Gödel - Cantor - Leibniz

Mathématique et méthode du paradoxe positif

L'article qui suit est la seconde partie d'une étude sur le mathématicien Georg Cantor[1] et présente une analyse plus poussée sur l'importance des séries absolues de transfinis découvertes par Cantor. Afin de comprendre la signification du travail de Cantor, il est essentiel de l'examiner dans le contexte de l'œuvre de son célèbre prédécesseur, Gottfried Wilhelm Leibniz, et de son successeur immédiat Kurt Gödel. Quel est le lien entre Leibniz, Cantor et Gödel ? L'auteur de cet article montre qu'en s'appuyant sur la méthode de Leibniz, ces trois scientifiques ont prouvé, par des polémiques, que toute tentative de réduire la raison humaine à un système formel clos conduit nécessairement à des paradoxes. Tous trois ont beaucoup travaillé sur la question de « la preuve ontologique de l'existence de Dieu » et ont montré que seule la méthode du « paradoxe positif », utilisée en tant que moyen de rendre la pensée créatrice, permet de résoudre les problèmes métaphysiques fondamentaux et les paradoxes que posent les mathématiques.

Melencolia
d'Albrecht Dürer

DINO DE PAOLI

Si un mathématicien du XXème siècle doit être considéré comme l'héritier intellectuel de Georg Cantor, c'est bien Kurt Gödel. Les quelques écrits épars de Gödel sur ses réflexions philosophiques ont été rassemblés par son biographe Hao Wang.[2] Cependant, en dépit de ses efforts pour rendre accessibles les idées philosophiques et théologiques de Gödel, Wang reconnaît lui-même qu'il ne les comprend pas. Une étude plus approfondie des écrits mathématiques de Gödel — en particulier ses commentaires à propos de ce que l'on considère généralement comme les hypothèses « folles » de Cantor concernant la théologie, la philosophie et la physique — donnera au lecteur un sens des problèmes auxquels Cantor et Gödel s'attaquèrent.

Je me pencherai en particulier sur la raison pour laquelle Gödel s'intéressait tant à « la preuve ontologique de l'existence de Dieu ». De mon point de vue, le résumé formel que l'on présente habituellement comme étant sa « preuve de l'existence de Dieu » est d'une importance tout à fait secondaire. La preuve réelle réside dans l'ensemble de son œuvre par laquelle il a confirmé la réponse de Cantor à son interrogation sur « l'Absolu », en montrant que « des transformations positives qualitativement créatrices » sont *nécessaires*. Gödel montra que les « contradictions » ne sont pas simplement des antinomies kantiennes mais peuvent être porteuses d'une notion *positive* de vérité ; elles ne peuvent être résolues que par un processus créatif, c'est-à-dire par la transition nécessaire d'un niveau de pensée à un niveau de pensée supérieur.

Gödel prouva que la nécessité et la légitimité de ces « transitions » sont une propriété réflexive[3] qui découle de *l'existence* de l'Absolu de Cantor, ou de « l'impossibilité absolue d'une *linéarisation* complète ». Pour utiliser une métaphore, il parle de l'Absolu avec un « A » majuscule et de « la limite absolue de la linéarisation » avec un « a » minuscule, indiquant par là une différence fondamentale mais aussi une similarité fondamentale, comparable au paradoxe que l'on trouve dans le *Parménide* de Platon. La réflexivité de l'Absolu se vérifie partout, bien qu'à des degrés différents ; ceci signifie, comme Gödel l'a établi, qu'il n'existe pas dans notre univers de « points morts » russelliens.

La difficulté de tout ceci provient de la conception erronée qui prévaut aujourd'hui à propos de la véritable origine de « la preuve ontologique ». La théologie s'intéresse à la « connaissabilité » de Dieu du point de vue des êtres humains : autrement dit, elle est une science essentielle qui nécessite « l'engagement total de l'individu, par le cœur et par la raison ». La théologie cherche *ce qui est nécessaire* dans la manière dont l'homme pense, connaît et découvre. Cela signifie qu'elle est « subjective » et que, dans son effort pour rendre Dieu « connaissable », elle doit procéder par « image interne ». Cependant, afin de ne pas tomber dans la pure subjectivité, la théologie doit rendre « nécessaire » une transition dans son mode de penser, comme cela est illustré par la magnifique prière de Saint Anselme (voir encadré) et son *argumento unico* sur l'existence de Dieu[4] — ceci ne devant pas être confondu avec la logique formelle.

L'existence de Dieu peut-elle être prouvée par la logique aristotélicienne ? Les cartésiens le pensent, et la formulation de René Descartes (1596-1650) est considérée comme la « preuve ontologique » officielle, *celle-là* même qu'Emmanuel Kant (1724-1804) mit en pièce. En fait, ce dernier mobilisa toute sa rage destructrice pour s'attaquer à un cadavre. Il combattit et vainquit un fantôme inexistant, puis il annonça triomphalement l'impossibilité de prouver l'existence de Dieu[5]. Ainsi, le débat actuel se réduit à l'opposition entre cartésiens et kantiens.

Toutefois, des auteurs patristiques avaient déjà montré qu'aucune preuve aristotélicienne d'existence nécessaire ne peut être donnée ; seule une solution platonicienne existe : la méthode du « paradoxe positif » exprimée par l'affirmation « *je sais* que je ne sais pas ». Le parti pris de réduire l'ensemble du débat à une opposition entre Kant et Descartes ne tient pas compte de la pensée et de la méthode d'un personnage crucial pour résoudre ce problème : Gottfried Wilhelm Leibniz.

Cantor et Gödel ont redécouvert Leibniz et la méthode du paradoxe positif — méthode qui devient encore plus explicite dans l'essai de Lyndon LaRouche *On the Subject of God* qui traite du même problème[6]. Ce qui relie Cantor, Gödel et LaRouche c'est que, d'une part, ce sont des héritiers de Leibniz et que, d'autre part, ils se sont, dans un premier temps, intéressés à Kant, avant de le rejeter catégoriquement. Des trois, c'est LaRouche qui a saisi le plus profondément la pensée de Leibniz. Il aboutit ainsi à des conclusions que certains considèrent « hors sujet » mais qui représentent une solution — en fait une solution « formelle » — aux recherches de Cantor et de Gödel. Il a défini une fonction pour des transformations non-linéaires sous la forme de sa fonction pour l'économie physique.

Cette fonction d'économie physique joue le rôle de « pont d'or », comme dirait Cantor, entre la science et la théologie. LaRouche a développé une « science de l'économie chrétienne » qui donne un contenu au principe réflexif de Cantor et de Gödel comme étant un reflet physique, social et moral du principe selon lequel l'homme est une image vivante de Dieu (*imago viva Dei*). Sans la contribution de LaRouche, les objectifs de Cantor et de Gödel sembleraient très mystérieux, même aux yeux des scientifiques sérieux et honnêtes. Bien entendu, il faut un peu de courage pour chercher à comprendre tout ce que leurs travaux impliquent. Le fait est que chacun de ces trois penseurs a été victime de calomnies violentes et de tentatives de sabotage.

Intéressons-nous maintenant de plus près à Gödel.

Son biographe Hao Wang écrit : *« Beaucoup de gens voient la vie et le travail de Gödel comme un tableau confus et ésotérique, captivant mais difficile à comprendre ».*

« (...) Or nous croyons que Tu es quelque chose tel que rien de plus grand ne peut être conçu. Une nature pareille n'existe-t-elle donc pas pour que « l'insensé ait dit dans son cœur : Il n'y a pas de Dieu » ? (Ps XIII, 1). Mais certainement cet insensé, lorsqu'il entend ce que je dis : Quelque chose dont rien de plus grand ne peut être pensé », comprend ce qu'il entend — et ce qu'il comprend est dans son intelligence, même s'il ne comprend pas que cela existe. Car c'est une chose d'avoir un objet dans l'intelligence et une autre de comprendre que cet objet existe. Lorsque le peintre élabore son œuvre, il l'a dans son esprit mais il ne saisit pas encore l'existence de ce qu'il n'a pas encore réalisé. Mais après l'avoir peint, il l'a dans son intelligence et il comprend aussi l'existence de ce qu'il a maintenant créé. L'insensé, lui aussi, doit convenir qu'il y a au moins dans l'intelligence quelque chose dont on ne peut rien concevoir de plus grand, puisque, lorqu'il l'entend, il le comprend et que tout ce qui est compris est dans l'intelligence. Mais certainement ce dont rien de plus grand ne peut être conçu ne peut exister seulement dans l'intelligence. En effet, si cela existait seulement dans l'esprit, on pourrait le concevoir comme étant aussi dans la réalité ; ce qui serait supérieur. Donc si ce dont on ne peut concevoir rien de plus grand est seulement dans l'esprit, cela dont on ne peut rien concevoir de plus grand est quelque chose dont on peut concevoir quelque chose de plus grand ; ce qui est certainement impossible. Il existe donc, sans aucun doute, quelque chose dont on ne peut rien concevoir de plus grand, et dans l'intelligence et dans la réalité. (...)

« Non seulement, Seigneur, Tu es ce dont on ne peut rien concevoir de plus grand mais encore Tu es plus grand que l'on ne peut concevoir. Puisqu'on pourrait, en effet, concevoir l'existence d'un tel Etre, si Tu ne l'es pas, c'est qu'on pourrait concevoir quelque chose de plus grand que Toi ; ce qui est impossible. »

Saint Anselme

Proslogion, in Œuvres philosophiques de Saint Anselme, Chap. II et XV, Ed. Aubier Montaigne, 1947.

Dans n'importe quelle université d'aujourd'hui, l'œuvre de Gödel est un point de référence obligé pour les étudiants en mathématiques, et dans ce domaine, ainsi qu'en logique et en théorie de l'information, il est devenu une véritable vache sacrée. Mais du fait qu'il est un objet d'étude dans un domaine extrêmement spécialisé, les véritables implications philosophiques de son travail sont très difficiles à cerner, en dépit du fait qu'elles soient indispensables pour comprendre le processus de la pensée humaine. L'objet de cet article est de mettre en lumière ces implications, plus précisément sur les aspects de la pensée de Gödel que Wang trouvait *« étranges »*, et qui ne peuvent être compris que par une connaissance des idées de Leibniz à partir desquelles Gödel a bâti son édifice.


L'homme dans la pensée de Dieu. Cathédrale de Chartres.

La vie et l'œuvre de Kurt Gödel

Gödel est né en 1906 à Brünn, en Moravie, dans l'Empire austro-hongrois. Sa mère était luthérienne et son père catholique. En ce qui concerne ses propres convictions religieuses — selon sa femme, il lisait la Bible au lit le dimanche — il écrivit en 1974 : *« Baptisé luthérien (mais membre d'aucune congrégation religieuse), ma foi est* théiste, *et non pas panthéiste, proche en cela de Leibniz plutôt que de Spinoza »* [souligné par Gödel].

A l'âge de 14 ans, il apprit les mathématiques par lui-même. Deux ans plus tard, il commença à étudier Kant. Il écrivit cependant, en 1974, que *« le philosophe qui a le plus influencé ma pensée est Leibniz »*. Selon Wang, *« Il disait que sa philosophie est en accord dans ses grandes lignes avec (le système métaphysique de) la monadologie de Leibniz »*.

En 1924, Gödel commença à étudier les mathématiques et la physique à l'université de Vienne avec le Professeur Furtwängler, le cousin du célèbre chef d'orchestre. Il y fut également membre du Cercle de Vienne de Rudolph Carnap pendant deux ans. Il resta cependant très critique à l'égard de la philosophie positiviste de ce dernier et, en fait, c'est à cette époque qu'il se mit à développer *« une profonde antipathie à l'égard d'Aristote, de l'empirisme et du matérialisme (...) et qu'il se sentit attiré par le réalisme platonicien »*. Dans un commentaire ultérieur sur cette période, Gödel écrivit :

« Je ne considère pas que mes travaux soient 'une facette de l'atmosphère intellectuelle du début du XXème siècle', mais plutôt le contraire. Il est vrai que mon intérêt pour les fondements des mathématiques a été éveillé par le 'Cercle de Vienne', mais les conséquences philosophiques de mes résultats, de même que les principes heuristiques y conduisant, ne sont rien d'autre que positivistes ou empiristes ».

De 1928 à 1929, Gödel étudia l'œuvre mathématique de David Hilbert et écrivit son texte devenu célèbre intitulé *Sur la complétude du calcul de logique*. C'est à cette époque qu'il se découvrit un intérêt profond pour Leibniz, intérêt qui prit la forme d'une période de trois ans d'immersion totale dans l'œuvre de Leibniz de 1943 à 1946. En 1930, il obtint son doctorat et, en 1931, il publia ce qui allait devenir sa thèse d'habilitation de 1932 *Sur les propositions formellement indécidables des* Principia Mathematica *et des systèmes apparentés,* qui le conduisit à sa découverte majeure. Entre 1933 et 1938, il fut maître de conférences d'université à Vienne.

Considérons la signification des résultats pour cette période de jeunesse de Gödel. En schématisant un peu, nous dirons qu'il a prouvé le théorème suivant :

Etant donné un système formel L (un réseau déductif), il existe des propositions indécidables dans L ; c'est-à-dire des propositions F telles que ni F ni non-F ne sont prouvables dans L. Ainsi, si L est consistant, il est incomplet et incomplétable. Mais du fait que F et non-F sont des propositions contradictoires, l'une d'entre elles doit exprimer une vérité. Il existe donc une proposition dans L qui exprime une vérité, mais qui néanmoins ne peut être prouvée dans L.

En d'autres termes, en travaillant dans le cadre de la logique formelle, Gödel a pu prouver que tout langage formel, quel que soit l'effort que l'on déploie pour le rendre précis, c'est-à-dire consistant, conduit fatalement à un point de contradiction ou d'inconsistance — à un paradoxe. De ce fait, les efforts déployés pour construire des systèmes ou des langages logiques restreints avec pour unique objectif d'éviter toute anomalie ou ambiguïté comme l'ont fait Bertrand Russell, Ludwig Wittgenstein et le Cercle de Vienne, étaient d'avance voués à l'échec. L'esprit humain possède précisément cette qualité *qui n'est réductible* à aucun type de langage cherchant à exclure les ambiguïtés, les anomalies et les métaphores. La preuve de Gödel mettant en œuvre une procédure assez compliquée peut être caractérisée de manière relativement simple pour notre propos si l'on constate qu'elle s'inspire de la méthode de la diagonale de Cantor[7].

Utilisons l'image suivante : le problème des anomalies est de même nature que celui de l'apparition de dissonances dans la musique, ou celui de l'incommensurabilité de la diagonale du carré avec le côté. Ce serait comme croire que « l'eau » est le principe unique de l'univers, et être soudain confronté à l'existence d'un bloc de glace dont l'existence ou la « valeur de vérité » ne peut être prouvée à partir du réseau déductif de « l'eau ».

Il existe cependant un aspect encore plus important du théorème de Gödel. Il ne s'agit pas simplement de prouver que les systèmes formels fermés sont condamnés à faire apparaître d'une manière ou d'une autre un paradoxe, une anomalie ou une crise indécidable. Ce à quoi nous sommes confrontés, c'est une « proposition vraie », une existence réelle, dont la véracité semble néanmoins impossible à prouver à l'intérieur du système originel. Ce système est donc incomplet et cette proposition fait partie d'une forme de compréhension de la réalité plus vaste. Insistons sur ce point car il est essentiel : nous ne pouvons plus considérer *vérité* et *consistance* comme *identiques* mais elles restent néanmoins *cohérentes*.

Une existence « indécidable » dans une variété, c'est-à-dire une existence qui, dans ce système, conduirait à des antinomies kantiennes ou russelliennes, paralogismes ou paradoxes, est néanmoins une existence *réelle*. Cela signifie qu'une anomalie n'est pas toujours une simple « négation ». Elle a aussi une valeur positive, elle indique l'existence de quelque chose de supérieur qui requiert une évolution non-linéaire des processus de pensée. Utilisons un exemple classique de paradoxe évolutionniste/non-évolutionniste dont on a parfois abusé. Dans les années 30, le célèbre physicien Dirac avait développé une nouvelle hypothèse d'où il découlait que le monde devrait disparaître en une microseconde. Mais ceci n'ayant pas eu lieu, il dut changer les prémisses qui l'avaient conduit à la contradiction. Il aboutit alors à un nouveau paradoxe : l'existence « d'énergies négatives » et « d'antiparticules » que personne avant lui n'avait observées ni même conçues. Cette fois, il décida de maintenir le paradoxe, forçant ainsi des changements dans les théories existantes. Quelques années plus tard, l'on découvrit de telles particules ; celles-ci avaient donc une existence réelle avec des effets réels dans l'univers.

L'impact psychologique des découvertes du jeune Gödel devient clair lorsque l'on s'intéresse à son milieu culturel. Nous sommes alors dans les années 30. L'Europe prend la direction d'un soi-disant Nouvel Ordre. Le paradigme culturel dominant est défini par les « célébrités » telles que Russell, Wittgenstein et le Cercle de Vienne qui ont décrété de manière arrogante que la métaphysique et la théologie peuvent être éliminées car ce sont « des sciences ambiguës » et que l'esprit humain, s'appuyant uniquement sur les « faits » et sur une terminologie précise, peut maîtriser totalement la connaissance, le vrai et le faux. Leur bible est le *Principia Mathematica* de Russell et de Whitehead. C'est alors qu'un jeune étudiant entre en scène et, *de l'intérieur du système*, balaye le château de cartes d'un seul revers de la main.

En 1930, les marchés d'actions viennent de s'effondrer et la panique s'étend. En mécanique quantique, « l'incertain » est déjà présent, et envahit maintenant tout le domaine de la reine des sciences exactes, la logique aristotélicienne. Les élites réagissent en utilisant un de leurs vieux « trucs » : s'écarter du formalisme aristotélicien pour s'embarquer dans l'irrationalisme aristotélicien sous la forme de l'existentialisme de Heidegger, de la théosophie, du gnosticisme, du nazisme. Venant à peine de démolir le positivisme logique, Gödel dut croiser le fer avec le post-modernisme de Karl Popper, qui deviendra le père du subjectivisme relativiste radical.

Ainsi, dès 1935, Gödel se battait sur deux fronts : contre les « modernistes », la conception mécaniste d'Alan Turing puis de Norbert Wiener et de ses condisciples, d'une part, et contre les « post-modernistes » et les idéologues du « libre-échange », d'autre part, qui rejetaient l'idée de « fonction » ou de causalité dans la science, l'économie et l'histoire.

Nous allons maintenant nous attarder sur la question de l'évolution des idées.

Les fonctions transfinies de Gödel

Comme nous l'avons vu, les paradoxes peuvent avoir un effet *positif* si leur résolution est définie au moyen d'une transition d'un système d'ordonnancement vers un système d'ordonnancement supérieur. A l'évidence, la musique ne consiste pas simplement en un ensemble de dissonances, mais celles-ci sont des éléments contribuant au contrepoint, de telle manière que l'intérêt que nous portons à une composition musicale dépend de la résolution créatrice de dissonances. Gödel écrit :

« La véritable raison de l'incomplétude inhérente à tous *les systèmes formels des mathématiques consiste (...) en ce que la formation de types toujours plus élevés peut être poursuivie dans le transfini, alors que dans un système formel quelconque, au plus une quantité dénombrable de types existe.* Car on peut montrer que les propositions indécidables construites ici deviennent toujours décidables quand on leur ajoute des types plus élevés appropriés *(...). Une situation analogue prévaut pour le système d'axiomes de la théorie des ensembles.* » [Werke 1, p181, note 48a]

Revenant sur le concept de transfini dans une autre lettre, Gödel commente le fait que d'autres ont manqué ce que lui a été capable de voir :

« L'aveuglement (ou le préjugé) de la part des logiciens (...) tient à une absence presque totale de bases épistémologiques nécessaires aussi bien dans les méta-mathématiques que dans la pensée du non-fini [le transfini de Cantor] (...). [A]dmettre des éléments transfinis 'sans signification' dans les méta-mathématiques [semblait] inconsistant avec l'idée même de la science prévalant à l'époque (...) [qui n'attribuait de signification] qu'aux propositions qui parlaient d'objets finis et concrets (...). J'ajouterai, en particulier, que ma conception du (...) raisonnement transfini a été également fondamentale pour mes autres travaux dans le domaine de la logique. En fait, il faut noter que le principe heuristique de ma construction sur l'indécidabilité (...) dans les systèmes formels des mathématiques, est le concept transfini de 'vérité mathématique objective' par opposition à celui de 'démonstrabilité'. (...) [J]e le répète, l'utilisation de ce concept transfini peut conduire à des résultats finis prouvables (...) à des théorèmes généraux d'existence (...) dans des systèmes formels consistants. »

Et dans un article où Gödel cherche à définir une fonction pour des processus évolutifs :

« *Le processus d'extension peut être répété jusque dans le transfini. Il ne peut donc exister aucun formalisme qui comprendrait toutes ces étapes [ceci est dirigé contre Turing], mais cela n'empêche pas que toutes ces étapes (ou du moins celles qui introduisent quelque chose de nouveau dans le domaine) puissent être décrites d'une manière* non constructive. *(...) [L]a meilleure manière de représenter l'extension successive est par un axiome de l'infini [des transfinis emboîtés] de plus en plus fort. (...) [U]n axiome de l'infini est une proposition qui* a une certaine structure formelle décidable et qui en plus est vraie *(...). La manière* *la plus simple est* de considérer les [transfinis] ordinaux eux-mêmes comme étant les termes primitifs. *Je pense que la définabilité en termes d'ordinaux, même si elle n'est pas une formulation adéquate pour la compréhension par nos esprits, c'est néanmoins une formulation adéquate dans un sens absolu pour la propriété 'd'être formé selon une loi', par opposition à celle 'd'être formé par un choix aléatoire d'éléments.'* » [*Werke* II, pp. 151,152].

Ici, Gödel exprime clairement le sens de sa pensée. Les éléments minimaux de notre univers ne sont pas des « points finis », matériels ou logiques. Les éléments constitutifs de notre univers sont « transfinis ». Nous allons voir que cela signifie que ce sont des quanta d'action élémentaires. Les paradoxes et la nécessité de passer à des niveaux supérieurs ne se manifestent pas seulement pour ainsi dire en « bout de piste », lorsqu'il est question de Dieu. Si cela était le cas, Russell, Turing,... pourraient proclamer en chœur leur devise : « Vous pouvez garder votre Dieu pour le dimanche, mais nous n'avons pas besoin de Lui pendant les heures de travail ! ».

Gödel a souligné le fait que le « paradoxe » de l'existence de Dieu, ou de l'Absolu de Cantor, est présent de manière *efficiente* à chaque instant. Ce paradoxe ne doit pas être vu simplement comme une punition avec l'apparition de crises et d'antinomies, mais aussi du point de vue de la joie que procure la découverte et leur résolution.

En gardant ceci en mémoire, l'on comprendra clairement pourquoi Gödel a consacré trois ans de sa vie à étudier Leibniz, et en particulier la *Monadologie*. Avant d'examiner ce sujet de plus près, finissons rapidement la biographie de Gödel.

Après l'annexion de l'Autriche par les nazis en 1938, Gödel émigra aux Etats-Unis. Il se lia d'amitié avec Albert Einstein à l'université de Princeton. En 1944, il écrivit un article intitulé *La logique mathématique de Russell* dans lequel il attaque le point de vue de Russell selon lequel les *« classes n'existent qu'en tant que multiple (...) mais pas en tant qu'Un »*, les classes sont des *« symboles sans signification »*, et les transfinis *« ne sont qu'une façon de parler »*. Dans ce texte, Gödel insiste une fois de plus sur la nécessité de revenir au projet de Leibniz pour une *characteristica universalis*, et il cite ce dernier : *« 'Ainsi l'humanité disposerait d'un nouveau type d'instrument qui augmenterait bien plus le pouvoir de la raison, que n'importe quel instrument d'optique n'a jamais augmenté le pouvoir de la vision' »*. [*Werke* II, p.140].

Kurt Gödel en compagnie d'Albert Einstein à Princeton, en 1950. Pour pouvoir rejeter les théories mécanistes de l'esprit humain, Gödel dut s'attaquer au problème suivant : en quoi l'esprit, ou plutôt l'être humain, est-il différent à la fois des animaux et des machines ?

Pendant ces années, Gödel travailla également sur l'hypothèse de Cantor sur le continu et sur la théorie de la relativité, développant des solutions aux équations selon lesquelles l'univers est en rotation — ce qui n'est pas ici l'objet de notre propos. En 1970, apparemment pour la première fois, il fit circuler de manière informelle des réflexions sur les tentatives formelles de Leibniz pour prouver l'existence de Dieu. Gödel est mort en 1978.

Gödel et Leibniz

Essayons de voir si l'on peut trouver un sens aux « idées étranges » de Gödel. Il est évident que pour pouvoir rejeter les théories mécanistes de l'esprit humain, Gödel a du s'attaquer au problème suivant : en quoi l'esprit, ou plutôt l'être humain, est-il différent à la fois des animaux et des machines ? Il avait déjà écrit que son propre travail *« n'avait établi aucune limitation pour les pouvoirs de l'esprit humain, mais seulement pour les possibilités du formalisme pur dans les mathématiques »* [*Werke* II, p.306] et, plus loin, que *« la raison, lorsqu'elle est mise en œuvre, n'est pas statique mais constamment auto-développante »*.[*Werke* II, p.140].

C'est contre le contexte de cette conviction que Gödel disait, selon Wang :

« Je crois qu'il y a dans la religion, non pas dans les églises, beaucoup plus de raison que l'on ne croit habituellement mais nous (...) fûmes éduqué dès notre plus jeune âge à avoir un préjugé contre elle, par l'école, par un enseignement religieux de mauvaise qualité et par nos livres et nos expériences ».

Wang rapporte également qu'*« étant donné mon manque de familiarité avec la théologie et mon manque d'intérêt, Gödel m'en parlait rarement mais il disait que je devrais avoir des notions de théologie rationnelle pour étudier la philosophie »*.

Et Gödel aurait ajouté : *« C'est lorsque l'on abandonne la religion en dehors du domaine de la raison que la philosophie perd l'un de ses principaux principes unificateurs »*.

Wang ajoute : *« Gödel proposait une preuve de l'existence de Dieu, discutait au sujet d'un au-delà, et proposait de prendre Dieu comme un concept primitif de la métaphysique (...). Au centre de sa pensée se trouvait l'importance prédominante (et même exclusive) qu'il attribuait à l'âme individuelle ou à la per-*

sonne. (...) Selon lui, si vous vous connaissez vous-même, vous connaissez tout ».

Du fait qu'il n'emprunte pas ce chemin suggéré par la pensée de Gödel, Wang semble également ne pas comprendre totalement pourquoi Gödel *« paraît vouloir prendre comme point de départ l'endroit où Newton et Leibniz ont abandonné, et croire que le cours de l'Histoire après le XVIIème siècle a régressé plutôt que progressé, sauf en ce qui concerne l'augmentation de l'information. (...) [Gödel] n'est pas satisfait de la compréhension qu'a Newton des concepts physiques, mais souhaite poursuivre la tentative de Leibniz d'analyser plus profondément les concepts de manière à ce que les concepts physiques se fondent avec les concepts vraiment primitifs de la métaphysique. Ainsi, il n'est pas particulièrement satisfait des "fondements métaphysiques" de la physique de Kant qui est plutôt newtonienne que leibnizienne. (...) Gödel était en faveur d'un concept de force plus riche que celui de Newton qui appartient, comme celui de Leibniz, à la discipline fondamentale de la métaphysique »*.

Wang cite également l'opposition que Gödel manifesta à l'égard de Kant car ce dernier joua un rôle crucial pour *« mettre la religion à part, dans un domaine "irrationnel" »*. En faisant cela, Kant sépara plusieurs branches de la connaissance, dissociant l'art de la science et de la philosophie, et ainsi de suite.

La pensée de Gödel apparaît donc plutôt claire et cohérente, et donne ainsi une image de la perspicacité qu'il a déployée lors de sa première percée. Gödel s'intéresse à la théologie d'un point de vue supérieur à ce que l'on considère *habituellement* être la religion. Il s'intéresse plus particulièrement à la théologie leibnizienne, non pas parce qu'elle a pu produire des miracles en mathématiques mais parce que Leibniz rend intelligible une méthode de découverte des problèmes fondamentaux ; de la même manière, Cantor n'a pas lié l'Absolu à Dieu dans le but de rendre nerveux nos académiciens arrogants.

En 1678, Leibniz écrivit une lettre à la comtesse Elizabeth du Palatinat qui répondait à une question à propos de la preuve ontologique de Descartes de l'existence de Dieu :

« V.A. sait qu'il n'y a rien de si rebattu aujourd'hui que des démonstrations de cette existence [de Dieu]. Et je remarque qu'il en est à peu près comme de la quadrature du cercle et du mouvement perpétuel : le moindre petit écolier de mathématiques et de mécanique prétend à ces problèmes sublimes ; (...). De même, tous ceux qui ont appris quelque peu de métaphysique débutent d'abord par la démonstration *de l'existence de Dieu et de l'immortalité de nos âmes qui, à mon avis, ne sont que le fruit de toutes nos études : puisque c'est là le fondement de nos plus grandes espérances. (...)*

*« Mais pour moi, je ne chérissais les mathématiques que parce que j'y trouvais les traces de l'*art *d'inventer en général, et il me semble que je découvris à la fin que M. Descartes lui-même n'avait pas encore pénétré le mystère de cette grande science. (...) Je prétends donc qu'il y a encore une toute autre analyse en géometrie que celles de Viete et de Descartes, (...). (...) j'ai reconnu que la métaphysique n'est guères différente de la vraie logique, c'est-à-dire de l'art d'inventer en général. Car en effet la métaphysique est la théologie naturelle, et le même Dieu qui est la source de tous les biens est aussi le principe de toutes les connaissances. C'est parce que l'idée de Dieu renferme en elle l'Etre absolu, c'est-à-dire ce qu'il y a de simple en nos pensées dont tout ce que nous pensons prend son origine. M. Descartes n'avait pas pris la chose de ce côté. (...)*

« Mais à présent, il me suffit de remarquer que ce qui est le fondement de ma caractéristique l'est aussi de la démonstration de l'existence de Dieu ; car les pensées simples sont les éléments de la caractéristique, et les formes simples sont la source des choses (...) »

Emmanuel Kant (1724-1804). Gödel manifesta une opposition à l'égard de Kant car ce dernier joua un rôle crucial pour *« mettre la religion à part, dans un domaine "irrationnel" »*. En faisant cela, Kant sépara plusieurs branches de la connaissance, dissociant l'art de la science et de la philosophie, et ainsi de suite.

En 1679, dans son texte sur l'*analysis situ* où Leibniz développe la notion cruciale de mesure topologique quantitative indépendante de l'algèbre, basée sur le concept de *similarité* par opposition aux égalités algébriques, il discute des idées platoniciennes ou « formes » :

« En plus de la quantité, les nombres ont aussi en général une qualité ou forme *(...). La théorie de la similarité, ou des formes, se situe au-delà des mathématiques, et doit être cherchée dans la métaphysique. (...)*

« La véritable raison pour laquelle les géomètres n'ont pas assez utilisé la théorie de la similarité est, je pense, la suivante. Ils en n'ont pas eu de concept général qui soit suffisamment distinct. (...) La faute en est aux philosophes qui se satisfont généralement (...) de définitions vagues. (...) Ceci ne suffit donc pas pour désigner comme similaires les objets dont la forme *est la même, à moins que l'on donne un concept général de la forme (...) »* [traduction de l'auteur].[8]

Vers 1702, Leibniz écrit dans une lettre à la reine Sophie-Charlotte de Prusse :

« (...) Ainsi ce que les anciens Platoniciens ont remarqué est très vrai (...) : que l'existence des chose intelligible et particulièrement de ce Moi qui pense et que l'on appelle l'esprit ou l'âme, est incomparablement plus assurée que l'existence des chose sensibles (...) cette conception de l'Etre *et de la* Vérité *se trouve donc dans ce Moi et dans l'entendement plutôt que dans les sens externes et dans la perception. (...) [dans ce moi] on y trouve la* force des conséquences

du Raisonnement, qui sont de ce qu'on appelle la Lumière naturelle (...) c'est par cette Lumière naturelle (...) que nous reconnaissons les Vérités Nécessaires (...) cette considération fait encore connaître qu'il a une Lumière née avec nous. *Car puisque les sens et les inductions ne nous sauraient jamais apprendre des vérités tout à fait universelles ni ce qui est absolument nécessaire, mais seulement ce qui est et ce qui se trouve dans des exemples particuliers, et puisque nous connaissons cependant des vérités universelles et nécessaires des sciences, en quoi nous sommes privilégiés au-dessus des beêes : il s'ensuit que nous avons tiré ces vérités en partie de ce qui est en nous. Aussi peut-on y mener un enfant par des simples interrogations à la manière de Socrates (...) »*

Dans la préface de ses *Nouveaux essais sur l'entendement humain*, Leibniz écrit :

« (...) comme je le crois avec Platon et même avec l'Ecole et avec tous ceux qui prennent dans cette signification le passage de Saint Paul (Rom. 2,15) où il marque que la loi de Dieu est écrite dans les cœurs. Les Stoïciens appelaient ces principes Prolepses, *c'est-à-dire des assomptions fondamentales, ou ce qu'on prend est accordé par avance. Les mathématiciens les appellent* Notions communes *(...). Les philosophes modernes leur donnent d'autres beaux noms (...) [tels que] feux vivants, des traits lumineux (...). »*

Dans son texte sur Bertrand Russell, Kurt Gödel note :

« De plus, Leibniz expliqua à plusieurs reprises que sa théorie [de la characteristica universalis*], tout aussi rudimentaire qu'elle puisse être, fut à l'origine de toutes ses découvertes en mathématiques, ce que même Poincaré aurait reconnu comme étant une preuve suffisante de sa fécondité ».* [*Werke* I, p141].

Nous commençons maintenant à entrevoir ce que Leibniz a découvert et pourquoi Gödel cherchait à le comprendre. Il faut toutefois ajouter quelque chose de plus. Lorsqu'il était à Paris, Leibniz avait étudié l'œuvre de Blaise Pascal (1623-1662) qui fut en son temps la principale opposition aux cartésiens dans tous les domaines de la connaissance. Leibniz n'a jamais caché l'influence de Pascal sur son propre travail et Cantor lui-même s'est beaucoup référé à Pascal. Penchons-nous donc rapidement sur la « théologie » de Pascal car elle était, aux yeux de Leibniz, aussi importante que les découvertes de Pascal en géométrie.

Pascal est souvent associé, à tort, aux soi-disant fidéistes ou aux pessimistes existentiels tels que Heidegger et Barth. Pour prouver leur point de vue, ceux-ci citent toujours la célèbre phrase de Pascal dans ses *Pensées* : *« Le silence éternel de ces espaces infinis m'effraie ».*

Mais replaçons cette citation dans son contexte plus large :

« Pensée 348 : Ce n'est pas de l'espace que je dois chercher ma dignité, mais c'est du règlement de ma pensée (...). Par l'espace, l'univers me comprend et m'engloutit comme un point : par la pensée je le comprends. (...)

« 527 : la connaissance de Dieu sans celle de sa misère fait l'orgueil. La connaissance de sa misère sans celle de Dieu fait le désespoir. La connaissance de J.-C. fait le milieu parce que nous y trouvons, et Dieu et notre misère. (...)

« 267 : la dernière démarche de la raison est de reconnaître qu'il y a une infinité de choses qui la surpassent. Elle n'est que faible si elle ne va jusqu'à connaître cela. (...)

« 270 : Saint Augustin — la raison ne se soumettrait jamais si elle ne jugeait qu'il y a des occasions où elle se doit soumettre. Il est donc juste qu'elle se soumette quand elle juge qu'elle se doit soumettre. »

Ce n'est pas du pessimisme mais c'est un paradoxe insoluble pour tous les aristotéliciens. Cela signifie qu'il faut bien comprendre que Socrate n'a pas simplement dit : « Je ne sais pas » mais « Je *sais* que je ne sais pas ». Et Nicolas de Cuse n'a pas simplement dit « ignorance » mais « *docte* ignorance ».

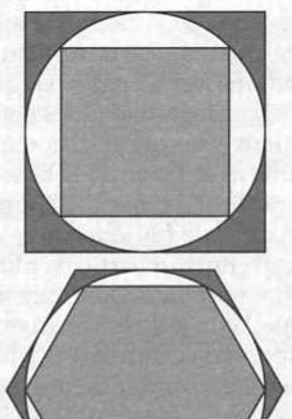
A Paris, dans un contexte de débats autour des idées de Pascal sur la géométrie, Leibniz développa sa notion de fonctions transcendantales — un concept tout aussi crucial pour les mathématiques que pour la « preuve ontologique » — et la publia dans son texte *De vera proportione circuli* (1675). Leibniz appelle « transcendantes » toutes les courbes qui échappent à l'algèbre cartésienne, c'est-à-dire les courbes non algébriques mais qui peuvent néanmoins être rendues intelligibles à l'aide de nouveaux outils mathématiques.

La plupart des fonctions ou des nombres de ce type ont un rapport avec le problème de la « quadrature du cercle » : l'impossibilité de faire cette quadrature prend la forme d'un processus infini ou de série. Leibniz est le premier à se concentrer non pas sur l'infini lui-même, pour tenter de l'atteindre par un processus d'exhaustion, mais sur la découverte d'une loi interne qui subsumerait le paradoxe. Avec ses fonctions, nous sommes en mesure de définir non pas des égalités mais des relations cohérentes.

Leibniz dit : *« Si nous considérons la totalité des séries, même si elle est infinie, tant qu'elle est définie selon une certaine loi de progression (...) alors nous pouvons la concevoir comme totalité, même si elle ne peut pas être exprimée à partir d'un simple nombre ».* [en référence aux nombres de Descartes].

Les fonctions ou les nombres transcendantaux sont des exemples de ce type « d'unités de multiplicités ». Le même concept joue un rôle crucial

La quadrature du cercle



L'impossibilité de faire la quadrature du cercle prend la forme d'un processus infini ou de série. Leibniz se concentre non pas sur l'infini lui-même, pour tenter de l'atteindre par un processus d'exhaustion, mais sur la découverte d'une loi interne qui subsumerait le paradoxe.

dans la *Monadologie* de Leibniz.

Ainsi, nous pouvons voir que la véritable opposition à Descartes, aussi bien en philosophie qu'en mathématiques, ne se trouve pas en la personne de Kant mais en celles de Pascal et de Leibniz. Kant aurait essentiellement accepté les arguments de Descartes contre Leibniz ; ni Kant ni Descartes n'ont compris la notion de nombre réel ou de la forme transcendantale d'existence intelligible. Résumons l'opposition entre Leibniz, d'une part, et Kant et Descartes, d'autre part, au moyen d'un dialogue imaginaire.

Descartes : La seule métrique dont nous disposons pour déterminer l'existence de quelque chose, c'est l'algèbre linéaire qui correspond aux objets finis dans l'espace. Néanmoins, je peux penser à un *polygone infini*, donc il existe.

Kant : Je suis d'accord avec vous, Monsieur Descartes, à propos de la métrique mais pour pouvoir dire que le polygone infini existe, vous devez le construire en tant qu'objet fini dans l'espace — ce qui est impossible. Donc, il n'existe pas.

Leibniz : Messieurs, la notion de polygone *maximum* est intrinsèquement contradictoire. Chaque fois que vous essayez d'en construire un, il sera d'abord fini et, ensuite, je peux immédiatement en construire un avec plus de côtés. Le problème vient précisément de votre « métrique ». Le maximum du polygone existe : il existe en tant que *non-polygone*, à savoir un *cercle*. Et celui-ci est d'un type supérieur. Toute tentative réductrice pour linéariser le cercle *conduit à des antinomies*.

Friedrich Schiller également a répondu à la philosophie de Kant en utilisant un paradoxe. Dans le troisième acte de sa tragédie *Don Carlos*, le marquis de Posa dit :

« Voyez autour de vous l'œuvre de Dieu, cette belle nature ! Elle est fondée sur la liberté (...)

« Les libres-penseurs ne voient que les splendeurs et ne Le voit pas. 'Pourquoi un Dieu ?, disent-ils, le monde se suffit'. Et jamais dévotion de bon chrétien ne lui a rendu un plus bel hommage que ce blasphème du libre-penseur. »

D'un point de vue opposé, Bertrand Russell utilise Kant contre Leibniz. En 1900, Russell écrivit *La Philosophie de Leibniz* dont l'unique but est une tentative de ridiculiser et de présenter de manière déformée la théologie et la métaphysique de Leibniz. Plus précisément, Russell concentre ses attaques sur la « preuve ontologique » de Leibniz, en répétant essentiellement les arguments de Kant. Cinquante-sept ans plus tard dans son *Pourquoi je ne suis pas un Chrétien*, Russell vocifère contre la preuve ontologique qu'il qualifie de « dogme catholique ». Son attaque portait directement contre le Premier Concile de Vatican.

Le Premier Concile de Vatican et Cantor

En 1869, dans une Europe en plein bouleversements le Pape Pie IX réunit le Premier Concile de Vatican, le premier concile général de l'Eglise depuis trois cents ans. Je ne suis pas en mesure de juger toutes les questions soulevées par ce concile. Cependant, il est clair que cet événement provoqua beaucoup de bruit dans le monde. Ce fut précisément ce concile qui adopta la Constitution dogmatique *Dei filius* (*De fide catholica*, 1870) qui affirmait que Dieu peut également être connu (*conceptio*) par l'homme avec l'aide de la *raison*. Un rôle primordial dans cette formulation doctrinale fut joué par le cardinal Franzelin, qui participa plus tard à l'élaboration de la politique sociale du Pape Léon XIII et échangea une correspondance d'une grande profondeur philosophique avec Georg Cantor[9]. Avec *Dei filius*, l'Eglise catholique s'opposait à la fois aux matérialistes et aux fidéistes qui niaient tous deux la possibilité d'un lien entre la foi et la raison.

L'enseignement catholique déclare donc que notre mode de langage limité peut en effet atteindre Dieu, mais du fait de Sa transcendance absolue, nous ne pouvons pas comprendre ce qu'Il est mais plutôt ce qu'Il n'est pas, et comment d'autres existences se rattachent à Lui[10].

Quel est le rapport de tout ceci avec le travail de Cantor ? Sa lettre adressée au mathématicien français Charles Hermite du 22 janvier 1894 est instructive à cet égard :

*« Je remercie Dieu tout puissant d'avoir maintenu vos forces intactes pour vous permettre d'enrichir, avec une constante fraîcheur de jeunesse, mes chères mathématiques (*mon premier amour*) par des nouvelles recherches et des résultats très importants (...). Cela fait maintenant plus de vingt ans — depuis le Concile de Vatican — que dans la sphère intellectuelle, les mathématiques ne sont plus le seul amour de mon âme, et encore moins l'essentiel. Je confesserai que la métaphysique et la théologie se sont emparées de mon esprit à un tel degré, qu'il ne me reste comparativement que peu de temps pour ma première passion. Si les choses s'étaient passées telles que je le souhaitais il y a quinze ans, j'aurais accordé (...) une plus grande place à mes activités dans les mathématiques, peut-être à l'université, et je n'y aurais sans doute pas eu de pire succès que Fuchs, Klein et d'autres. Maintenant, je remercie simplement Dieu, qui dans son infinie sagesse et bonté, m'a empêché à jamais de satisfaire ces désirs afin de le servir ainsi que sa sainte Eglise Catholique Romaine, par des recherches plus profondes dans la théologie, ce que je n'aurais pu faire par une recherche exclusive dans les mathématiques, étant donné mes faibles talents en mathématiques. Ainsi, mon activité totalement* irénique*, universelle et cosmopolite, s'est orientée principalement dans deux directions : premièrement, j'exerce une influence sur le clergé avec lequel j'entretiens des forts liens d'amitié, me comportant avec l'engagement suivant : "Vous êtes mes professeurs en religion et en théologie, je suis votre fils et élève reconnaissant ; il ne tient qu'à vous que je devienne pour votre plus grand bien, votre professeur en science séculière et construise ainsi un pont d'or de conciliation de vous à nous et de nous à vous." Deuxièmement, j'ai recours à un cercle de laïques éduqués, sans zélotisme ni ostentation, avec le discernement, la prudence et le bon sens requis, afin de les prémunir des erreurs répandues que sont le sceptiscisme, l'athéisme, le matérialisme, le positivisme, le panthéisme, etc. et les ramener par étapes au* théisme *qui seul est compatible avec la raison. Je sais parfaitement bien qu'un simple théisme sans église ne suffit pas ; mes faibles capacités ne me permettent pas d'aller plus loin seul, pour le reste, je suis à la disposition de la bienfaisante Providence. »* [*Briefe*, 139]

Une attention particulière doit être portée non seulement à la référence de Cantor au Concile de Vatican mais aussi à l'utilisation du mot « irénique », un terme associé au projet de Leibniz sur la réunification des églises chrétiennes. Dans ce contexte, un commentaire de Cantor sur Kant dans une lettre du 19 septembre 1911 adressée à Russell est digne d'intérêt :

« (...) *Je suis plutôt un adversaire du vieux Kant qui, selon moi, a porté beaucoup de tort et de préjudice à la philosophie, voire même à l'humanité ; comme vous pouvez facilement le constater dans les développements les plus pervertis de la métaphysique qui lui ont succédé jusqu'à ce jour, comme par exemple chez Fichte, Schelling, Hegel, Herbart, Schopenhauer, Hartmann, Nietzsche, etc., etc. Je n'ai jamais pu comprendre (...) que tant de gens raisonnables (...) puissent suivre si loin ce philistin sophistiqué qui était si mauvais mathématicien.* »[11] [*Briefe*, 181]

Examinons maintenant comment Cantor a contribué à développer le travail de Leibniz sur les fonctions transcendantales.

La notion de Fonction absolue de Cantor

Qu'est-ce qu'un nombre ?

Cantor dit que tout son travail se fonde sur « *l'extension* du concept de nombre », ce qui signifie en effet que son point de départ est dans les nombres transcendantaux de Leibniz. Pour Cantor, « nombre » est essentiellement la même chose que « concept conscient ». C'est un objet de notre pensée. Et comme tous les concepts réels, il contient en lui un paradoxe. Tout en gardant présent à l'esprit que Cantor utilise souvent le terme *Menge* pour « nombre », traduit généralement par « ensemble », considérons ce qui suit :

« *Par 'nombre', j'entends en effet de façon générale toute multiplicité qui peut être pensée comme unité, c'est-à-dire tout agrégat d'éléments définis qui peut être combiné en un tout par une loi, et je crois définir ainsi quelque chose d'apparenté à l'*ειδοσ [eidos] *ou* ιδεα [idea] *platonicienne.* » [*Gesammelte Abhandlungen*, 204].

Cantor remarque également que le concept de nombre pour Euclide a la même signification, comme on peut le voir dans son Livre VII : « *Un nombre est un agrégat d'unités* ». Dans la *Monadologie*, Leibniz écrit :

« *L'état passager, qui enveloppe et représente une multitude dans l'unité ou dans la substance simple, n'est autre chose que ce qu'on appelle* perception, *qu'on doit distinguer de l'aperception ou de la conscience, comme il paraîtra dans la suite. Et c'est en quoi les Cartésiens ont fort manqué, ayant compté pour rien les perceptions dont on ne s'aperçoit pas (...).* » (§14)

Bernhard Riemann, le prédécesseur de Cantor, disait, dans un texte que Wang aurait pu appeler « étrange » :

« *A chaque pensée, quelque chose de durable, de substantiel, entre dans nos esprits. Cette substantialité nous apparaît en effet comme une* unité, *cependant (dans la mesure où elle est l'expression de quelque chose d'étendu dans l'espace et dans le temps) il semble qu'elle contienne une variété interne ; c'est pourquoi je l'appelle "pensée-masse". Tout acte de penser est, de ce fait, la formation de nouvelles pensées-masses. Les pensées-masses qui entrent dans l'esprit nous apparaissent comme des images mentales.* »[12]

« A chaque pensée, quelque chose de durable, de substantiel, entre dans nos esprits. Cette substantialité nous apparaît en effet comme une unité, cependant (...) il semble qu'elle contienne une variété interne ; c'est pourquoi je l'appelle "pensée-masse". Tout acte de penser est, de ce fait, la formation de nouvelles pensées-masses. »
Bernhard Riemann

Nous voyons ainsi que même si leurs terminologies diffèrent, Cantor, Riemann et Leibniz ont en tête la même idée. Cantor utilise une autre des idées de Leibniz pour exprimer pleinement le sens de ses nouveaux nombres transfinis. Cantor dit qu'un nombre est « *(...) une* véritable unité *[monas], car en lui une multiplicité et une variété d'unités est unifiée (...). L'addition d'unités ne peut cependant jamais être utilisée pour définir le nombre (...). Ceci prouve que le nombre, réalisé par un simple acte d'abstraction, ne peut être expliqué qu'en tant qu'unité organique d'unités (...).* »

En allemand, on voit clairement que Cantor joue sur le mot « *Ein* » :

« *(...) eine* wahre Einheit *[monas], weil in ihr eine Vielheit und Mannigfaltigkeit von* Einsen einheitlich *verbunden ist (...). Die Addition von Einsen kann aber niemals zur Definition einer Zahl dienen (...). Dies beweist, dass die Zahl, durch einen einzigen Abstraktionsakt gewonnen, nur als organische Einheit von Einsen zu erklären ist (...).* [*Gesammelte Abhandlungen* 380-1]

Dans d'autres textes, Cantor développe cette métaphore et parle de nombres comme « organismes », dans le sens d'une cellule vivante ou d'une monade. Les mathématiques de Cantor décrivent, pour ainsi dire, le phénomène de « donner la vie aux unités », dans les domaines de la nature et de l'intellect. En 1885, il écrit :

« *En accord avec Leibniz, j'appelle* monades *ou* unités, *les éléments* simples *de la nature, de la combinaison desquels émerge, dans un certain sens, la* matière *[ici suivent deux références à Leibniz] (...) je procède du point de vue, selon lequel je pense que je suis en accord avec la physique moderne, que* deux substances différentes, spécifiques, interagissant mutuellement *— et en conséquence également deux classes de monades — doivent être juxtaposées comme fondement : (...)* les monades corporelles *et* les monades *d'éther (...).*

« *La* première question *qui découle de ce point de vue (...) est quelles* puissances *ont ces deux substances, si l'on prend en considération leurs éléments (...). [E]n rapport avec cela, j'avais déjà émis* l'hypothèse, *il y a des années, que la* puissance *de la* substance corporelle *est ce que j'appelle la première puissance dans mes recherches, alors que la* puissance *de la* substance d'éther *est la* seconde *puissance.* » [*Gesammelte Abhandlungen* 275-276]

Nous verrons plus loin ce qu'il entend par « puissance », mais examinons d'abord son idée générale :

« *L'infini actuel [peut être] différencié selon* trois *relations* : premièrement, *lorsqu'il est réalisé selon le plus haut degré de perfection, en une existence totalement indépendante hors du monde , en Dieu, je l'appelle alors* infini absolu *ou* Absolu ; deuxièmement, *dans la mesure où il est représenté dans le monde contingent des créatures ;* troisièmement, *dans la mesure où il peut être saisi par la pensée en tant que* *grandeur mathématique, nombre ou type d'ordonnancement,* in abstracto. *Dans les deux derniers cas, (...) je l'appelle transfini et je l'oppose avec la plus grande rigueur à l'Absolu.* » [*Gesammelte Abhandlungen* 378]

Comparons Cantor et Aristote : l'univers de Cantor est composé d'un Absolu et d'un réseau de transfinis. L'univers d'Aristote est composé d'un Absolu et d'un réseau d'objets et de transformations linéaires. La différence est que chez Cantor il y a réflexivité entre le Créateur absolu et l'humain et les créations naturelles ; chez Aristote, il n'y a rien de tel. Pour l'homme, les dieux aristotéliciens sont donc aussi bons que morts.

L'unité du Un et du Multiple

Cantor donne d'autres clarifications importantes :

1) Supposons deux modes de transformations :

a) La première classe ou premier processus de génération. C'est un *type* de transformation linéaire ou algébrique déductivo-formel.

b) La seconde classe ou second processus de génération. C'est un *type* de transformation non-linéaire, qualitatif, créatif, transfini, transcendantal. Dans son *Philèbe,* 26d, Platon parle du « *ce-qui-vient-à-l'existence résultant de ces mesures qui sont réalisées à l'aide de la limite.* »

2) Cantor spécifie le principe platonicien-leibnizien selon lequel « ce qui limite est supérieur à ce qui est limité » :

« *Si nous considérons un ensemble ou agrégat qui a la puissance de la première classe, et que nous donnons à ses éléments une sorte* quelconque *de succession déterminée, alors il devient "bien ordonné", son nombre* [Anzahl] *est toujours un nombre défini* [Zahl] *de la* seconde *classe de nombres (...).* » [*Gesammelte Abhandlungen* 169]

Ici, *Anzahl* signifie « unité », le *nombre ordinal* transfini qui limite une « succession bien ordonnée », le « Multiple ». En tant qu'objet intellectif, en tant que nombre, c'est un élément qui a une puissance supérieure à celle des éléments qu'il ordonne et, en fait, il détermine leur existence sous la forme d'un Multiple *ordonné,* ou une progression ordonnée.

La chose importante à clarifier est que Cantor considère ces « ordinaux transfinis », « unités de multiplicités », « objets intellectifs », nombres transcendantaux, *Anzahlen,* etc. comme étant les éléments *minimaux* de son univers. Comme nous l'avons vu dans le cas de Gödel, puis de Leibniz et maintenant de Cantor, les éléments irréductibles de notre univers, l'« unité de mesure », sont des *actes créatifs,* autrement dit, de véritables monades. La transformation linéaire, le domaine du « Multiple », n'est finalement qu'un aspect *subsumé* de cette activité créative. Nous pouvons donc définir l'ordinal transfini essentiellement comme un *quantum de créativité.*

Les Alephs et le concept de « puissance »

Ceci nous conduit directement à la notion de « puissance » qui provient de l'*analysis situs* de Leibniz. La question qui se pose est comment mesurer des espèces de transformations qualitatives. Cantor fut le premier à faire une démonstration formelle que seules les transformations « transcendantales » peuvent augmenter la puissance d'une série et conduire au niveau de puissance supérieur suivant. Toutefois, même les transformations qualitatives peuvent devenir constantes ou répétitives dans leur principe d'ordonnancement, et donc ne pas conduire, par leur propre nécessité, à une puissance supérieure. Cantor appelle ce premier niveau de puissance $\aleph_0$(aleph-0).

Ceci identifie l'espèce ou le *type* de transformation qualitative qui définit, par exemple, toutes les fonctions physiques transcendantales de Leibniz. Nous voyons déjà ici la richesse de ce premier niveau à puissance nulle. Ses éléments sont les premières sortes d'actes créatifs ou monades.

Si nous voulons ensuite aller un pas plus loin, comme nous le devons, il nous faut consciemment saisir le principe sous-jacent de ce type de changement, la « puissance » du premier domaine, afin de pouvoir le transformer. Nous pouvons créer de nouvelles espèces de fonctions, de nouveaux types d'ordinaux, qui seront d'une puissance supérieure $\aleph_1$.

Mathématiquement, nous trouvons à ce niveau, par exemple, les fonctions non-analytiques. Nous pouvons également caractériser la puissance $\aleph_1$ en disant que c'est un mode de penser qui a changé.

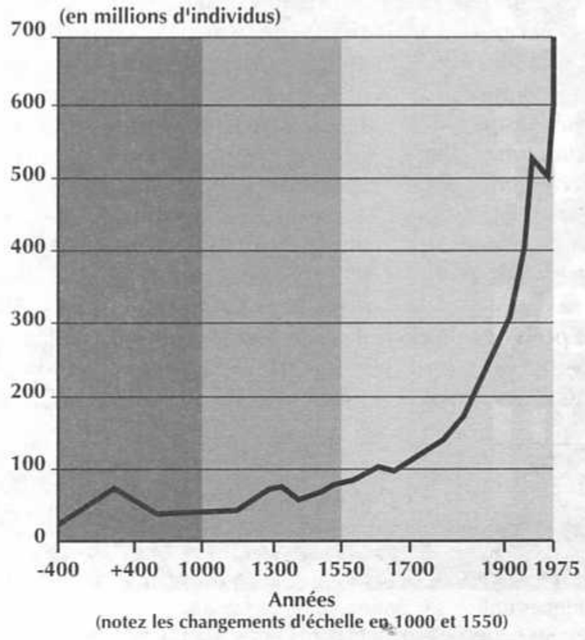
Cantor termina sa description des mathématiques formelles avec $\aleph_1$. Cependant, il généralisa le processus afin d'être en mesure de penser dans les termes d'une série universelle d'alephs de puissance sans cesse plus élevée. L'on dit parfois que la série progresse de $\aleph_1$ à $\aleph_2$, $\aleph_3$, $\aleph_4$, etc. comme « le changement du changement du changement... ». Il serait raisonnable de s'arrêter ici.

Il s'agit de l'une des formes les plus répandues de mécompréhension. Elle est typique de l'orientation psychologique qui conduit à toutes les absurdités formalistes de Russell et des autres. La progression n'est pas un simple « et ainsi de suite ». Cette approche signifie généralement que l'on est en train d'essayer de *linéariser* le développement, comme si nous avions déjà trouvé la constante du processus.

Dans ce cas, que veut donc dire Cantor avec sa série d'alephs ? Afin d'avoir une idée plus précise, nous ne pouvons pas l'aborder comme « la pensée de la pensée de la pensée ». Nous devrions nous intéresser à notre développement historique en tant qu'espèce humaine, à ce que l'homme a et n'a pas accompli. Considérons l'espèce comme étant un seul être humain, né il y a longtemps et vivant encore ; appelons-le « humanité ». Cherchons ensuite à savoir comment l'humanité a dû transformer sa façon de penser, comment elle a *augmenté la puissance* de son processus créateur afin de survivre. Considérons comment elle l'a fait, ainsi que ce qui s'est passé quand elle n'y est pas arrivée. Considérons aussi le fait que chaque fois qu'un acte créateur a réussi, il a été accompli par des individus réels tels que nous. Observons les autres espèces et les types d'énergies. Nous pouvons alors commencer à avoir une idée de ce que Cantor avait en tête avec sa série universelle d'alephs.

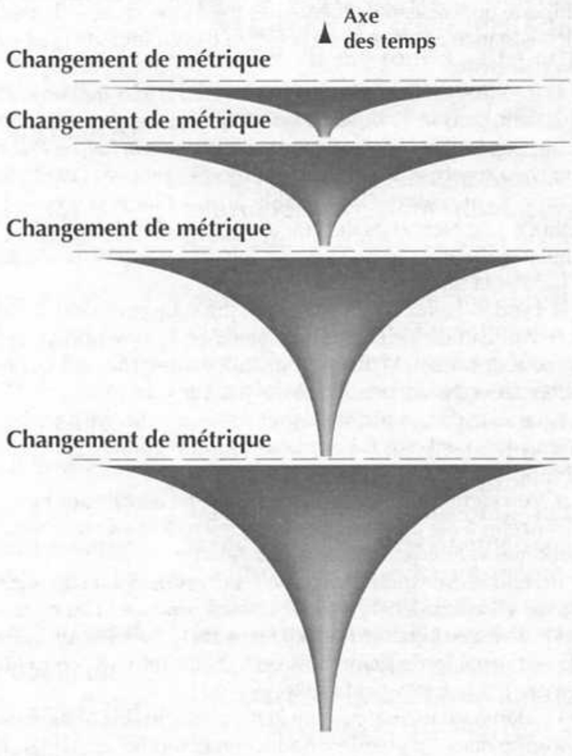
Cantor lui-même a découvert ce qui se passe lorsque l'on tente de linéariser une série discontinue de changements. Dans une lettre à David Hilbert, datée du 26 septembre 1897, il écrivit à propos de la découverte qu'il avait réalisée deux ans plus tôt, deux ans avant le Paradoxe

Une signification physique des alephs



On voit ici la croissance démographique européenne depuis la Rome antique.

L'économiste Lyndon LaRouche a défini la série des alephs comme *« une séquence d'augmentations successives dans le potentiel de densité démographique. »*



Ces augmentations successives dans le potentiel de densité démographique n'ont été possibles que grâce à une succession de découvertes scientifiques, transformant ainsi l'économie grâce à leurs applications technologiques.

Une économie « idéale » en croissance énergétique et capitalistique peut être représentée sous la forme d'une action spirale sur un cône hyperbolique. La vue lattérale de celui-ci donne l'impression qu'il se projette vers « l'infini », sur des coordonnées cartésiennes. C'est, en fait, une singularité ou, en d'autres termes, une « discontinuité » mathématique dans le développement continu du processus économique. Toutefois, le processus économique n'arrive pas à un point d'arrêt, il se poursuit mais il fonctionne sur une base métrique modifiée.

Une nouveau cône hyperbolique est décrit avec le même résultat, et ensuite un troisième, et ainsi de suite. Sur l'axe des temps (pour un cas idéal), les intervalles entre singularités diminuent, et ces intervalles progressivement plus petits décrivent une série harmonique.

de Zermelo :

« La totalité de tous les alephs est d'un genre qui ne peut pas être conçu comme un ensemble déterminé, bien défini, complet. Si c'était le cas, un aleph d'une grandeur définie *serait le successeur de cette totalité (en tant qu'élément), qui en conséquence* appartiendrait *à cette totalité tout en ne lui* appartenant pas, *ce qui serait une contradiction. (...) Il y a plusieurs années, j'ai attribué le terme "d'infini absolu" à des* totalités *que nous ne pouvons pas concevoir comme "ensembles" (la totalité des alephs en est un exemple comme nous l'avons montré ci-dessus), et je les ai nettement distinguées des* nombres transfinis. » [*Briefe* n°156]

Cantor réécrivit le 2 octobre 1897 à Hilbert qui avait du mal à comprendre le concept :

« Vous avez cependant laissé échappé le fait que j'ai (...) continué à utiliser le prédicat "complet" et que j'ai affirmé :

« Théorème : *"La totalité de tous les alephs ne peut pas être conçue comme [un] ensemble déterminé et* en même temps complet."

« Nous touchons ici le punctum saliens. *(...)*

« Il est seulement nécessaire de comprendre correctement le sens du terme "complet" ». [*Briefe* n°160]

Le 9 mai 1899, il écrivit à Hilbert qu'à partir de dorénavant « complet » signifierait la même chose que « consistant ». [Briefe n° 160, p399][13]

« L'Absolu »

Cantor a compris que le paradoxe provient de la tentative de linéariser, ce qui revient de fait à invalider un processus dont l'élément minimum, comme nous l'avons vu, n'est rien d'autre qu'un type d'action créatrice, c'est-à-dire un aleph. Il n'a cependant pas conclu que la solution serait d'éliminer la créativité, ou de la rendre complètement inintelligible comme plus tard Russell et Poincaré ont proposé de le faire. S'appuyant sur sa connaissance de la philosophie et de la théologie, Cantor réalisa qu'à partir de *l'existence nécessaire* de l'activité créatrice — de son ordonnancement légitime — il était possible d'établir *indirectement* l'existence d'un type supérieur d'unité, comme il l'avait fait lorsqu'il aborda pour la première fois les fonctions transcendantales.

Essayez maintenant d'imaginer

que vous êtes un polygone *conscient* qui doit constamment augmenter le nombre de ses côtés, et voyez s'il existe un Maximum, mais pas un polygone maximum. L'existence de cet Absolu est réflexive en ce sens que, paradoxalement, elle garantit l'impossibilité d'une linéarisation complète quel que soit le point de départ ou, réciproquement, qu'elle prouve la nécessité de types supérieurs d'actes évolutifs créateurs.

Dans des lettres adressées à Richard Dedekind datant du 28 juillet et du 3 août 1899, Cantor donne une longue justification formelle de cela. En résumé, la conclusion est que le système de tous les alephs, c'est-à-dire le système de tous les nombres cardinaux transfinis, forme une *« séquence [bien ordonnée] inconsistante absolument infinie »* [Briefe, n° 162 et 163, pp. 405-411].

Ceci signifie que :

a) Elle est *bien ordonnée* : la qualité et la nécessité des transitions, des transformations, indiquent l'existence d'un nombre ordinal *absolu*, une unité, un maximum de puissances supérieures.

b) Elle est *inconsistante*, c'est-à-dire que le maximum ordinal de la série ne peut pas être un aleph. Il n'y a pas d'aleph maximum, les séries sont illimitées.

c) Cette inconsistance, cette impossibilité d'un aleph maximum, définit également la nécessité et la qualité d'évolution vers l'aleph supérieur suivant, vers des modes supérieurs d'existence.

Revenons à la *Monadologie* de Leibniz : *« Or cette substance étant une raison suffisante de tout ce détail, lequel aussi est lié par tout :* il n'y a qu'un Dieu et ce Dieu suffit. » [§39]

Gödel prouva l'absurdité de toute tentative d'éviter le paradoxe de la réflexivité des « inconsistances » évolutives et, après en avoir compris les conséquences, il développa son intérêt « étrange » pour Leibniz. Comme nous l'avons dit au début, il faut insister sur le fait que puisqu'il n'existe pas de solutions mathématico-formelles, le « choix » de l'ordonnancement — et la détermination de sa nécessité — requiert la compréhension de l'action créatrice comme existence réelle, comme force physique. C'est pourquoi, je pense que Gödel s'est intéressé aux « forces leibniziennes » ; toutefois, il n'arriva jamais à la science de la technologie de Leibniz.

On peut apprécier ici le commentaire de LaRouche sur les alephs de Cantor :

« Mon apport crucial (...) est ma définition de cette série comme une séquence d'augmentations successives dans le potentiel de densité démographique. *Cet apport conduit à une solution aux problèmes perplexes posés jusqu'à nos jours par la définition du terme leibnizien de* technologie *en économie physique. Cette solution, à son tour, définit une qualité de processus qui donne aux alephs de Cantor une signification physique unique.* »[14]

C'est ainsi que nous pouvons donner un contenu beaucoup plus grand à ce qui serait autrement un Absolu formel et froid.

Et pour enfoncer un dernier clou irrespectueux sur le cercueil de Kant, je voudrais conclure avec une pique que Platon lui aurait certainement envoyée : Kant se considérait lui-même comme « éclairé » ou « illuminé ». Chacun sait maintenant que les acteurs qui sont sur une scène illuminée ont beaucoup de difficultés à se voir entre eux, et quand ils essaient de regarder le public, ils ne voient plus rien du tout. Nous, pauvres spectateurs dans l'ombre, non seulement nous voyons clairement les « illuminés », mais nous pouvons même voir, bien que vaguement, certaines personnes derrière la scène. ■

Notes

1. La première partie, du même auteur, a été publiée dans le *Fusion* n°40 de mars 1992, sous le titre « Intelligence Artificielle : une fausse science ».

2. Hao Wang, 1990, *Kurt Gödel,* trad. de M. Ovion, Ed. Armand Colin. La plupart des informations bibliographiques utilisées ici viennent de ce travail.

3. Par « réflexive », je veux parler de la qualité dont Cantor a fait la démonstration dans le cas des nombres transfinis ordinaux, c'est-à-dire que la partie reflète les attributs du tout. Avec l'Absolu pour référence, nous allons voir, par la preuve de Gödel, que « l'inconsistance » découverte par Cantor dans une unité absolue qui enveloppe tout, reste vraie pour n'importe quel réseau de théorèmes théorique et ce, « densément partout », du fait que l'inconsistance elle-même est présente dans n'importe quel « intervalle » arbitrairement petit du réseau.

4. Anselme de Canterburry (1033-1109), *Fides querene intellectum* et *Proslogion.*

5. Kant, dans sa *Critique de la Raison Pure,* rejeta toute forme de théologie bâtie sur la raison. Cependant, il essaya dans sa *Critique de la Raison Pratique* de prouver l'existence d'un Dieu suprême. Pour ce point précis — prouver l'existence d'un Dieu (peu importe de quoi il est constitué) semblable à un « Maximum » — il fut obligé d'appliquer la méthode « transcendantale » qu'il avait rejetée. Son travail le « moins mauvais » fut de remplacer des lois morales par des lois éthiques, et Gödel l'accusa à juste titre de servir en paroles la religion.

6. Lyndon LaRouche, 1993, « On the subject of God », *Fidelio,* Spring, pp. 17-48.

7. Voir l'article de l'auteur en référence 1, ainsi que, parmi d'autres livres traitant de la preuve de Cantor, William Dunham, *Journey Through Genius - The Great Theorems of Mathematics,* New York, John Wiley & Sons, 1990.

8. Le texte de Leibniz *Sur l'Analysis Situs* se trouve dans les *Philosophical Papers and Letters* édités par Leroy E. Loemker, deuxième édition, Norwell (Mass.), Kluwer Academic Publishers, 1969, pp. 254-258.

9. Voir l'article de l'auteur en référence 1. La totalité de la correspondance entre Cantor et Franzelin a été publiée pour la première fois en anglais dans « On the Theory of the Transfinite », *Fidelio,* Fall 1994, pp. 98-106.

10. L'idée est exprimée dans le *Catéchisme de l'Eglise Catholique* (Vatican : Libreria Editrice Vaticana, 1994), §43, Thomas d'Aquin est cité entre autres références.

11. Bien que Johann Friedrich Herbart (1776-1841) ait adhéré dans un premier temps à la philosophie de Leibniz et de Schiller (et c'est en cela qu'il influença Bernhard Riemann), il la rejeta par la suite.

12. Bernhard Riemann, « Sur la Psychologie et la Métaphysique » dans ses *Fragments Philosophiques.* La première traduction complète en anglais des *Fragments Philosophiques* est parue dans *21st Century,* Winter 1995-1996, pp. 50-62.

13. Ironiquement, c'est précisément ce point qu'Hilbert ne comprit pas.

14. Lyndon LaRouche, 1993, « On the Subject of God », *Fidelio,* Spring, p.38.

A propos des sources

Les travaux de Cantor sont cités de *Gesammelte Abhandlungen,* édités par Ernst Zermelo, Berlin, 1932.

La correspondance de Cantor est tirée de *Briefe* (Lettres), éditées par Herbert Meschkowski et Winfried Nilson (Berlin : Springer-Verlag, 1991).

Les écrits de Gödel sont tirés des deux volumes de l'édition allemande (*Werke*).