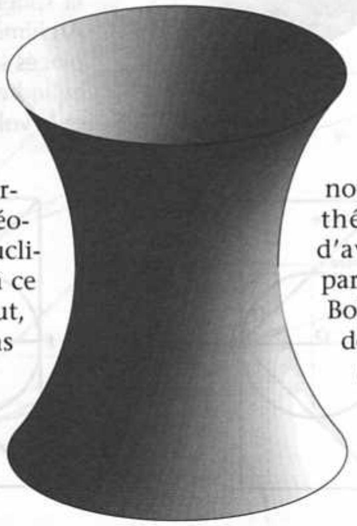
Et si nous étions les êtres vivants d'une géométrie à forte courbure

RÉMI SAUMONT

Ce n'est que par les ouvrages de vulgarisation sur la relativité générale, publiés après les années 20, que le grand public a commencé à prendre conscience de l'existence des géométries non euclidiennes. On a pu ainsi découvrir ce monde étrange dans lequel, par exemple, la somme des angles d'un triangle peut être inférieure ou supérieure à 180°, et où des lignes droites parallèles peuvent se couper.



Le caractère surprenant des géométries non euclidiennes tient à ce que rien de tel ne peut, semble-t-il, exister dans notre environnement immédiat. Quand on dessine un triangle sur une surface « plane », tout le monde peut constater que la somme de ses angles mesurés au rapporteur est bien de 180°, et l'exemple des rails de chemin de fer montre aussi que, même sur la surface d'une boule comme la Terre, on peut toujours tracer des lignes « parallèles » sur de grandes distances. Ainsi, la courbure de l'espace-temps quadridimensionnel relativiste apparaît-elle, même pour un bachelier, comme une notion quelque peu ésotérique n'intéressant que l'immensité astronomique. Pour lui, l'espace à notre échelle a bien les propriétés que lui enseigne la géométrie d'Euclide.

En réalité, l'attachement aux notions traditionnelles n'est pas propre au seul *vulgum pecus*. Ce fut aussi celui des mathématiciens professionnels du début du siècle dernier dont plusieurs passèrent un temps considérable à tenter de démontrer que par un point extérieur à une droite, on peut tracer une et une seule parallèle à cette droite ; c'est le postulat d'Euclide. Afin d'illustrer cette crainte de sortir du sérail, il n'est que de se souvenir du comportement de Gauss durant les premières dizaines d'années du XIXème siècle. Malgré sa notoriété, ce génial mathématicien a attendu d'avoir communication par lettre des travaux de Bolyai (1832) et surtout de prendre connaissance de la publication des travaux de Lobatchevski en allemand (1840, mais datant de 1826) avant de faire état de manière extensive de ses propres recherches sur les espaces courbes. (On a tout d'abord connu l'antériorité de ses travaux, par exemple, par sa correspondance avec Schumacher publiée par Peters, ainsi que celle échangée avec Taurinus).

D'après Stackel, les recherches de Gauss sur les surfaces courbes auraient commencé dès le début du XIXème siècle, c'est-à-dire au moins quinze ans avant que Lobatchevski n'aborde la question.

Par la suite, et grâce aux travaux de Riemann, Beltrami, Klein, Hilbert, Weyl, Poincaré, Cartan, Clifford, etc. les recherches sur les géométries non euclidiennes se sont développées et, en quelques dizaines d'années, la géométrie d'Euclide n'a plus été considérée, tout au moins par les théoriciens, que comme un cas particulier d'une science plus générale de l'espace.[1]

Le développement des recherches sur les surfaces à courbure négative (réglées) et celles, moins avancées cependant, sur certains des espaces à trois dimensions conduit à poser une question triviale : si notre espace immédiat était fortement courbé et si nous étions nous-mêmes des êtres courbes, pourrions-nous aisément nous en rendre compte ? Et si oui, comment ?

Poincaré, dans son livre *La Science et l'Hypothèse*[2] a imaginé un exemple d'univers non euclidien dont la courbure n'est manifeste que pour un observateur extérieur. Il s'agit d'une sphère au sein de laquelle règne une température décroissant à partir du centre pour atteindre le zéro absolu à sa périphérie. La dimension de tout objet se mouvant au sein de cet univers dépend de sa température qui atteint instantanément un état d'équilibre avec celle du milieu ambiant. La longueur varie proportionnellement à la température du lieu et s'annule à la périphérie. En réalité, personne ne peut atteindre cette limite car, pour l'observateur extérieur, la taille des habitants de cet univers diminue au fur et à mesure qu'ils s'approchent de la périphérie. Plus un habitant s'en approche, plus il devient petit. Celui-ci pense, cependant, avoir conservé la même taille alors qu'en réalité (pour l'observateur extérieur), il fait des pas de plus en plus étroits de telle sorte que, pour lui, cette périphérie se trouve en réalité située à l'infini.

Que peut bien être une ligne droite dans un tel univers ? La ligne droite est le plus court chemin d'un point à un autre. La longueur d'un trajet est celle mesurée par les habitants de cet univers. Un rapide examen montre que ces chemins les plus courts sont, pour l'observateur extérieur, des éléments de circonférences, mais pas n'importe lesquelles, uniquement celles qui coupent à angle droit la sphère limite. Un fil tendu prendrait cette forme et un rayon de lumière suivrait le même chemin. Entre deux points A et B, on ne peut tracer qu'une seule « ligne droite » et un troisième point C situé sur cette « droite » serait vu aligné sur les deux précédents. Ainsi, certaines des propriétés géométriques de cet univers seraient, pour ses habitants, les mêmes que celles qui sont valables pour l'observateur extérieur vivant dans un univers supposé euclidien.

Mais avant d'étudier quels seraient les moyens intrinsèques (s'ils existent) qu'auraient des observateurs de cette sorte pour caractériser la courbure de leur géométrie, il convient de rappeler quelques définitions et propriétés fondamentales des divers espaces.

L'espace abstrait

Un espace est un ensemble muni d'une structure.

Un grand effort de réflexion sur ce sujet a été celui du programme d'Erlangen de Klein de 1872 : c'est la définition de la nature et de l'objet des géométries sans recours arbitraire à un système d'axiomes.

La définition des espaces abstraits fait l'objet de la géométrie moderne exprimée au moyen des méthodes de l'algèbre linéaire ou, par exemple, de la topologie.

L'espace de configuration

C'est un espace qui n'a pas de signification physique directe, mais qui est utilisé pour effectuer la représentation de l'état d'un système et surtout de son évolution (espaces des vitesses, espaces des phases, par exemple). Il répond à la notion de « variété » de Riemann. Il est le support géométrique explicatif donné aux raisonnements algébriques et analytiques. Un tel type d'espace, souvent multidimensionnel et non euclidien, est très utilisé en statistique : c'est à un statisticien M. G. Kendall que l'on doit un excellent petit livre sur les géométries à n dimensions.[3] Ce type d'espace est utilisé en mécanique pour la représentation des systèmes chaotiques et même en économie par Lyndon Larouche, par exemple, qui fait un grand usage de l'outil géométrique[4] sous les formes les plus variées.

L'espace physique ou espace réel

Il a une définition qui découle d'une géométrie considérée comme l'organisation rationnelle des propriétés d'extension, de forme, de position et d'action réciproque des objets matériels observables.

L'espace physique est synonyme d'étendue selon un certain nombre de directions appelées « dimensions ». C'est une notion tirée de celle de mouvement, de déplacement qui peut être comparée à celle de degrés de liberté

L'espace réel peut être défini d'une manière pragmatique (mais peu rigoureuse) :

• **par balayage :**

- un point en mouvement engendre une ligne (espace à une dimension) ;

- une ligne en mouvement engendre une surface (espace à deux dimensions) ;

- une surface en mouvement engendre un volume (espace à trois dimensions) ;

etc.

• **par intersection :**

- un point peut être défini par l'intersection de deux lignes ;

- une ligne peut être définie par l'intersection de deux surfaces ;

- une surface peut être définie par l'intersection de deux volumes ;

à titre d'exemples

• **à partir de la notion de « simplexe » :**

par un point « extérieur » à un

Rémi Saumont est Directeur de recherche honoraire. Physicien et mathématicien, il est l'auteur de plusieurs centaines de publications scientifiques. Un de ses principaux domaines de recherche est l'Analyse dimensionnelle et la théorie de la mesure. Il est membre (entre autres) de la Société mathématique de France, de l'American Mathematical Society, de la Société de mathématiques appliquées et industrielles, de la Société de bio mathématique et de la Société française de physique.

autre point on détermine un segment, le simplexe de l'espace à une dimension ;

- par un point « extérieur » à la ligne sur laquelle se trouve un segment on détermine un triangle, le simplexe de l'espace à deux dimensions ;

- par un point « extérieur » à la surface sur laquelle se trouve un triangle on détermine un tétraèdre, le simplexe de l'espace à trois dimensions ;

etc.

Un espace peut être caractérisé, par exemple, par le nombre de ses dimensions, par son orientabilité, ses « déformations » (courbures, torsion), son genre topologique.

Il peut être défini de l'extérieur, à partir d'un espace à plus grand nombre de dimensions et dans lequel il est immergé, c'est la méthode extrinsèque, ou au contraire de son intérieur même, c'est-à-dire intrinsèquement[5]

La dimension

La notion de dimension répond à la notion intuitive que nous avons de l'espace tridimensionnel et nous distinguons aisément les trois paramètres qui permettent de définir le volume d'un objet tel que, par exemple, une boîte parallélépipédique : sa longueur, sa largeur et sa hauteur.

Il nous est plus difficile par contre de nous représenter les espaces à nombre de dimensions différent de trois.

Les espaces à nombre de dimensions inférieur à trois

L'image d'un espace à deux dimensions représentée par une feuille de papier est très approximative. En effet, la feuille de papier a toujours une épaisseur non négligeable qui en fait, en réalité, un objet à trois dimensions. La seule représentation intéressante d'un espace physique à deux dimensions n'est donnée qu'à partir de la notion d'interface. L'image d'un espace à deux dimensions sans épaisseur sera, par exemple, celle de la surface de séparation d'un liquide avec l'air. Cependant, même en employant ce genre de procédé, il sera pratiquement impossible de donner une image matérielle d'un espace à une dimension. En effet, la ligne de séparation entre deux surfaces peintes sur un mur aura toujours une certaine « épaisseur » qui sera celle des deux couches de peinture.

Les espaces à nombre de dimensions supérieur à trois

Ici, non seulement il nous est impossible d'en avoir une image matérielle, mais il nous est même impossible de nous en faire une représentation directe. Pour nous, même l'intersection de deux volumes selon une surface n'a pas toujours de sens concret immédiat. La seule manière non algébrique que nous ayons de concevoir les hyperespaces est indirecte, c'est, par exemple, la représentation en perspective, ou encore la méthode des patrons ou le procédé de « collage virtuel » (comme pour la définition de l'hypertore, par exemple) ou enfin, l'utilisation de la coordinance simpliciale.

J'ai donné, dans le n°60 de *Fusion*, l'image de la construction en perspective à trois dimensions d'un hyperparallélépipède à cinq dimensions. Une autre manière, ainsi qu'il vient d'être dit, de représenter un solide multidimensionnel est donc celle des « patrons ». On peut, par exemple, « développer » les faces d'un cube de manière à les inscrire dans un plan et par analogie concevoir le patron tridimensionnel d'un solide quadridimensionnel. Il n'est pas besoin, cependant d'insister sur les limitations qu'implique l'utilisation de ces procédés. La méthode des collages virtuels est, par contre, plus intéressante. Nous la décrirons, puis nous étudierons plus en détail la méthode des coordinances simpliciales qui permet de donner des éléments de réponse à l'interrogation qui fait le titre de cet article.

D'une manière théorique :

• on peut définir le nombre de dimensions d'un espace à partir du degré de liberté d'un point mobile. Cependant, il s'agit là d'une notion empirique qui peut conduire à de grosses erreurs

• On peut le définir à partir des notions d'autosimilitude. Le principe de cette méthode a été exposé dans le n°60 de *Fusion*.

Soit un corps homogène occupant un certain domaine d'un espace donné. S'il est possible de définir au sein de ce domaine un corps plus petit mais semblable géométriquement au premier dans un rapport S (autosimilitude), le rapport des « masses » (masses prises selon leur sens général de quantité de substance) est M. La formule : $M = S^D$ définira alors le nombre de dimensions D de l'espace occupé par le corps. On aura alors :

$$\log M = D \log S \text{ et}$$

$$D = \frac{\log M}{\log S}$$

Ce procédé permet donc d'obtenir pour D des valeurs non entières et conduit ainsi à la définition d'espaces de type fractal.

• On peut le définir d'une manière topologique en termes de voisinage ou de continuité. En ôtant deux points d'une courbe fermée, on la divise en deux parties, alors qu'ôter un ou plusieurs points à une surface ne suffit pas à la diviser. On ne peut le faire qu'en y traçant une courbe fermée et ainsi de suite. On définira donc un continu à n dimensions comme étant divisible en parties par des coupures qui sont elles-mêmes des continus à n-1 dimensions. On a ainsi, par récurrence, une définition topologique de la dimension.

• Enfin, on peut le définir d'une manière a priori plus générale, par la méthode analytique qui ramène l'étude purement géométrique à celle des équations représentatives dans un système de coordonnées. On dit qu'un point est un groupe ordonné de n nombres défini de telle manière que l'ensemble des groupes pouvant être pris en considération forme un espace à n dimensions.

Pourtant, en 1877, Cantor a démontré en contradiction avec cette définition qu'il suffisait, par exemple, d'un seul paramètre pour déterminer la position d'un point dans un carré, ce qui faisait douter de la validité de la notion de dimension.

De surcroît, Peano a décrit, en 1890, une courbe à indentations pentagonales qui, par resserrement des indentations tend à remplir la totalité d'une surface.

A partir de la notion de continu, il apparaissait donc possible de transformer un espace à une dimension en un espace à deux dimensions, par exemple une ligne en un plan et par extension, un espace à n dimensions en espace à m>n dimensions.

Cependant, cette propriété déduite de la théorie des ensembles, comme je l'ai indiqué dans un article du n°61 de *Fusion*, n'a pas d'équivalent topologique, la transformation considérée est seulement simplement