on la laisse prendre sa forme sous la seule

action de son poids, alors la portion de chaîne entre les deux points décrit une espèce caractéristique de courbe appelée caténaire. La caténaire idéale est produite par une chaîne consistant en des maillons très petits réalisés dans un matériau rigide, et avec le moins de frottements possibles ; une telle chaîne est pratiquement inélastique (c'est-à-dire qu'elle ne peut pas être étirée) et parfaitement flexible, dans les limites imposées par le diamètre des maillons individuels.

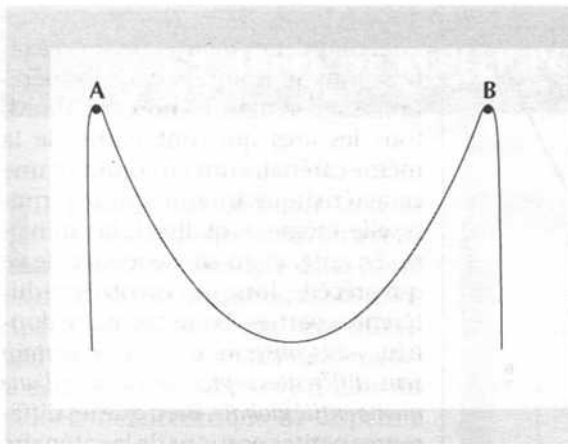
Il est à remarquer que la forme de la caténaire ne dépend que de la position des deux points de suspension et de la longueur de la chaîne entre ces points, mais pas de sa masse ni de son poids.

Faites les expériences suivantes en vous aidant d'une chaîne fine, suspendue parallèlement à un tableau ou un mur vertical et pas trop loin de celui-ci (de manière à ce que sa forme puisse

aisément être observée et tracée).

Pour certaines de ces expériences, il convient mieux d'utiliser deux clous ou deux longues épingles fixées temporairement sur le tableau ou le mur, en guise de points de suspension. Les clous ou aiguilles doivent être relativement fins et avec de petites têtes pour que les maillons puissent glisser, nous permettant ainsi de faire varier la longueur de la portion suspendue. Pour certaines expériences, il vaut mieux fixer un seul point de suspension avec un clou et tenir l'autre bout dans la main.

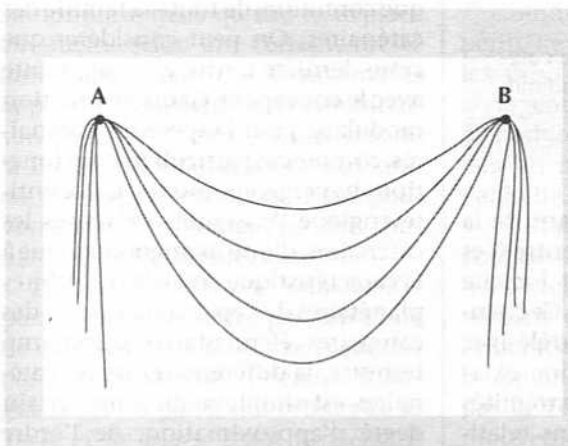
Commencez par fixer deux points de suspension quelconques pour une longueur de chaîne arbitraire (**Figure 4.1**). Observez à quel point la forme de chaque partie de la caténaire ainsi formée dépend de toutes les autres parties. Ainsi, si nous essayons de modifier n'importe quelle portion de la caténaire en la poussant de côté



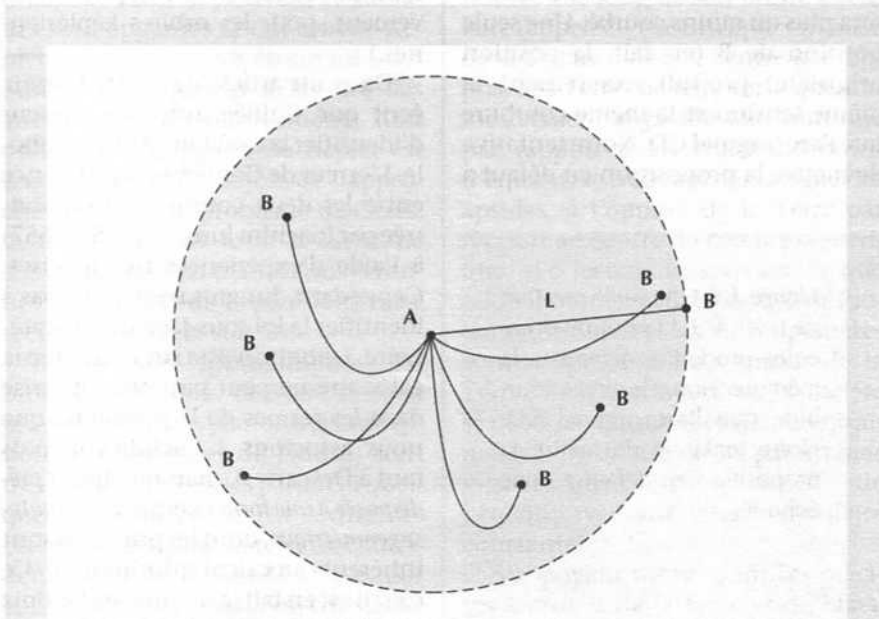
**Figure 4.1.** Une caténaire est formée par une chaîne suspendue entre deux points.

ou en avant avec le bout du doigt, nous pouvons voir que la courbe entière est affectée de manière sensible sur toute sa longueur. Ce comportement de la caténaire reflète le principe de moindre action élaboré par

Leibniz selon lequel l'Univers entier, y compris ses régions les plus éloignées, réagit à n'importe quel événement, dans toutes ses parties. Il n'existe pas d'action « isolée » entre deux points, contrairement à ce que disent



**Figure 4.2.** Varier la longueur de la chaîne permet d'engendrer une famille de caténaires de différentes courbures.



**Figure 4.3.** Varier un des points de fixation permet d'engendrer une seconde famille de caténaires.

les newtoniens.

Remarquez que la courbure de chaque élément de la caténaire change constamment lorsque l'on passe du point le plus bas au point le plus haut.

Construisez ensuite une famille de caténaires en maintenant les points de suspension inchangés mais en faisant varier la longueur de la chaîne entre ces points (**Figure 4.2**). Observez les changements dans la forme et dans la courbure ainsi que dans les angles que forme la chaîne avec l'horizontale à ses points de suspension, en fonction des variations de longueur.

Construisez une seconde famille de caténaires en gardant constante la longueur de la chaîne et en faisant varier seulement un des points de fixation (**Figure 4.3**). Si A est le premier point de suspension et L la longueur de la chaîne suspendue, alors le second point B (qu'il vaut mieux tenir à la main) peut se trouver n'importe où dans un cercle de centre A et de rayon L. Si B est sur la circonférence du cercle, alors la caténaire dégénère en une ligne droite. (Ou du moins quelque chose de voisin d'une ligne droite, étant donné que cette situation idéale requiert une « tension infinie », physiquement impossible, pour compenser les effets de la gravitation.) Observez les changements de forme lorsque B se déplace autour de A sur un cercle de rayon inférieur à L. Observez également les changements dans les angles que forme la caténaire avec l'horizontale à chacune de ses extrémités, en fonction de la position de B. Observez finalement les changements de la tension que la chaîne exerce au point B tenu en main, quand sa position est changée.

Examinez cette seconde famille de caténaires dans le cas où la longueur suspendue est très courte. En combinant la variation du point de suspension avec celle de la longueur (première et deuxième familles), on obtient la variété de toutes les caténaires élémentaires.

Considérez maintenant la proposition remarquable suivante : *tout arc de caténaire est lui-même une caténaire !* La preuve : prenez une caténaire donnée entre deux points de suspension A et B, examinez l'arc S délimité par deux points quelconques C et D de la courbe (**Figure 4.4a**). Plantez des clous à travers la chaîne en C et en

D sur le tableau. Remarquez que la forme de la chaîne reste inchangée. Si maintenant l'on retire les portions de la chaîne des extrémités, ou que l'on détache simplement les premières fixations A et B, alors la portion de la chaîne entre C et D sera suspendue entre ces deux points — donc sera une caténaire — tout en gardant la forme originale de l'arc S (**Figure 4.4b**).

Considérez ensuite une autre proposition remarquable : la totalité de la forme de la caténaire (jusqu'à ses points de fixation) est implicitement déterminée par n'importe lequel de ses arcs, aussi petit soit-il. Dans d'autres termes : si n'importe quel arc d'une caténaire, aussi petit soit-il, est congruent en taille et en forme à un arc d'une autre caténaire, alors les deux caténaires sont superposables sur la totalité de leurs longueurs. (Seuls les extrémités peuvent différer, comme lorsque nous avons remplacé A et B par C et D pour obtenir une sous-caténaire de la courbe originale.) Pour avoir un aperçu de la validité de cette proposition, essayez de la mettre en défaut par l'expérience qui suit.

Fixez l'une des extrémités de l'arc en question par un clou en C et marquez la position d'une autre extrémité, D, sur le mur ou le tableau derrière la chaîne (**Figure 4.5**). Prenez ensuite en main l'extrémité de la chaîne du côté de D, en B (B est à l'extrémité droite de la chaîne si D est à droite de C et vice versa), et essayez de déplacer cette extrémité de manière à ce que la caténaire correspondante (dont l'autre extrémité est C) passe toujours par D, comme on peut le vérifier grâce à la marque sur le tableau. En maintenant cette contrainte, on construit une famille de caténaires ayant pour points communs C

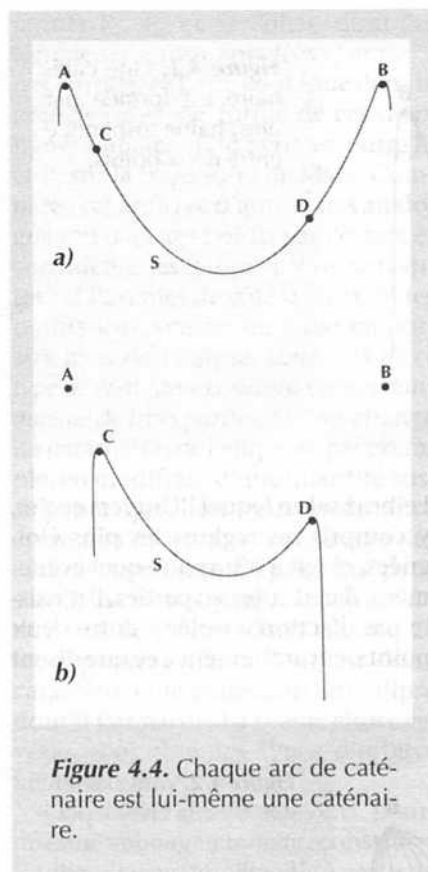


Figure 4.4. Chaque arc de caténaire est lui-même une caténaire.

et D. Observez, en procédant de la sorte, que la forme de l'arc entre C et D change continuellement lorsque l'extrémité mobile B change. Ce changement dans la forme est corrélé avec la constatation que la tension exercée par la chaîne sur ses extrémités change selon leurs positions relatives ; selon le niveau plus ou moins grand de tension, l'arc entre C et D sera plus ou moins courbé. Une seule position de B (en fait, la position originale) produit exactement la même tension et la même courbure que l'arc original CD. Notre tentative de mettre la proposition en défaut a

donc échoué.

Bien qu'elles mériteraient un examen plus approfondi, ces considérations suggèrent trois choses : d'abord, tous les arcs qui font partie de la même caténaire ont en commun une caractéristique interne qui détermine elle-même la totalité de la caténaire. Ensuite, et en conséquence de ce qui précède, lorsque l'on observe différentes parties d'une caténaire donnée, nous observons, dans un certain sens, différentes expressions locales d'une même entité globale. Bien que les différentes petites portions de la caténaire aient des courbures différentes du point de vue de la géométrie visuelle, elles partagent, dans un sens plus profond, la même « courbure supérieure » caractéristique de la caténaire dont elles font partie. Enfin, il doit exister un type de courbure encore supérieur qui définit la caractéristique commune de toute la famille des caténaires. On peut considérer que cette dernière entité est congruente avec le concept de Gauss de fonction modulaire pour l'espèce des caténaires, comme cas particulier de ses fonctions hypergéométriques. Cette entité englobe l'ensemble de toutes les caténaires, d'une manière analogue à la caractéristique cruciale des orbites planétaires de Kepler. (Dans le cas des caténaires élémentaires du champ terrestre, la différence entre les caténaires est simplement, à un certain degré d'approximation, de l'ordre d'une « autosimilarité scalaire ». Cela n'est pas le cas, même approximativement, pour les orbites képlériennes.)

Dans un article de 1691, Leibniz écrit que Galilée avait fait l'erreur d'identifier la caténaire à une parabole. L'erreur de Galilée, et la différence entre les deux courbes, fut démontrée par Joachim Jungius (1585-1657) à l'aide d'expériences très précises. Cependant, Jungius ne parvint pas à identifier la loi sous-jacente à la caténaire. Leibniz insista sur le fait que la caténaire ne peut pas être comprise dans les termes de la géométrie que nous associons à Euclide (ou plus tard à Descartes), mais qu'elle est prédisposée à une forme supérieure d'analyse géométrique, dont les principes sont inhérents au calcul infinitésimal. Ce calcul est en fait la réponse de Leibniz au défi que Kepler lança au monde des géomètres dans son *Astronomie Nouvelle* (*Astronomia Nova*) en 1609.

Jonathan Tennenbaum

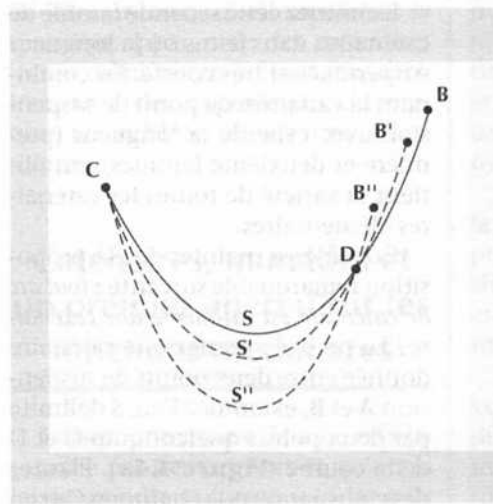


Figure 4.5. Une seule position de B (en fait, la position originale) produit exactement la même tension et la même courbure que l'arc original CD. Notre tentative de mettre la proposition en défaut a donc échoué.

