

# Introduction aux nombres premiers

*Dans notre dernier numéro, nous avons démontré, en revivant une découverte faite par Gauss lorsqu'il avait 10 ans, que les nombres sont des créations de l'esprit. Nous allons considérer ici, plus en profondeur, leur nature et, ce faisant, mieux maîtriser les processus créatifs de notre propre raison.*

**P**armi tous les nombres, il existe des nombres entiers particuliers appelés nombres premiers, qui se distinguent par le fait qu'ils ne sont divisibles que par eux-mêmes ou par 1. Ainsi, 2, 3, 5, 7 et 11 sont des exemples de nombres premiers. Les nombres composés sont, eux, des nombres entiers qui peuvent être divisés non seulement par eux-mêmes et par 1 mais aussi par au moins un autre nombre.

Les Grecs anciens avaient déjà découvert cela et Euclide avait écrit dans ses *Eléments* (en 300 ans av. J.-C. environ) que tous les nombres sont soit premiers soit composés et que tout nombre composé est divisible par quelque nombre premier.

Vous pouvez vous le prouver de la façon suivante. Tout nombre composé peut par définition être divisé par un autre nombre, qui est soit un autre nombre composé soit un nombre premier. Si on obtient un nombre premier, nous ne devons pas aller plus loin. Si c'est un nombre composé, il peut alors être divisé par un autre nombre, qui à son tour est soit un nombre premier soit un

nombre composé, et ainsi de suite. Par cette méthode, vous obtiendrez en définitive un diviseur qui sera un nombre premier.

Par exemple, 30 est un nombre composé qui peut être divisé par 2, nombre premier, et 15, nombre composé. A son tour, 15 peut être divisé par 3, nombre premier, et 5, nombre premier aussi. Ainsi, le nombre composé 30 est le produit des nombres premiers 2, 3 et 5 et peut être divisé par eux.

En 200 av. J.C. environ, Eratosthène développa une méthode pour découvrir quels nombres entiers sont premiers. Cette approche, connue sous le nom de « crible » d'Eratosthène, est un procédé permettant d'éliminer les nombres composés d'un ensemble de nombre entiers, pour ne

laisser que les nombres premiers.

Dressez la liste de tous les nombres entiers allant de 1 à un autre nombre entier A choisi arbitrairement. Maintenant, en commençant par 2 (le premier nombre premier après 1), écartez de la liste tous les nombres premiers divisibles par deux, car ce sont des nombres composés. Faites la même chose avec tous les nombres divisibles par 3, le nombre premier suivant ; puis ceux qui sont divisibles par 5 ; etc., jusqu'à ce que vous en arriviez au premier nombre premier dont le carré est supérieur à A. (Si  $A = 100$ , alors il ne vous faut appliquer cette procédure qu'aux nombres premiers inférieurs à 11 — **Figure 1**).

Cette méthode nous permet de trouver les nombres

premiers qui sont plus petits que tout nombre choisi arbitrairement — mais y a-t-il un nombre élevé après lequel il n'y ait plus de nombre premier ? En d'autres termes, y a-t-il un nombre infini de nombres premiers ?

Vous pouvez facilement prouver que la réponse à cette dernière question est oui et que, quelle que soit la quantité de nombres premiers trouvés, on peut toujours en trouver un de plus. D'abord, trouvez tous les nombres premiers  $a, b, c, \dots, z$ , inférieurs à un nombre choisi arbitrairement. Maintenant, multipliez tous ces nombres premiers entre eux et ajoutez 1 au produit  $[(a, b, c, d, \dots, z) + 1]$ . Appelez le nombre ainsi obtenu X. Si ce nouveau nombre X est un nombre premier, alors vous avez trouvé un nombre premier que vous ne connaissiez pas auparavant. Si c'est un nombre composé, alors il est divisible par quelque nombre premier. Mais ce nombre premier ne peut pas être un des nombres premiers déjà connus, car quand on divisera X par les nombres premiers  $(a, b, c, \dots, z)$ , cela donnera toujours un reste de 1.

**Figure 1 - Le crible d'Eratosthène**

1	<del>2</del>	3	<del>4</del>	5	<del>6</del>	7	<del>8</del>	<del>9</del>	<del>10</del>
11	<del>12</del>	13	<del>14</del>	<del>15</del>	16	17	<del>18</del>	19	<del>20</del>
<del>21</del>	<del>22</del>	23	<del>24</del>	<del>25</del>	<del>26</del>	<del>27</del>	<del>28</del>	29	<del>30</del>
31	<del>32</del>	<del>33</del>	<del>34</del>	<del>35</del>	<del>36</del>	37	<del>38</del>	<del>39</del>	<del>40</del>
41	<del>42</del>	43	<del>44</del>	<del>45</del>	<del>46</del>	47	<del>48</del>	<del>49</del>	<del>50</del>

## Ils ne sont pas linéaires

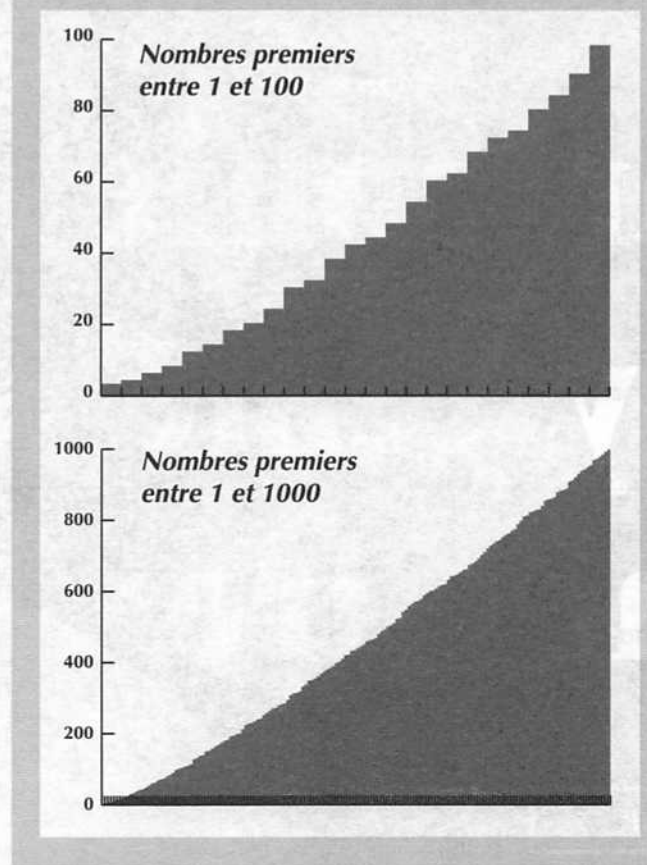
Après avoir trouvé une grande quantité de nombres premiers, leur distribution apparaît, sur un petit intervalle, irrégulière ou non linéaire. Mais Gauss a montré, toutefois, que sur un grand intervalle, la distribution des nombres premiers est approximativement représentée par une courbe logarithmique ; c'est-à-dire que plus les nombres premiers deviennent grands, plus ils tendent à être clairsemés. Plus l'intervalle diminue, moins cette approximation se vérifie ; il s'agit de non-linéarité dans le petit, un cauchemar pour Leonhard Euler (**Figure 2**).

**Que sont donc les nombres premiers ?** Il est facile de voir que tout nombre composé peut être décomposé en nombres premiers, par division. Par exemple, on peut décomposer 12 en  $2 \times 2 \times 3$  ou  $2^2 \times 3$ . On peut décomposer le nombre 504 en  $2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 7$  ou  $2^3 \times 3^2 \times 7$ .

Gauss fut le premier à prouver (*Disquisitiones Arithmeticae*, Article 16) qu'un nombre composé peut être décomposé en une seule combinaison de nombres premiers. Pour reprendre les exemples précités, aucune autre multiplication de nombres premiers que  $2 \times 2 \times 3$  ne sera égale à 12. Il en va de même pour 504 ou tout autre nombre composé.

Ce résultat étonnant, dont Gauss dit qu'il était « tacitement supposé mais n'avait jamais été prouvé », pose une question fondamentale concernant la nature de l'univers. Le fait que Gauss fut le premier à considérer ce résultat comme suffisamment important pour qu'il fallût le prouver est une nouvelle indication de son génie.

Figure 2



Avec la preuve de Gauss et la discussion ci-dessus, nous voyons que les nombres premiers sont ce à partir de quoi tous les autres nombres sont composés. Les nombres premiers sont primaires.

Ceci amène à se demander : qu'arrive-t-il si vous essayez de construire tous les nombres entiers à partir des seuls nombres premiers ? D'abord, vous créez tous les nombres entiers composés seulement de 2, comme 4, 8, 16, ... Puis, vous créez tous les nombres entiers composés seulement de 3, comme 6, 9, 27, puis de combinaisons de 2 et 3 comme 6, 9, 12, ... puis vous introduisez 5, etc. Vous pouvez voir qu'en définitive ce processus engendrerait tous les nombres entiers, mais d'une manière non-linéaire.

Comparez ceci à la création des nombres entiers par addition. L'addition

engendre tous les nombres entiers séquentiellement, en ajoutant toujours 1, mais elle ne fait pas la différence entre nombres premiers et nombres composés.

Dans le cadre de l'addition, l'unité 1 est indivisible. Mais dans le cadre de la division, ce sont les nombres premiers qui sont indivisibles. Les deux processus composeront tous les nombres entiers, mais le résultat ne coïncidera qu'à l'infini. Dans le fini, ils ne coïncident jamais. La différence se situe entre l'acte mental d'addition et l'acte mental de division. N'essayez pas de résoudre cette question en vous demandant si la division est supérieure à l'addition. Réfléchissez plutôt sur ce qui diffère entre les deux démarches, l'« entre-deux ». Ce sont les relations entre les nombres qui sont l'objet de nos pensées, non les

nombres en soi.

Cette anomalie est un reflet de la vérité suivante : il existe une hypothèse supérieure qui sous-tend la création des nombres entiers — une hypothèse qu'on ne peut découvrir si on se limite au domaine de la simple addition linéaire. En réfléchissant sur cette anomalie, nous commençons, comme le dit Socrate, « à voir la nature du nombre dans notre seule raison » (*La République* de Platon). Notre raison s'élève, comme l'indique Socrate, pour contempler la nature de l'Être réel. Nous nous posons cette question : si le domaine des nombres premiers est celui à partir duquel on crée les nombres entiers, quelle est la nature du domaine à partir duquel on crée les nombres premiers ?

Considérez le résultat ci-dessus du point de vue de la *Monadologie* de Leibniz :

« 29. Mais la connaissance des vérités nécessaires et éternelles est ce qui nous distingue des simples animaux et nous fait avoir la Raison et les sciences ; en nous élevant à la connaissance de nous-mêmes et de Dieu. Et c'est ce qu'on appelle en nous *Ame raisonnable*, ou Esprit.

« 30. C'est aussi par la connaissance des vérités nécessaires et par leurs abstractions que nous sommes élevés aux actes réflexifs, qui nous font penser à ce qui s'appelle moi, et à considérer que ceci ou cela est en nous : et c'est ainsi qu'en pensant à nous, nous pensons à l'Être, à la Substance, au simple et au composé, à l'immatériel et à Dieu même ; en concevant que ce qui est borné en nous, est en lui sans bornes. Et ces actes réflexifs fournissent les objets principaux de nos raisonnements. »

Dans notre prochain numéro, nous verrons dans quel cas 5 n'est pas un nombre premier.

Bruce Director