Les trois niveaux de mathématiques

JONATHAN TENNENBAUM

L'auteur retrace, de manière non conventionnelle, deux des grandes révolutions de l'histoire des mathématiques : celle opérée par Nicolas de Cues et l'autre par Georg Cantor.

Certains disent que le langage étant la base de la pensée, personne ne peut penser sans avoir recours à des mots. Sans examiner ce qu'il peut y avoir de vrai dans cette affirmation, il ne faut pas oublier que la langue change et évolue dans le temps. De nouvelles conceptions naissent quelque part dans les profondeurs de l'esprit humain et, plus tard, on leur donne un nom. Que se passe-t-il au niveau des langues mêmes ? Est-il possible que toute une langue puisse naître dans l'esprit d'une seule personne ?

Les toutes premières formes de langage parlé ne nous sont pas connues. Les observations astronomiques rapportées dans les hymnes védiques, qui furent chantés et transmis de génération en génération bien avant d'être transcrits, permettent de dater ces hymnes à au moins 4000 ans avant J-C. En ce temps-là, le sanscrit était déjà une langue élaborée et complète. La structure fondamentale des langues indo-européennes, y compris l'ensemble des langues modernes européennes, ainsi que le russe et d'autres langues slaves, remonte à des milliers d'années et n'a pas substantiellement changé depuis. Il en va de même pour le chinois et pour des langues sémites comme l'hébreux et l'arabe. En dépit de multiples changements, les langues que nous parlons aujourd'hui sont donc très anciennes.

Des origines des mathématiques

Ce n'est pas le cas des mathématiques et de la musique. Les mathématiques — la partie du langage dont le développement est le plus directement lié à l'accroissement du pouvoir de l'homme sur la nature au cours des 2500 dernières années — ont évolué en une série de révolutions au cours desquelles le contenu et la forme se sont élargis et développés de façon assez notable. Parce qu'il est plus récent, le développement de la composante mathématique — ou, dans un sens plus large, géométrique — du langage, nous est bien plus accessible que les premiers stades du langage parlé. En étudiant son histoire, nous pourrions espérer découvrir quelque chose de grande valeur sur l'esprit humain.

Survolant les 2500 dernières années de développement des mathématiques, deux événements spécifiques peuvent être présentés comme des révolutions radicales.

Le premier se produisit il y a quelque 550 ans, dans le contexte des travaux de Nicolas de Cues et de l'avènement de la Renaissance en Europe aux XVe et XVIe siècles. Le second, bien plus proche de nous dans le temps, remonte à la notion du transfini élaborée par Georg Cantor il y a une centaine d'années, et sa découverte des « séries d'alephs » ($\aleph$). Ces deux événements définissent trois niveaux ou domaines au sein des mathématiques, aussi bien du point de vue de son évolution historique que de son existence actuelle. Ces trois niveaux de mathématiques correspondent à trois manières différentes de concevoir l'Univers.

Le premier niveau, *A*, peut être rattaché, historiquement, à la géométrie euclidienne des Grecs, celle qu'utilisa, par exemple, Archimède.

Le deuxième niveau, *B*, est marqué par l'introduction des fonctions « non algébriques » ou « transcendantales » avec tous les développements qui s'en suivirent. Ce nouveau domaine des mathématiques remonte essentiellement aux travaux de Nicolas de Cues, et ce savoir sera transmis par les géomètres de la Renaissance tels Brunelleschi et Léonard de Vinci pour éclore pleinement au cours des dernières décennies du XVIIe siècle, notamment dans les travaux de Huygens, Leibniz et Bernouilli. Cent cinquante ans plus tard, Riemann élargira remarquablement les limites de ce domaine mathématique et, peu après, Cantor effectuera la percée fondamentale pour entrer dans le domaine du transfini.

Le troisième niveau, *C*, domaine du mode de pensée lié aux séries d'alephs, en est toujours à sa phase initiale.

Je propose de jeter un coup d'œil sur ces trois niveaux, non tant pour en examiner le contenu que pour mieux saisir le changement du mode de pensée qui amène de l'un à l'autre, c'est-à-dire de *A* à *B*, puis de *B* à *C*.

Avant de rentrer dans le vif du sujet, je souligne que mon objectif n'est pas ici d'être précis de manière formelle. Au contraire, je suis obligé d'employer des expressions plutôt métaphoriques. La nécessité de cette approche deviendra évidente, du moins je l'espère, à la fin.

Niveau A

La forme de mathématiques « géométrie euclidienne » fut érigée en système déductif logique aux environs de 300 avant J-C. Bien que les treize livres des *Eléments* d'Euclide ne fournissent à bien des égards qu'une représentation déformée et partielle de ce que fut réellement la géométrie grecque, ils suffisent pour mettre en lumière la limite de celle-ci, frontière que Nicolas de Cues a franchie en lançant la révolution menant vers l'étape supérieure.

Euclide

La géométrie euclidienne soulève la question de l'organisation de l'espace et de toutes les formes spatiales possibles. Elle tente de réduire ces formes à des éléments fondamentaux dont les relations mutuelles obéissent à certaines règles ou lois. L'élément de base est le point. Cette affirmation est considérée comme une évidence en soi qui ne nécessite pas d'autre interrogation. Le second élément est la ligne droite, ce qui, encore une fois, va de soi. Le troisième élément est le plan. Pour citer l'une des relations fondamentales entre ces éléments, la géométrie euclidienne postule qu'entre deux points donnés, il existe une ligne droite.

La géométrie euclidienne admet, outre le point, la ligne droite et le plan, un élément additionnel : le cercle, qui est associé à une notion de mesure de longueur ou de distance. La circonférence du cercle serait composée de tous les points éloignés d'une certaine distance précise du point considéré comme le centre. Dans l'espace, la forme correspondante est la sphère. Nous avons donc ces catégories d'objets — points, ligne droite, plan, cercle, sphère.

Nous allons tâcher de construire ou de rendre compte de toutes les formes dans l'espace, à partir de ces éléments. Nous aurons directement recours à la règle et au compas pour ce faire.

Nous commençons par les formes les plus simples : les triangles de divers types. Ensuite, nous passons aux rectangles et aux polygones de différents types, puis aux formes solides qui leur correspondent. Nous examinons les relations de proportion et de grandeur, à l'aide de segments définis par paires de points sur une ligne. Nous trouvons des moyens de diviser tout segment en deux, trois, ou x nombre de segments égaux, d'ajouter et de soustraire des longueurs, de les multiplier et de les diviser selon les lois de la proportionnalité. Toutes ces opérations peuvent être exprimées sous forme sténographique, en termes d'algèbre. Puis, nous passons aux surfaces et aux volumes. Nous découvrons de belles relations comme celle attribuée à Pythagore, à propos des surfaces des carrés formés sur les côtés d'un triangle rectangle, relation qui peut être démontrée en divisant un grand carré de deux façons (**Figure 1**).

Cependant, on rencontre très vite, même dans la géométrie euclidienne élémentaire des figures planes, des paradoxes et des anomalies. Ce sont des problèmes que l'on peut formuler facilement mais que l'on ne peut résoudre en restant dans le cadre de la géométrie euclidienne. Ces anomalies indiquent les limites externes de cette géométrie.

Par exemple, on rencontre le phénomène de l'incommensurabilité entre des segments de droite. On peut partager l'étonnement des premiers géomètres qui se rendirent compte qu'il n'existe pas de mesure commune entre la diagonale et le côté d'un carré ; même en les divisant en segments égaux, on ne peut les comparer par des nombres rationnels. Cette prise de conscience a mené à la création d'espèces de nombres différentes, destinées à « remplir » les vides existant entre les fractions et les nombres rationnels.

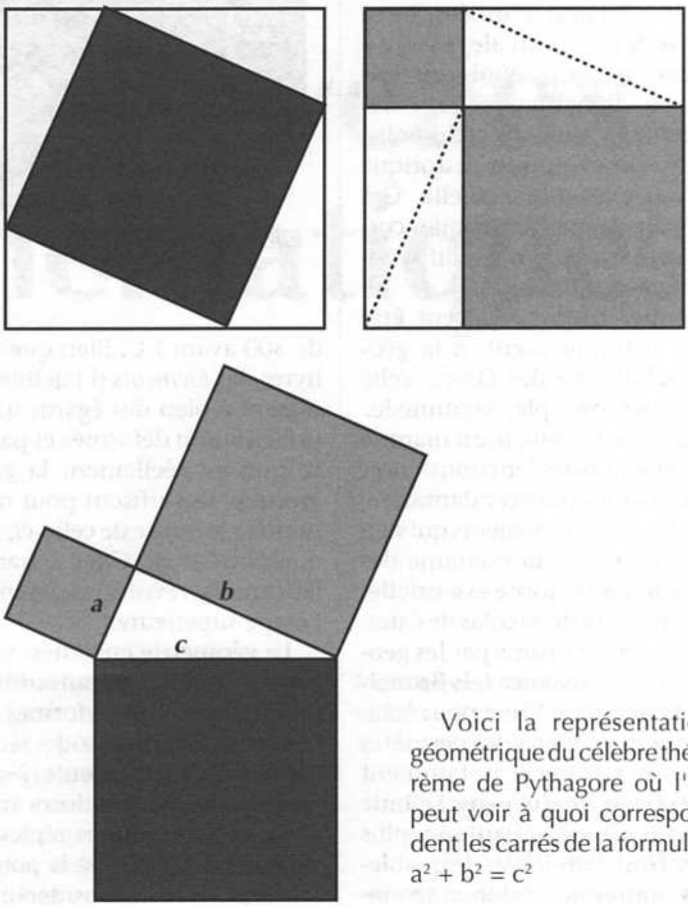
Une autre anomalie concerne la division d'un cercle en y inscrivant des polygones réguliers. Il est facile de construire un triangle équilatéral dans un cercle, ou un carré, dont les angles divisent la circonférence du cercle en quatre arcs égaux. Nous pouvons aussi construire un polygone régulier à cinq côtés, le pentagone, bien que, curieusement, la construction soit différente d'une façon qui ne peut être complètement comprise que d'un point de vue supérieur. L'hexagone est aussi facile à construire. Mais le suivant, l'heptagone, défie absolument une solution exacte passant par la règle et le compas. Nous nous heurtons là à une limite réelle dans la géométrie euclidienne.

Ce qui nous amène à un autre problème célèbre : la quadrature du cercle (**Figure 2**). Pour un cercle donné, comment construire un carré dont la surface est parfaitement égale à celle du cercle ? Une approche immédiate, qui remonte aux temps anciens, consiste à faire converger un polygone vers la circonférence du cercle en multipliant le nombre des côtés. Pour ceux qui ont une certaine expérience, il n'est pas difficile de diviser un polygone régulier en triangles rectangles, de rassembler ceux ci en un rectangle, et finalement trouver le côté du carré dont la surface est égale à ce rectangle. Si l'on utilise un polygone inscrit dans un cercle, le carré correspondant sera légèrement plus petit en surface que le cercle ; l'« erreur » correspond à la petite surface comprise entre les côtés du polygone et les arcs de cercles sous-tendus. De même, si l'on circonscrit le cercle par un polygone, on obtient une surface qui est légèrement plus grande. En calculant la moyenne entre les deux surfaces, on obtient une bonne approximation de la surface du cercle. Le géomètre chinois Liu Hui, aux environs de 264 après J-C, en utilisant un polygone de 3072 côtés, avait obtenu une valeur approximative à cinq décimales près.

A notre connaissance, en 250 av J-C, Archimède était le premier à considérer des séries entières de polygones inscrits ou circonscrits dont le nombre de côtés allait croissant. La procédure la plus simple consiste à commencer par un triangle ou un carré et à doubler, progressivement, le nombre de sommets et de côtés. Il suffit de couper par des bissectrices les arcs ou les côtés correspondants de chaque polygone successif. Ainsi, par exemple, en commençant avec un carré inscrit, nous construisons un octogone, un polygone à 16 côtés, à 32 côtés, etc.

Archimède appelait cette démarche la « méthode d'épuisement » et, en fait, il est facile de voir que la surface polygonale remplit rapidement la surface circulaire à mesure qu'augmente le nombre de côtés. La surface restante, l'« erreur », est réduite de plus de la moitié à chaque fois que l'on double le nombre des côtés du polygone. En allant aussi loin que possible dans la série de polygones, on peut rendre l'« erreur » aussi petite que l'on veut. Néanmoins — et c'est là que se situe le problème — on n'arrive jamais au point d'avoir éliminé complètement l'« erreur ». Il y aura toujours un léger écart entre le polygone et le cercle.

Figure 1 - Le théorème de Pythagore



Voici la représentation géométrique du célèbre théorème de Pythagore où l'on peut voir à quoi correspondent les carrés de la formule : $a^2 + b^2 = c^2$

La situation se complique si l'on prend la sphère à la place du cercle. Dans ce cas, on tentera d'approcher la surface de la sphère à l'aide de polyèdres. Parmi ceux-ci, les plus proches en qualité de la sphère sont les polyèdres réguliers ayant des faces identiques et symétriques. Or on ne peut construire que cinq polyèdres de ce type — les fameux solides platoniciens : le tétraèdre, le cube, l'octaèdre, le dodécaèdre et l'isocaèdre. (Tous peuvent en fait être dérivés du dodécaèdre.) Pour les polyèdres, il n'y a aucune procédure de doublement simple, comme on a pu le faire avec les polygones, et certainement aucune qui puisse préserver la propriété de la symétrie. Ici, la différence entre le monde linéaire des plans et des droites, et le monde courbe de la sphère semble prendre une forme très tangible et irréductible.

La révolution du Cusain

Au milieu du XVe siècle, Nicolas de Cues reprit les travaux qu'Archimède avait réalisé plus de 1700 ans auparavant, et il poussa sa méthode jusqu'à sa limite conceptuelle. Revenant à l'approche par « épuisement », le Cusain se demanda si l'on pouvait considérer que les polygones convergent vers l'identité avec la circonférence du cercle. Ou, exprimé sous forme paradoxale, les polygones deviennent-ils égaux au cercle « en arrivant à l'infini » — autrement dit, le cercle est-il un polygone au nombre