PARADOXE

Des nombres premiers au domaine complexe

Dans notre dernier numéro, nous terminions en posant la question suivante : dans quel cas, 5 n'est-il pas un nombre premier ? Pour y répondre nous allons devoir vous emmener dans le domaine complexe.

« (...) L'art de la raison a son origine, de par sa nature, qui prend naissance dans le nombre. Les êtres qui ne possèdent pas d'esprit, par exemple les animaux, ne peuvent pas compter. En somme, le nombre n'est autre que le déploiement de la raison. Le nombre se révèle tellement être à l'origine de tout ce que la raison peut atteindre que, sans lui, comme la raison doit l'admettre, il ne reste rien. Et lorsque la raison déploie le nombre et l'emploie pour constituer ses conjectures, ce n'est pas différent que lorsque la raison emploie elle-même et forme tout à sa semblance naturelle la plus élevée. (...)

« L'essence du nombre est donc le premier archétype de l'esprit. En lui, on trouve gravée en premier lieu la première trinité ou l'unitrinité, contractée dans la pluralité. Comme nous passons symboliquement avec nos conjectures des nombres rationnels de notre esprit aux nombres ineffables réels de l'esprit divin, nous appelons le nombre l'archétype premier des choses dans l'esprit du Créateur, de même que le nombre procédant de notre raison est l'archétype du monde figuré. »

Nicolas de Cuse,
De conjecturis

Lors de notre dernière discussion pédagogique, nous nous sommes penchés sur la nature des nombres premiers. Cette fois-ci, nous allons dévoiler davantage l'essence du nombre, ce qui nous demandera de porter notre esprit dans un domaine nouveau, plus élevé. Nos lecteurs pourraient bien, à certains moments, trouver ce cheminement difficile. Ceux qui ont auparavant reçu une formation mathématique, tout imprégnés par le point de vue aberrant d'Euler, Lagrange et Cauchy, se trouveront embarrassés par cet enseignement antérieur. Et ceux qui n'ont pas ce type d'embarras ressentiront peut-être leur manque de formation mathématique également comme un embarras. Pour surmonter ces obstacles, suivons la prescription de Platon, Cuse et Leibniz et ne nous fions qu'à notre raison. Pour cela, nous poursuivrons notre investigation en suivant les principes de l'arithmétique supérieure, tels qu'ils furent élaborés par Carl Friedrich Gauss, qui considèrent seulement les relations entre nombres entiers.

Au cours de notre discussion précédente sur les nombres premiers, nous avons découvert une hypothèse sous-jacente à l'essence du nombre. En l'élargissant, nous allons avancer vers une nouvelle hypothèse, supérieure, sous-jacente à l'essence du nombre.

D'abord, l'idée de nombre peut être élargie à partir des nombres entiers positifs en incluant leurs opposés, les nombres entiers négatifs. Ici, les nombres premiers maintiennent la même relation avec tous les autres nombres, sauf qu'il y a changement de direction, du positif au négatif. Alors que les nombres entiers positifs se forment de façon séquentielle en ajoutant 1, les nombres entiers négatifs se forment de façon séquentielle en soustrayant 1 ou en ajoutant -1. Les nombres composés (non premiers) positifs se forment en multipliant des facteurs premiers, les nombres composés négatifs se forment en multipliant ce produit des facteurs premiers par -1. Considérez le négatif et le positif non pas comme une position, mais comme deux directions opposées. Si le positif est à droite, le négatif est à gauche. Si le positif monte, le négatif descend. Une dimension, deux directions.

Bref, nous avons étendu notre concept de nombre en concevant une unité double : 1 et -1.

Une anomalie apparaît

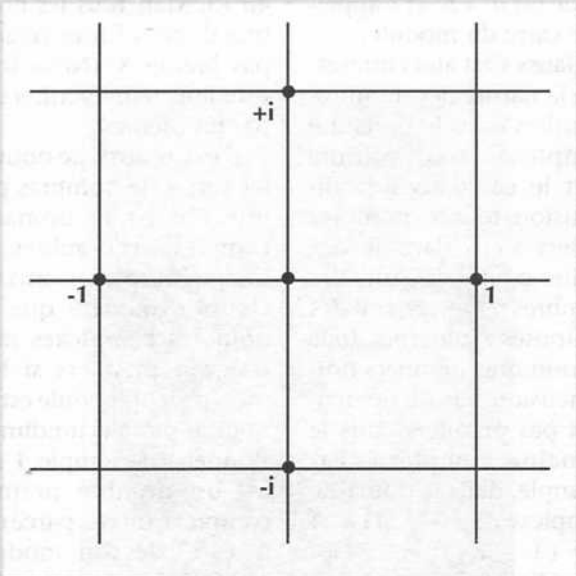
Une fois que nous avons étendu notre concept de nombre dans la direction négative, une anomalie apparaît immédiatement. On peut élever au carré tous les nombres premiers positifs et négatifs pour former un nombre entier quadratique. Par exemple : 2 x 2 = 4 ; 3 x 3 = 9. Le nombre qu'on a élevé au carré s'appelle la racine carrée du nombre quadratique. Notez toutefois que, dans ce domaine, tous les nombres quadratiques sont positifs. Une question paradoxale se pose : « Peut-on former un nombre quadratique négatif ? Ou, inversement, quelle est la racine carrée d'un nombre négatif ? »

Le cas le plus simple, qui sous-tend tous les autres, est le cas de l'unité quadratique, 1 : 1 x 1 = 1 ou -1 x -1= 1. La racine carrée de 1 est 1 ou -1, puisque ces deux nombres élevés au carré égalent 1. Quelle est alors la racine carrée de -1 ?

Dans le concept du nombre unidimensionnel (deux directions), la notion de racine carrée de -1 demeure paradoxal et a été affublé du nom malheureux de nombre imaginaire. (Tout comme l'oligarchie a essayé de limiter la connaissance musicale humaine à une dimension, en baptisant l'intervalle lydien « intervalle du diable ».) Euler et d'autres ont cherché à limiter le progrès de la connaissance humaine en donnant de la racine carrée de -1 une définition purement formelle et donc vide de sens. C'est Gauss qui réalisa que ce paradoxe permettrait d'étendre le concept de nombre à un nouveau domaine — le domaine complexe. Au lieu d'éviter ce paradoxe, en pensant que la racine carrée de -1 était imaginaire ou impossible, Gauss s'est demandé dans quel domaine supérieur un tel nombre doit exister. En d'autres termes, un changement d'hypothèse que son élève Bernhard Riemann désignera plus tard comme un changement de *n* à *n + 1* dimensions.

Gauss élabora son hypothèse du domaine complexe dans une partie de son deuxième mémoire sur les résidus biquadratiques (1832). En fait, il avait développé l'hypothèse dès 1799, alors qu'il rédigeait son ouvrage novateur sur l'arithmétique supérieure *Disquisitiones arithmeticae*. Comme il le dit lui-même, il attendait seulement (plus de trente ans...) un lieu approprié pour présenter sa nouvelle hypothèse au public.

Figure - Démystifier les nombres imaginaires



Gauss développa un système de coordonnées pour illustrer les nombres « imaginaires » et les ramener ainsi à la réalité. Il montre que +i est la moyenne géométrique entre +1 et -1. La moyenne géométrique est une valeur x située entre deux nombres a et b, si bien que a est à x ce que x est à b.

Etendre l'hypothèse

Gauss approcha le paradoxe de la racine carrée de -1 en étendant l'hypothèse sous-jacente au concept de nombre d'une dimension (deux directions) à deux dimensions (quatre directions).

Pour rester bref, utilisons le symbole *i* pour la racine carrée de -1 (ici encore, c'est une désignation malheureuse associée au terme « imaginaire » que nous devons à Euler).

Maintenant, réfléchissons aux propriétés du domaine complexe, tel que Gauss l'a exploré.

Gauss concevait les nombres complexes dans deux dimensions, la racine carrée de -1 appartenant à une autre dimension que celle des simples nombres positifs et négatifs, mais tous les nombres s'unissant dans le domaine complexe. Si l'on conçoit le domaine des nombres positifs et négatifs comme une série unidimensionnelle, on peut concevoir le domaine complexe comme une série de séries unidimensionnelles (voir **figure**). Le mouvement à l'intérieur d'une série est associé au concept de positif et négatif. Le mouvement d'une série à la suivante est associé au produit par *+i* ou *-i*.

Dans le domaine complexe, tous les nombres sont faits de deux dimensions. L'une est liée au positif et négatif ; l'autre dimension est associée à *+i* et *-i*. Les nombres complexes appartiennent à *un*, et indivisible, domaine à deux dimensions. C'est une nouvelle hypothèse selon laquelle les deux dimensions — le positif et négatif, *i* et *-i* — sont congruentes (en harmonie) l'une avec l'autre. Dans ce nouveau domaine, tous les nombres sont de la forme $a + bi$, où a (1 x a en abrégé) désigne la dimension positif-négatif et bi désigne la dimension *+i -i*, (1 + *i* dimensions). Ce n'est pas une combinaison de deux nombres différents mais un nombre ayant deux parties. Les nombres unidimensionnels, ceux limités au positif-négatif comme les nombres entiers, sont le cas particulier des nombres complexes dans lequel $b = 0$. Les nombres complexes, dans lesquels ni a ni b ne sont égaux à 0, sont appelés nombres complexes mixtes.

Une dimension et le domaine complexe

Réfléchissons sur la différence entre le domaine des nombres unidimensionnels et le domaine complexe.

Dans le domaine unidimensionnel, l'unité est double, 1 et -1. Dans le domaine complexe, l'unité est quadruple, 1, -1, i et $-i$. Dans une dimension, chaque nombre est associé à son opposé, par exemple 5 et -5, 2 et -2. On obtient l'associé d'un nombre donné en le multipliant par -1. Dans le domaine complexe, avec son unité quadruple, chaque nombre a quatre associés qu'on trouve en multipliant ce nombre par -1, i, $-i$. Par exemple, $a + bi$ est associé avec $-b + ai$, $-a - bi$ et $b - ai$. (Le lecteur peut vérifier cela lui-même, en multipliant $a + bi$ respectivement par i, -1, $-i$.)

Il existe une relation unique, particulière, dans le domaine complexe — la relation entre un nombre $a + bi$ et son conjugué $a - bi$, c'est-à-dire quand le signe de i est inversé. Le produit d'un nombre et de son conjugué est $a^2 + b^2$ et s'appelle le carré du module.

Gauss s'est alors intéressé à la nature des nombres premiers dans le domaine complexe. Tout comme c'est le cas dans une dimension, tous les nombres entiers sont, dans le domaine complexe, soit des nombres premiers, soit des composés. Toutefois, tous les nombres premiers unidimensionnels ne demeurent pas premiers dans le domaine complexe. Par exemple, dans le domaine complexe : $2 = (1 + i)(1 - i)$; $5 = (1 + 2i)(1 - 2i)$; $13 = (3 + 2i)(3 - 2i)$. En fait, Gauss montra que tous les nombres premiers unidimensionnels de la forme $4n + 1$ ne sont plus premiers dans le domaine complexe, mais que tous les nombres premiers de la forme $4n + 3$ demeurent premiers, car 3 n'est pas un nombre quadratique et $4n + 3$ ne peut donc pas être le carré d'un module. A part 2, tous les nombres premiers unidimensionnels sont soit de la forme $4n + 1$ soit de la forme $4n + 3$. Mais tous les nombres de cette forme ne sont pas premiers. (Nous invitons le lecteur à vérifier cela par lui-même.)

Il existe aussi de nouvelles sortes de nombres premiers dans le domaine complexe, les nombres premiers complexes mixtes. Gauss a montré que les nombres complexes mixtes sont premiers si leur carré de leur module est un nombre premier unidimensionnel. Par exemple, $1 + 2i$ est un nombre premier complexe mixte, parce que le carré de son module, $1^2 + 2^2 = 5$, est un nombre premier unidimensionnel. Il en va de même pour $1 - 2i$.

Réfléchissons davantage sur la différence entre le domaine unidimensionnel des nombres positifs et négatifs et le domaine complexe. Le domaine complexe ne signifie pas simplement un domaine unidimensionnel à deux directions, comme le prétend Cauchy. *C'est un domaine entièrement différent*, légitimement connecté au domaine unidimensionnel mais distinct de lui. Dans le domaine complexe, la caractéristique universelle est changée. Les singularités fondamentales, comme les nombres premiers, sont réordonnancées. Certaines sont changées, certaines sont inchangées et d'autres, nouvelles, sont créées. C'est le domaine qui détermine les singularités.

Alors, 5 est-il un nombre premier ? Oui et non. Cela dépend du domaine. Comment savez-vous dans quel domaine vous êtes ? Grâce aux pouvoirs créatifs de votre raison. Si 5 est un nombre premier, vous êtes dans une dimension ; si ce n'est pas le cas, vous êtes peut-être dans le domaine complexe. Mais peut-être pas, pour reprendre les spéculations de Gauss sur la possibilité de nombres à plus de deux dimensions.

Bruce Director