Et si nous étions les êtres vivants d'une géométrie à forte courbure

RÉMI SAUMONT

Ce n'est que par les ouvrages de vulgarisation sur la relativité générale, publiés après les années 20, que le grand public a commencé à prendre conscience de l'existence des géométries non euclidiennes. On a pu ainsi découvrir ce monde étrange dans lequel, par exemple, la somme des angles d'un triangle peut être inférieure ou supérieure à 180°, et où des lignes droites parallèles peuvent se couper.

Le caractère surprenant des géométries non euclidiennes tient à ce que rien de tel ne peut, semble-t-il, exister dans notre environnement immédiat. Quand on dessine un triangle sur une surface « plane », tout le monde peut constater que la somme de ses angles mesurés au rapporteur est bien de 180°, et l'exemple des rails de chemin de fer montre aussi que, même sur la surface d'une boule comme la Terre, on peut toujours tracer des lignes « parallèles » sur de grandes distances. Ainsi, la courbure de l'espace-temps quadridimensionnel relativiste apparaît-elle, même pour un bachelier, comme une notion quelque peu ésotérique n'intéressant que l'immensité astronomique. Pour lui, l'espace à notre échelle a bien les propriétés que lui enseigne la géométrie d'Euclide.

En réalité, l'attachement aux notions traditionnelles n'est pas propre au seul *vulgum pecus*. Ce fut aussi celui des mathématiciens professionnels du début du siècle dernier dont plusieurs passèrent un temps considérable à tenter de démontrer que par un point extérieur à une droite, on peut tracer une et une seule parallèle à cette droite ; c'est le postulat d'Euclide. Afin d'illustrer cette crainte de sortir du sérail, il n'est que de se souvenir du comportement de Gauss durant les premières dizaines d'années du XIXème siècle. Malgré sa notoriété, ce génial mathématicien a attendu d'avoir communication par lettre des travaux de Bolyai (1832) et surtout de prendre connaissance de la publication des travaux de Lobatchevski en allemand (1840, mais datant de 1826) avant de faire état de manière extensive de ses propres recherches sur les espaces courbes. (On a tout d'abord connu l'antériorité de ses travaux, par exemple, par sa correspondance avec Schumacher publiée par Peters, ainsi que celle échangée avec Taurinus).

D'après Stackel, les recherches de Gauss sur les surfaces courbes auraient commencé dès le début du XIXème siècle, c'est-à-dire au moins quinze ans avant que Lobatchevski n'aborde la question.

Par la suite, et grâce aux travaux de Riemann, Beltrami, Klein, Hilbert, Weyl, Poincaré, Cartan, Clifford, etc. les recherches sur les géométries non euclidiennes se sont développées et, en quelques dizaines d'années, la géométrie d'Euclide n'a plus été considérée, tout au moins par les théoriciens, que comme un cas particulier d'une science plus générale de l'espace.[1]

Le développement des recherches sur les surfaces à courbure négative (réglées) et celles, moins avancées cependant, sur certains des espaces à trois dimensions conduit à poser une question triviale : si notre espace immédiat était fortement courbé et si

nous étions nous-mêmes des êtres courbes, pourrions-nous aisément nous en rendre compte ? Et si oui, comment ?

Poincaré, dans son livre *La Science et l'Hypothèse*[2] a imaginé un exemple d'univers non euclidien dont la courbure n'est manifeste que pour un observateur extérieur. Il s'agit d'une sphère au sein de laquelle règne une température décroissant à partir du centre pour atteindre le zéro absolu à sa périphérie. La dimension de tout objet se mouvant au sein de cet univers dépend de sa température qui atteint instantanément un état d'équilibre avec celle du milieu ambiant. La longueur varie proportionnellement à la température du lieu et s'annule à la périphérie. En réalité, personne ne peut atteindre cette limite car, pour l'observateur extérieur, la taille des habitants de cet univers diminue au fur et à mesure qu'ils s'approchent de la périphérie. Plus un habitant s'en approche, plus il devient petit. Celui-ci pense, cependant, avoir conservé la même taille alors qu'en réalité (pour l'observateur extérieur), il fait des pas de plus en plus étroits de telle sorte que, pour lui, cette périphérie se trouve en réalité située à l'infini.

Que peut bien être une ligne droite dans un tel univers ? La ligne droite est le plus court chemin d'un point à un autre. La longueur d'un trajet est celle mesurée par les habitants de cet univers. Un rapide examen montre que ces chemins les plus courts sont, pour l'observateur extérieur, des éléments de circonférences, mais pas n'importe lesquelles, uniquement celles qui coupent à angle droit la sphère limite. Un fil tendu prendrait cette forme et un rayon de lumière suivrait le même chemin. Entre deux points A et B, on ne peut tracer qu'une seule « ligne droite » et un troisième point C situé sur cette « droite » serait vu aligné sur les deux précédents. Ainsi, certaines des propriétés géométriques de cet univers seraient, pour ses habitants, les mêmes que celles qui sont valables pour l'observateur extérieur vivant dans un univers supposé euclidien.

Mais avant d'étudier quels seraient les moyens intrinsèques (s'ils existent) qu'auraient des observateurs de cette sorte pour caractériser la courbure de leur géométrie, il convient de rappeler quelques définitions et propriétés fondamentales des divers espaces.

L'espace abstrait

Un espace est un ensemble muni d'une structure.

Un grand effort de réflexion sur ce sujet a été celui du programme d'Erlangen de Klein de 1872 : c'est la définition de la nature et de l'objet des géométries sans recours arbitraire à un système d'axiomes.

La définition des espaces abstraits fait l'objet de la géométrie moderne exprimée au moyen des méthodes de l'algèbre linéaire ou, par exemple, de la topologie.

L'espace de configuration

C'est un espace qui n'a pas de signification physique directe, mais qui est utilisé pour effectuer la représentation de l'état d'un système et surtout de son évolution (espaces des vitesses, espaces des phases, par exemple). Il répond à la notion de « variété » de Riemann. Il est le support géométrique explicatif donné aux raisonnements algébriques et analytiques. Un tel type d'espace, souvent multidimensionnel et non euclidien, est très utilisé en statistique : c'est à un statisticien M. G. Kendall que l'on doit un excellent petit livre sur les géométries à n dimensions.[3] Ce type d'espace est utilisé en mécanique pour la représentation des systèmes chaotiques et même en économie par Lyndon Larouche, par exemple, qui fait un grand usage de l'outil géométrique[4] sous les formes les plus variées.

L'espace physique ou espace réel

Il a une définition qui découle d'une géométrie considérée comme l'organisation rationnelle des propriétés d'extension, de forme, de position et d'action réciproque des objets matériels observables.

L'espace physique est synonyme d'étendue selon un certain nombre de directions appelées « dimensions ». C'est une notion tirée de celle de mouvement, de déplacement qui peut être comparée à celle de degrés de liberté

L'espace réel peut être défini d'une manière pragmatique (mais peu rigoureuse) :

• par balayage :

- un point en mouvement engendre une ligne (espace à une dimension) ;
- une ligne en mouvement engendre une surface (espace à deux dimensions) ;
- une surface en mouvement engendre un volume (espace à trois dimensions) ;

etc.

• par intersection :

- un point peut être défini par l'intersection de deux lignes ;
- une ligne peut être définie par l'intersection de deux surfaces ;
- une surface peut être définie par l'intersection de deux volumes ;

à titre d'exemples

• à partir de la notion de « simplexe » :

- par un point « extérieur » à un

Rémi Saumont est Directeur de recherche honoraire. Physicien et mathématicien, il est l'auteur de plusieurs centaines de publications scientifiques. Un de ses principaux domaines de recherche est l'Analyse dimensionnelle et la théorie de la mesure. Il est membre (entre autres) de la Société mathématique de France, de l'American Mathematical Society, de la Société de mathématiques appliquées et industrielles, de la Société de bio mathématique et de la Société française de physique.

autre point on détermine un segment, le simplexe de l'espace à une dimension ;

- par un point « extérieur » à la ligne sur laquelle se trouve un segment on détermine un triangle, le simplexe de l'espace à deux dimensions ;

- par un point « extérieur » à la surface sur laquelle se trouve un triangle on détermine un tétraèdre, le simplexe de l'espace à trois dimensions ;

etc.

Un espace peut être caractérisé, par exemple, par le nombre de ses dimensions, par son orientabilité, ses « déformations » (courbures, torsion), son genre topologique.

Il peut être défini de l'extérieur, à partir d'un espace à plus grand nombre de dimensions et dans lequel il est immergé, c'est la méthode extrinsèque, ou au contraire de son intérieur même, c'est-à-dire intrinsèquement[5]

La dimension

La notion de dimension répond à la notion intuitive que nous avons de l'espace tridimensionnel et nous distinguons aisément les trois paramètres qui permettent de définir le volume d'un objet tel que, par exemple, une boîte parallélépipédique : sa longueur, sa largeur et sa hauteur.

Il nous est plus difficile par contre de nous représenter les espaces à nombre de dimensions différent de trois.

Les espaces à nombre de dimensions inférieur à trois

L'image d'un espace à deux dimensions représentée par une feuille de papier est très approximative. En effet, la feuille de papier a toujours une épaisseur non négligeable qui en fait, en réalité, un objet à trois dimensions. La seule représentation intéressante d'un espace physique à deux dimensions n'est donnée qu'à partir de la notion d'interface. L'image d'un espace à deux dimensions sans épaisseur sera, par exemple, celle de la surface de séparation d'un liquide avec l'air. Cependant, même en employant ce genre de procédé, il sera pratiquement impossible de donner une image matérielle d'un espace à une dimension. En effet, la ligne de séparation entre deux surfaces peintes sur un mur aura toujours une certaine « épaisseur » qui sera celle des deux couches de peinture.

Les espaces à nombre de dimensions supérieur à trois

Ici, non seulement il nous est impossible d'en avoir une image matérielle, mais il nous est même impossible de nous en faire une représentation directe. Pour nous, même l'intersection de deux volumes selon une surface n'a pas toujours de sens concret immédiat. La seule manière non algébrique que nous ayons de concevoir les hyperespaces est indirecte, c'est, par exemple, la représentation en perspective, ou encore la méthode des patrons ou le procédé de « collage virtuel » (comme pour la définition de l'hypertore, par exemple) ou enfin, l'utilisation de la coordinance simpliciale.

J'ai donné, dans le n°60 de *Fusion*, l'image de la construction en perspective à trois dimensions d'un hyperparallélépipède à cinq dimensions. Une autre manière, ainsi qu'il vient d'être dit, de représenter un solide multidimensionnel est donc celle des « patrons ». On peut, par exemple, « développer » les faces d'un cube de manière à les inscrire dans un plan et par analogie concevoir le patron tridimensionnel d'un solide quadridimensionnel. Il n'est pas besoin, cependant d'insister sur les limitations qu'implique l'utilisation de ces procédés. La méthode des collages virtuels est, par contre, plus intéressante. Nous la décrirons, puis nous étudierons plus en détail la méthode des coordinances simpliciales qui permet de donner des éléments de réponse à l'interrogation qui fait le titre de cet article.

D'une manière théorique :

• on peut définir le nombre de dimensions d'un espace à partir du degré de liberté d'un point mobile. Cependant, il s'agit là d'une notion empirique qui peut conduire à de grosses erreurs

• On peut le définir à partir des notions d'autosimilitude. Le principe de cette méthode a été exposé dans le n°60 de *Fusion*.

Soit un corps homogène occupant un certain domaine d'un espace donné. S'il est possible de définir au sein de ce domaine un corps plus petit mais semblable géométriquement au premier dans un rapport S (autosimilitude), le rapport des « masses » (masses prises selon leur sens général de quantité de substance) est M. La formule : $M = S^D$ définira alors le nombre de dimensions D de l'espace occupé par le corps. On aura alors :

$$\log M = D \log S \text{ et}$$

$$D = \frac{\log M}{\log S}$$

Ce procédé permet donc d'obtenir pour D des valeurs non entières et conduit ainsi à la définition d'espaces de type fractal.

• On peut le définir d'une manière topologique en termes de voisinage ou de continuité. En ôtant deux points d'une courbe fermée, on la divise en deux parties, alors qu'ôter un ou plusieurs points à une surface ne suffit pas à la diviser. On ne peut le faire qu'en y traçant une courbe fermée et ainsi de suite. On définira donc un continu à n dimensions comme étant divisible en parties par des coupures qui sont elles-mêmes des continus à n-1 dimensions. On a ainsi, par récurrence, une définition topologique de la dimension.

• Enfin, on peut le définir d'une manière a priori plus générale, par la méthode analytique qui ramène l'étude de purement géométrique à celle des équations représentatives dans un système de coordonnées. On dit qu'un point est un groupe ordonné de n nombres défini de telle manière que l'ensemble des groupes pouvant être pris en considération forme un espace à n dimensions.

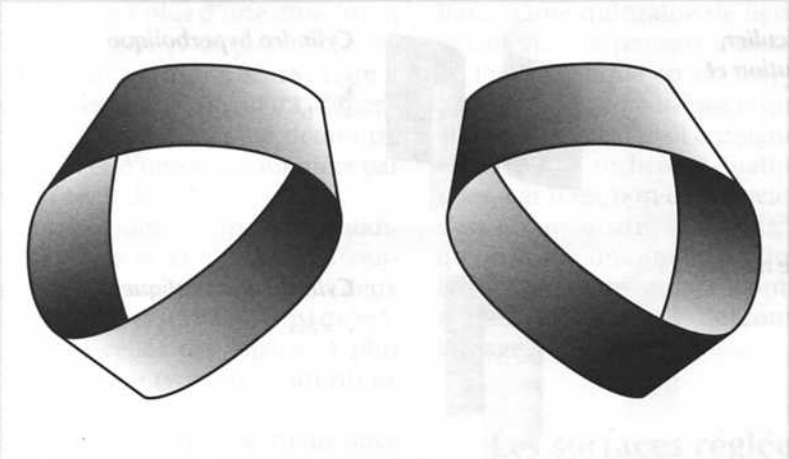
Pourtant, en 1877, Cantor a démontré en contradiction avec cette définition qu'il suffisait, par exemple, d'un seul paramètre pour déterminer la position d'un point dans un carré, ce qui faisait douter de la validité de la notion de dimension.

De surcroît, Peano a décrit, en 1890, une courbe à indentations pentagonales qui, par resserrement des indentations tend à remplir la totalité d'une surface.

A partir de la notion de continu, il apparaissait donc possible de transformer un espace à une dimension en un espace à deux dimensions, par exemple une ligne en un plan et par extension, un espace à n dimensions en espace à m>n dimensions.

Cependant, cette propriété déduite de la théorie des ensembles, comme je l'ai indiqué dans un article du n°61 de *Fusion*, n'a pas d'équivalent topologique, la transformation considérée est seulement simplement

Figure 1 - La bande de Mœbius



On devrait dire en réalité les bandes de Mœbius car, en mode de représentation tridimensionnel, on constate qu'il existe deux bandes dont l'une est l'image dans un miroir de l'autre, fait qui curieusement est passé sous silence dans la plupart des ouvrages. Il est facile de constater qu'une telle surface n'a qu'une seule face et qu'un seul bord. Il est facile à partir de cette surface d'en obtenir d'autres plus complexes, par exemple en accolant par leur bord unique deux bandes de Mœbius ou encore une bande et un disque. Je laisse le lecteur découvrir quelles sortes de surfaces il obtiendra ainsi.

univoque et le théorème de Brouwer montre l'impossibilité d'une transformation topologique entre deux espaces de dimensions différentes (entières).

La notion de dimension conserve donc sa validité

L'orientabilité

Elle est en relation avec les notions de courbure et de torsion mais dépend aussi du nombre de dimensions de l'espace qu'elle caractérise.

On peut la définir à partir de la notion de simplexe ; c'est un invariant topologique (voir à ce propos l'*Encyclopédie Française*, Topologie 1-90).[17]

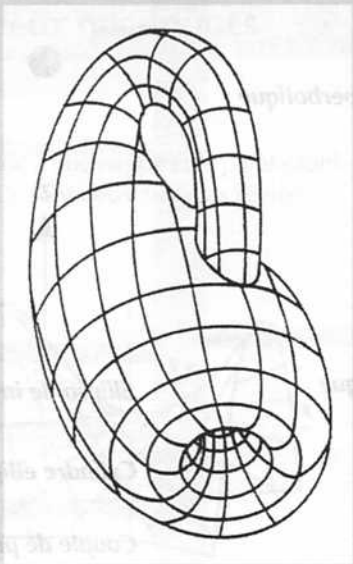
L'exemple le plus connu d'espace non orientable est celui de la surface de Mœbius (**Figure 1**) car c'est une surface strictement unilatère (qui n'a qu'une seule face et un seul bord). Un cercle trigonométrique transporté sur un tel ruban constitué par une bande transparente revient à son lieu de départ avec un sens de rotation inversé. Il en est de même pour la bouteille de Klein (**Figure 2**).

Par contre, le plan étant une surface bilatère, peut être orienté. C'est ce que réalise le cercle trigonométrique, dont le vecteur ayant pour origine le centre du cercle tourne dans le sens inverse des aiguilles d'une montre.

Cependant, il convient de remarquer que cette orientabilité du plan est seulement une propriété extrinsèque, c'est-à-dire qu'elle n'est valable que pour un observateur tridimensionnel capable de distinguer les deux faces de ce plan. De manière intrinsèque, un observateur bidimensionnel ne saurait avoir une quelconque notion d'orientation de son espace.

Pour définir des directions droite ou gauche, il est nécessaire de le faire par référence à une troisième direction faisant un angle non nul avec le plan défini par les deux premières, ce qui est le cas à trois dimensions. On voit ainsi le rôle que joue le nombre de dimensions dans l'orientabilité des espaces. On démontre, par exemple, que seuls les espaces projectifs à nombre impair de dimensions sont orientables.

Figure 2
La bouteille de Klein



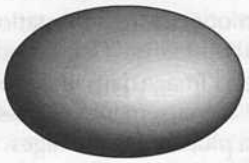
La courbure

Pour le sens commun, la courbure est un changement continu de direction. Extrinsèquement, on la conçoit comme une sorte d'opération d'évasion dimensionnelle.

Le mouvement le long d'une droite a lieu dans un espace à une dimension. Si la trajectoire s'incurve, elle fait pénétrer le mobile dans un plan, espace à deux dimensions qui contient cette droite. Intrinsèquement, cependant, cette trajectoire demeure un espace monodimensionnel (chacun de ses points est défini par un seul paramètre : l'abscisse curviligne). Un certain type de courbure (celle des courbes dites gauches) peut même nécessiter une représentation extrinsèque à une dimension supplémentaire (représentation tridimensionnelle), c'est le cas de l'hélice qui fait l'objet d'une torsion. (Une hélice peut être droite ou gauche et répond ainsi au critère d'orientabilité des espaces à nombre impair de dimensions).

De la même manière, une dimension supplémentaire n'est pas toujours suffisante pour pouvoir définir certains espaces courbes de manière extrinsèque. C'est le cas des espaces de Riemann les plus généraux. La sphère, un espace de Riemann à deux dimensions (une surface fermée à courbure constante) peut avoir une définition extrinsèque à trois dimensions, c'est-à-dire à partir d'un espace

Encadré 1 - Les quadriques et leur graphe



Ellipsoïde (en particulier, ellipsoïde de révolution et sphère)

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

Hyperboloïde à une nappe

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$

Hyperboloïde à deux nappes

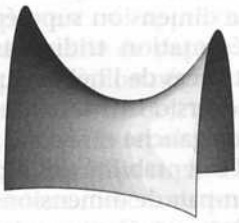
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$$

Cône du second degré

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$$

Paraboloïde elliptique

$$z=\frac{x^2}{2p}+\frac{y^2}{2q}$$

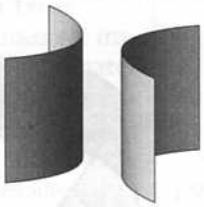


Paraboloïde hyperbolique

$$z=\frac{x^2}{2p}-\frac{y^2}{2q}$$

Cylindre elliptique

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

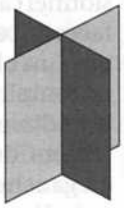


Cylindre hyperbolique

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$

Cylindre parabolique

$$y^2=2px$$



Couple de plans sécants

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=0$$

Couple de plans parallèles

$$\frac{x^2}{a^2}=1$$

Couple de plans confondus

$$x^2=0$$

Cône imaginaire du second degré à sommet réel (0,0,0)

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=0$$

Couple de plans imaginaires (se coupant suivant une droite réelle)

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=0$$

Ellipsoïde imaginaire $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=-1$

Cylindre elliptique imaginaire $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=-1$

Couple de plans parallèles imaginaires $\frac{x^2}{a^2}=-1$

n'ayant qu'une dimension supplémentaire. Par contre, lorsque n, le nombre de dimensions de l'espace de Riemann, est supérieur à 2, il faut généralement plus d'une dimension supplémentaire pour pouvoir le faire. Schlaefli a montré, en 1871, qu'il faut un espace à n(n+1)/2 dimensions. Ce théorème a été démontré par Janet et d'une autre manière par Cartan en 1926-1927.[6]

Comme pour les espaces monodimensionnels, on étudie donc les courbures et la torsion des espaces à deux dimensions, les surfaces, ainsi qu'évidemment celles des espaces à plus grand nombre (y compris infini) de dimensions.[7]

A l'heure actuelle, la connaissance des divers espaces concevables à deux dimensions — les surfaces — est bien développée. On représente le plus souvent ces surfaces en termes de géométrie analytique à trois dimensions ou plus. L'**encadré 1** extrait de l'aide-mémoire de Vygodski[8] donne, par exemple, la liste des quadriques ainsi que leur représentation sous forme de surfaces de l'espace tridimensionnel.

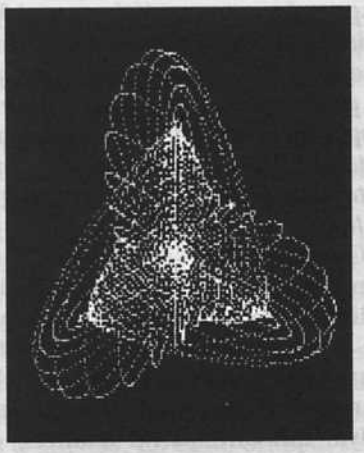
Il existe un grand nombre d'espaces bidimensionnels différents dont certains peuvent avoir un aspect très sophistiqué comme, par exemple, la surface trilobée inventée en 1901 par Werner Boy, élève de Hilbert[9]. Une surface du même type mais quadrilobée est l'une des phases intermédiaires du retournement topologique de la sphère décrit en 1958 par Stephen Smale. Une image de surface de Boy est donnée par la **figure 3**. Elle a été obtenue sur micro ordinateur (un vieil Apple II avec seulement 48 K octets de mémoire centrale) au moyen d'un simple programme en langage Basic d'une quinzaine de lignes. Ce fait montre la puissance didactique de l'informatique en matière de représentation géométrique et quel rôle elle peut jouer dans l'enseignement et même la recherche mathématiques, car il est bon de rappeler qu'il s'est écoulé quatre-vingt ans, avant qu'on trouve une représentation analytique de cette surface dont il est maintenant si facile de construire l'image.

Les surfaces réglées

Il existe une catégorie particulière d'espaces à deux dimensions, c'est celle des surfaces dites « réglées », c'est-à-dire des surfaces qui sont engendrées par le déplacement d'une droite qui est alors ce qu'on appelle une « génératrice rectiligne ». J'ai dû décrire une surface de ce genre pour la représentation affine de la distance parcourue par un mobile accéléré par un champ de gravitation à la fois en fonction de sa taille et en fonction du temps dans mon livre[10] traitant des similitudes physiques (Fig. 2, page 49A).

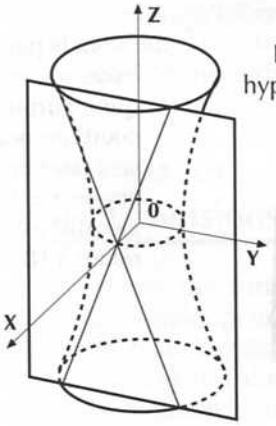
Parmi les surfaces réglées, il est deux surfaces particulièrement intéressantes : « l'hyperboloïde à une nappe » et le « paraboloïde hyperbolique », encore appelée vulgairement « selle de cheval » (**Figure 4**). Par chacun de leurs points passent deux génératrices rectilignes. Ce sont donc des surfaces obtenues par une translation rotation de ces droites génératrices. Pour le paraboloïde hyperbolique, on constate, par exemple, qu'il existe une courbure de la surface dans un sens pour l'aspect parabolique et en sens contraire pour l'aspect hyperbolique (de part et d'autre du plan tangent en un point donné, plan qui coupe donc la surface) ; on dit alors que c'est une surface à courbure négative. Il est quelque peu surprenant, à première vue, de constater qu'une surface aussi « tourmentée » puisse comporter une infinité de lignes droites, alors qu'une surface plus « régulière » comme la sphère, n'en comporte aucune. Celle-ci a une seule courbure et si l'ellipsoïde en a deux, ces courbures sont dirigées dans le même sens par rapport au plan tangent. On dit alors que la sphère et l'ellipsoïde sont des espaces à courbure positive.

Figure 3
La surface de Boy

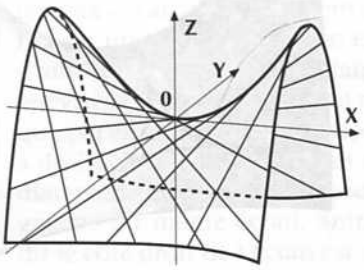


Photographie de son image obtenue sur l'écran d'un ordinateur Apple II.

Figure 4 - L'image de deux quadriques



L'hyperboloïde à une nappe et le paraboloïde hyperbolique. Ce sont deux surfaces réglées.



Les géométries non euclidiennes (3,4,7,15,19)

« La géométrie est-elle une branche des mathématiques ou une branche de la physique ? », c'est sur cette interrogation que Georges Lochak débute le chapitre sur les géométries non eucli-

diennes de son livre sur la géométrisation de la physique[11]. Il cite à l'appui de cette interrogation une assertion de Riemann : *« L'espace ne constitue qu'un cas particulier de variété tridimensionnelle (...) Ce qui distingue l'espace des autres variétés ne peut être déduit que de l'expérience »*, et une assertion d'Einstein *« Pour autant que les propositions de la mathématique se rapportent à la réalité, elles ne sont pas certaines, et pour autant qu'elles sont certaines, elles ne se rapportent pas à la réalité »*.

Comme il a été dit, c'est à partir de l'impossibilité de démontrer la cinquième proposition d'Euclide qu'ont été développées les géométries dites non euclidiennes. Ce sont Nikolaï Ivanovitch Lobatchevski[12] et Johann Bolyai qui ont, parmi d'autres, eu l'audace de développer une géométrie parfaitement logique pour laquelle le postulat d'Euclide est remplacé par le suivant : *« Dans un "plan" de cette géométrie, par un point il passe plusieurs parallèles à une droite »*. La dite géométrie est aussi cohérente que celle d'Euclide, la seule différence étant qu'elle ne parait pas correspondre à notre expérience habituelle. *A la vérité, de même que pour les géométries développées par Gauss et Riemann, aucune ne s'impose a priori et en ce qui concerne la nature de l'espace, seule l'expérience peut imposer un choix.*

Il semble alors qu'en ce qui concerne l'espace de notre univers à l'échelle cosmologique, l'expérience pourrait trancher en faveur d'une géométrie dotée de courbure (faible) à la suite du développement par Einstein de la théorie de la relativité générale qui, comme je l'ai exposé dans le n°61 de *Fusion*, a fait l'objet récemment de vérifications expérimentales significatives. Cette géométrie serait, par exemple, une géométrie de Riemann quadridimensionnelle (mais qui ne serait en fait qu'un espace de configuration puisqu'elle fait intervenir le temps comme élément d'espace).

On considère souvent Bernhard Riemann comme un théoricien des mathématiques en ignorant son œuvre de physicien. Jonathan Tennenbaum et Ralf Schauerhammer[13] ont réparé cette erreur dans leur article du n°45 de *Fusion* et ont montré que Riemann était en fait le véritable précurseur des idées relativistes.

Cependant, la courbure de notre univers ne serait sensible qu'à très grande échelle (cosmologique) et ne pourrait pas être mesurable facilement par la seule géométrie même, par exemple, à l'échelle du système solaire, opération qu'a tenté de faire Gauss avec l'insuccès que l'on sait sur un triangle ayant des côtés de « seulement » 100 km.

Quelles sont donc les propriétés géométriques permettant de vérifier de manière intrinsèque, c'est-à-dire au sein de l'espace lui même, le caractère non euclidien dudit espace ?

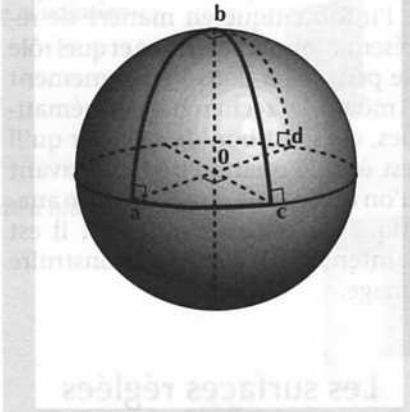
Il s'agit là d'un pont aux ânes, une description rebattue que l'on trouve exposée sans discernement dans les ouvrages de vulgarisation. Il n'est intéressant de la faire figurer ici que pour en montrer les limites.

Pour un espace de Riemann comme la sphère, par exemple, la courbure positive rend la somme des angles de tout triangle de cette surface supérieure à 180°. La différence entre la somme des angles de ces triangles et 180°, (somme des angles d'un triangle des espaces euclidiens) est d'autant plus grande que leur surface est elle-même plus grande (**Figure 5**).

Au contraire, pour une surface à courbure négative comme le paraboloïde hyperbolique, par exemple, la somme des angles des triangles est toujours inférieure à 180° et de la même manière la différence constatée varie aussi comme la surface des triangles. (**Figure 6**)

Incidemment, il est bon de revenir sur la notion de courbure avec l'espace euclidien pris comme référence. En effet, si le critère retenu pour défi-

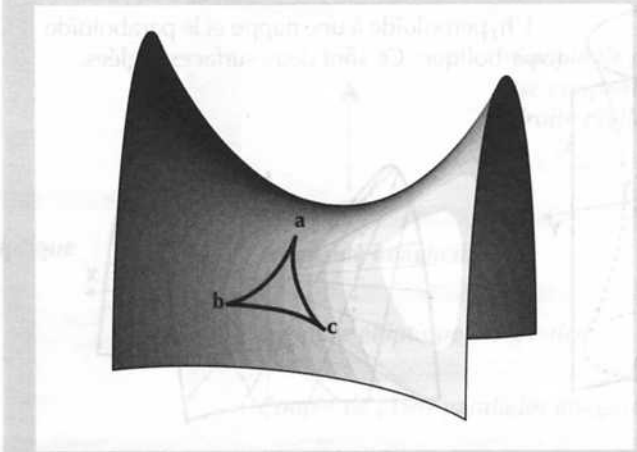
Figure 5 - Surface à courbure positive



La sphère est un espace bidimensionnel de Riemann à courbure positive constante. Un triangle de cette surface a la somme de ses angles toujours supérieure à 180°. Le triangle curviligne ABC, par exemple, a la somme de ses angles égale à 270°.

C'est la somme des angles d'un triangle qui traduit la courbure et non pas l'angle sous lequel d'un point on voit la totalité de l'espace. En effet, du point A de la sphère, par exemple, on voit l'espace bidimensionnel sous un angle de 360°, de la même manière que si cet espace était plan.

Figure 6 - Surface à courbure négative



Sur le paraboloïde hyperbolique, surface à courbure négative, la somme des angles du triangle ABC est inférieure à 180°.

nir une surface euclidienne, est celui de la somme des angles de ses triangles égale à 180° (corollaire du postulat d'Euclide) on doit alors constater que les surfaces planes ne sont pas les seules surfaces euclidiennes. En effet, les triangles tracés sur un cylindre, ou sur un cône ou même sur une bande de Mœbius, ont aussi la somme de leurs angles égale à 180° bien que ces surfaces résultent de courbures du plan. Elles devront cependant être considérées comme des espaces bidimensionnels à courbure nulle et ceci par ce qu'elles sont toujours applicables sur le plan sans froissements ni déchirures (il est bon de noter aussi que, dans ce cas, leur métrique n'est pas modifiée et il suffit de tracer un triangle sur une feuille de papier plane puis d'enrouler celle-ci sur elle-même pour vérifier que la valeur des angles du triangle est demeurée inchangée de même que la longueur de ses côtés).

Il faudra donc définir la courbure à partir d'autres critères comme, par exemple, la non applicabilité sur le plan et on appellera cette courbure, courbure de Gauss. La sphère est alors un espace à courbure positive constante ; l'ellipsoïde, un espace à courbure positive variable entre deux extrema ; la pseudosphère de Beltrami, un espace à courbure négative constante et le paraboloïde hyperbolique un espace à courbure négative variable entre deux extrema. Bien entendu aucune de ces surfaces n'est applicable sur un plan.

La question qui se pose maintenant est de savoir si ces notions qui paraissent si évidentes en ce qui concerne les variétés bidimensionnelles sont transposables à plus de deux dimensions et plus particulièrement à notre espace tridimensionnel immédiat, considéré jusqu'ici comme une extension euclidienne à trois dimensions du plan bidimensionnel.

Les espaces à trois dimensions

Si la connaissance des surfaces a atteint un grand développement, il en va autrement pour les variétés à trois dimensions. En effet, alors que pour les espaces bidimensionnels il est possible de visualiser une surface même très compliquée ou refermée sur elle-même à partir de notre espace tridimensionnel, rien de comparable n'est possible pour nous en ce qui concerne les espaces tridimensionnels, de telle sorte que leur conception et leur étude ne peuvent être faites le plus souvent que de manière abstraite. Aussi, le dénombrement de ces espaces et leur étude sont-ils encore restreints et ceci d'autant plus que ces variétés sont probablement en très grand nombre (infini ?).

Bien qu'on ne puisse pas visualiser directement ces espaces, on a mis au point des outils conceptuels permettant d'étudier certains de leurs caractères. La topologie, par exemple, prend en compte les propriétés des objets géométriques conservées lors de déformations continues et permet ainsi de déterminer le genre d'une variété et donc ce qui ne varie pas lorsqu'on la déforme, à la condition de ne pas la déchirer ou la percer.

Une des difficultés de l'observation (intrinsèque) de l'espace dans lequel nous vivons consiste à savoir si ledit espace est refermé sur lui-même.

On pourrait en effet penser, par analogie avec ce qu'on constate à deux dimensions, que notre espace (euclidien) pourrait avoir la structure d'un 3-cylindre ou d'un 3-cône.

Pour effectuer une telle étude, il existe la méthode des *« collages abstraits »* qui facilite la compréhension des propriétés spatiales de certaines de ces variétés.

A deux dimensions, on part du quadrilatère. A partir de ce quadrilatère que l'on courbe selon sa plus petite dimension, on obtient un cylindre en collant les deux bords opposés (il s'agit alors d'un collage réel), puis on courbe ce cylindre de manière à abouter ses deux extrémités que l'on colle elles aussi ; on obtient alors un tore.

Ce qui est remarquable dans une telle opération, c'est qu'elle a son équivalent virtuel dans la vie de tous les jours et ce sont les enfants qui en sont les témoins coopératifs. En effet, les jeux « d'arcade » s'opèrent en réalité sur un tore virtuel qui n'est rien d'autre que l'écran rectangulaire d'un téléviseur. Dans ces jeux, tout mobile qui, par exemple, vient de disparaître à droite de l'écran réapparaît immédiatement et à la même hauteur à gauche du même écran, autrement dit le côté droit de l'écran est abouté virtuellement au côté gauche. Il en est de même pour les côtés bas et hauts de cet écran, de telle sorte que ce dernier peut être considéré, en effet, comme un tore virtuel intrinsèque et les protagonistes du jeu se déplacent donc à la surface du tore en question (comme il le ferait, par exemple, sur la chambre à air d'un pneu).

Cette méthode de collage abstrait peut aider à comprendre la géométrie de variétés difficiles à visualiser et est appliquée à l'étude des variétés à trois dimensions. Elle permet, en effet, à partir d'un parallélépipède dont les faces sont repérées, de concevoir par exemple un 3-tore virtuel dont il serait très difficile de faire l'étude autrement.

Ce sont surtout les astronomes et les astrophysiciens qui utilisent une telle méthode pour établir des modèles d'univers. En effet, on peut remplacer le parallélépipède qui sert de « guide » par divers polyèdres (ou polytopes) à nombreuses faces et par un jeu de combinaisons entre faces prises deux à deux, par exemple, faire l'étude d'un grand nombre de variétés à trois dimensions.

A trois dimensions, on part toujours comme guide d'un polytope fondamental à au moins huit sommets, c'est-à-dire d'un polyèdre où l'on peut trouver des faces qui n'ont aucun côté ni sommet commun, ce qu'on ne peut évidemment pas faire à partir du simplexe, le tétraèdre.

Cette question est en relation avec les problèmes de « remplissage » de l'espace. A deux dimensions, il s'agit d'un « pavage » et c'est ce terme qui par extension sera employé généralement.

La géométrie des n-pavages

Un pavage est un remplissage de l'espace effectué sans lacunes ni recouvrements au moyen de polytopes dudit espace.

Seuls nous intéresseront ici les pavages effectués avec un seul type de polytope (à la différence des pavages de Penrose).

Le pavage élémentaire est évidemment celui effectué à partir du simplexe ; c'est le pavage simplicial. Il nous conduira à définir une grandeur fondamentale découlant de la notion de voisinage, que j'appellerai *la coordinance entre points de l'espace considéré* (qui sont les sommets des poly-

topes effectuant le remplissage). *Ce procédé permet d'obtenir le graphe des diverses structures spatiales* et donne des renseignements intéressants sur certaines de leurs propriétés

• **A une dimension**, le pavage simplicial est immédiat, il est réalisé par une suite de segments. Chaque point est en relation avec deux autres points de l'espace, la coordinance est alors 2, aussi bien pour une droite que pour une hélice.

• **A deux dimensions**, la question se complique déjà.

- La coordinance 6

Pour le plan, aucun problème : six triangles accolés par un de leurs sommets forment un motif simplicial à structure répétitive qui suffit à paver toute l'étendue de la surface et ceci jusqu'à l'infini. La coordinance 6 assure donc le pavage simplicial du plan selon un réseau à structure hexagonale (**Figure 7a**). En ne pavant le plan qu'avec des triangles équilatéraux (donc tous égaux), on obtient des lignes réticulaires qui sont des droites.

- La coordinance 7

Par contre, et c'est là une des propriétés nouvelles que l'on rencontre au fur et à mesure que le nombre de dimensions augmente, on constate que la coordinance simpliciale 7 est possible sur une surface, mais seulement à condition de donner une courbure de Gauss à cette surface en l'occurence, une courbure négative (**Figure 7b**).

- La coordinance 5

Il en est de même pour la coordinance 5, mais cette fois-ci, il s'agit d'une surface impérativement refermée sur elle-même (**Figure 7c**).

- La coordinance 4

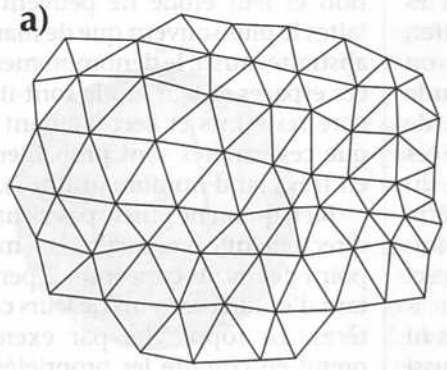
Elle est particulièrement démonstrative en ce sens qu'elle est caractéristique de surfaces bien connues : la sphère (et plus généralement l'ellipsoïde) une surface fermée et la pseudosphère de Beltrami, une surface ouverte (**Figure 7d**). La sphère par exemple est une surface qui peut être pavée entièrement selon une coordinance 4 par huit de ses simplexes qui sont des triangles curvilignes équilatéraux dont chacun des trois angles mesure alors 90° (Figure 5).

• **A trois dimensions**

Il est aisé de considérer un certain nombre de valeurs de coordinances

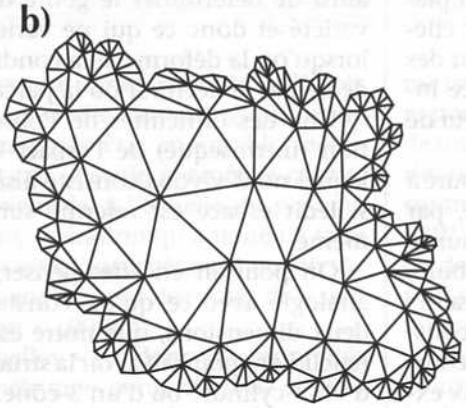
Figure 7 - Les coordinances 6, 7, 5 et 4

a)



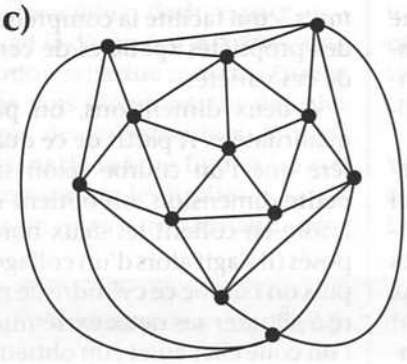
Seule la coordinance simpliciale 6 est compatible avec une surface plane ; on peut continuer le pavage à l'infini avec des triangles quelconques. Avec des triangles équilatéraux (simplexes réguliers), les lignes réticulaires sont des droites.

b)



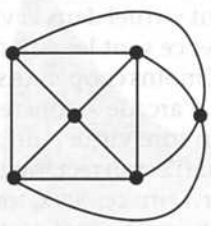
La coordinance simpliciale 7 est incompatible avec le plan. Il est impossible de poursuivre le pavage du plan de cette manière ainsi que la montre la figure. Seule une surface à courbure négative permet une telle coordinance.

c)

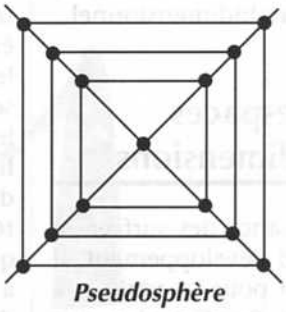


La coordinance simpliciale 5 n'est compatible qu'avec une surface fermée.

d)



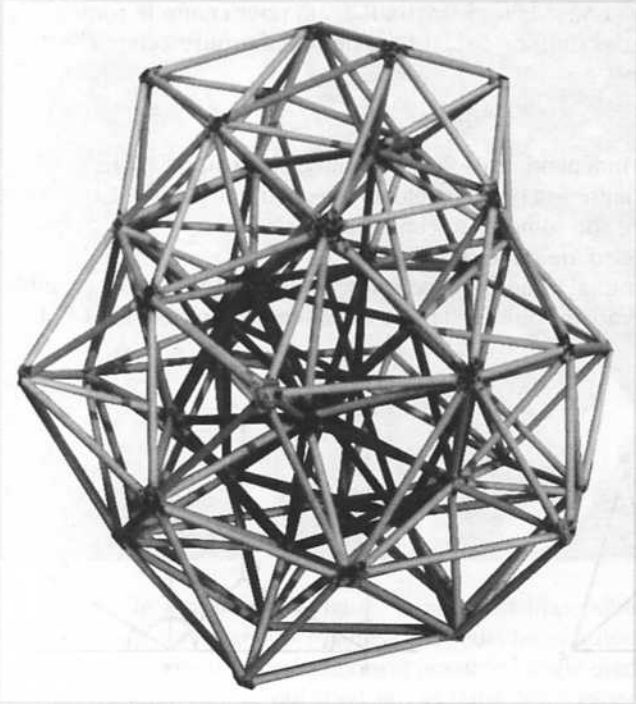
Sphère



Pseudosphère

La coordinance 4 est compatible soit avec une surface fermée à courbure positive, la sphère, soit plus généralement l'ellipsoïde, ou encore avec une surface ouverte à courbure négative : la pseudosphère.

Figure 8

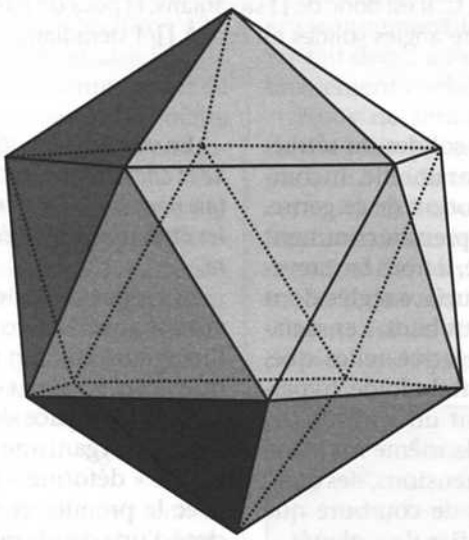


On pourrait penser que la coordinance 12 résulte pour chaque élément du réseau de l'agencement de trois couples de droites sécantes en un même point O (12 demi droites issues de O), les droites de chaque couple faisant entre elles un angle de 60° et chaque couple déterminant de la sorte un plan faisant un angle tel avec les deux autres qu'on obtienne par répétition du motif un « pavage » de l'espace par son simplexe, le tétraèdre régulier. Ce pavage ferait alors apparaître des chaînes d'icosaèdres imbriqués constitués chacun par l'accolement de vingt tétraèdres autour de chacun des nœuds du réseau.

Effectivement, comme le montre la figure, il est possible de commencer à construire un tel modèle, mais on se rend vite compte qu'au-delà de trois à quatre séquences tétraédriques autour d'un icosaèdre de départ, on est obligé de « tricher » fortement en jouant sur la longueur des segments assemblés et on constate que les « plans » réticulaires prennent une courbure importante et mal définie obligeant à suspendre la construction.

Les figures 9 et 10 permettent de mieux comprendre les raisons de l'impossibilité d'un tel pavage de notre espace supposé euclidien par son simplexe le tétraèdre.

Figure 9 - L'icosaèdre régulier



L'icosaèdre est un polytope (un polyèdre) qui comporte vingt faces constituées par des triangles équilatéraux et douze sommets. On pourrait penser que ces faces sont les bases de vingt tétraèdres réguliers assemblés par leur sommet commun en un point qui serait le centre de la sphère circonscrite passant donc par les douze sommets. Il n'en est rien. Il est impossible de loger de cette manière vingt tétraèdres dans un icosaèdre. La figure 10 en donne une preuve évidente.

donnant le graphe tridimensionnel d'espaces variés.

- La coordinance 6

Elle aboutit, par exemple, à un graphe correspondant à un espace tridimensionnel refermé sur lui-même.

Cependant, en se livrant à une telle étude, *on constate l'existence d'un fait a priori surprenant. Il tient à ce qu'aucune coordinance simpliciale des graphes tridimensionnels que nous pouvons construire dans notre espace réel ne permet d'aboutir à un réseau dont les surfaces réticulaires soient des plans,* et ceci même en tentant de ne « paver » l'espace qu'avec des tétraèdres réguliers (donc tous égaux).

- La coordinance 12

Elle est le pendant tridimensionnel de ce que donne la coordinance 6 pour les surfaces (réseau hexagonal euclidien bâti à partir du triangle équilatéral).

Elle devrait correspondre à un réseau icosaédrique, (vingt tétraèdres ordonnés autour d'un même point dont les bases forment les vingt faces de chaque icosaèdre du réseau). Elle aboutit dans l'espace physique tel que nous l'observons à définir une variété tridimensionnelle à forte courbure gaussienne (**Figure 8**).

La raison de ces faits est donnée par l'étude de l'icosaèdre régulier (**Fi-**

gure 9) de notre espace qui devrait être formé par l'accolement par leurs faces de vingt tétraèdres autour du centre de son cercle circonscrit de manière à former un angle solide au centre de 4 Π stéradians, angle solide (**Encadré 2**) sous lequel doit être vue la totalité de l'espace tridimensionnel. Or, dans l'espace qui est le nôtre, un tel accolement est impossible. La raison tient à ce que l'angle dièdre que forment les faces du tétraèdre régulier prises deux à deux est non pas de 72° mais de 70,52876° (70° 31' 42") selon nos critères de mesures trigonométriques. (Le calcul de quelques paramètres du tétraèdre et de l'icosaèdre figurent dans la référence 14).

Il s'ensuit que, dans notre curieux espace, une symétrie réticulaire d'ordre 5 est impossible, ce qu'en cristallographie l'expérience confirme. En effet, autour de chacun des douze sommets de l'icosaèdre (régulier) s'agencent cinq faces qui devraient être les surfaces de base de cinq tétraèdres réguliers accolés. Ceci ne serait possible que si l'angle dièdre entre les faces de chaque tétraèdre était égal à 360°/5 = 72°. Nous venons de voir que ce n'est pas le cas, un tel accolement laisse donc une frustration (vide) de 7,35620° (**Figure 10**).

Ainsi, nous sommes obligés de conclure que la surface périmétrique de l'icosaèdre régulier, qui devrait pouvoir être considérée comme une figure délimitant un volume de composition simpliciale sans courbure, délimite en fait un élément d'espace qui nous apparaît « froissé ». Et la répétition du motif icosaédrique détermine donc un réseau tridimensionnel qui nous parait être celui d'un espace courbe.

La question qui se pose est donc la suivante : que faut-il retenir pour définir de manière intrinsèque le caractère « euclidien » ou non d'un espace physique à plus de deux dimensions supposé homogène et isotrope ? Les propriétés de son simplexe ou le respect des conditions du cinquième postulat d'Euclide (qui rappelons-le ne s'applique stricto sensu qu'au simplexe de l'espace à deux dimensions) ? Le fait que nous puissions tracer sur les plans de notre espace des triangles dont la somme des angles est selon nos critères de mesure égale à 180° est-il suffisant pour nous permettre de conclure que cet espace est euclidien ? Alors que la somme des angles solides du tétraèdre dudit espace parait, elle, incompatible avec une notion de ce genre.

Pour mieux comprendre comment se pose le problème, il nous faut revenir à la notion de surface réglée dont il a été question plus haut. Les surfaces à courbure négative telles que, par exemple, le paraboloïde hyperbolique comportent une infinité de lignes droites ; de la même manière, il existe, à trois dimensions, des espaces abstraits dotés de courbure que l'on pourrait qualifier de « planés », c'est-à-dire des espaces pouvant être considérés comme générés par les mouvements de plans (translations et rotations). Il existe donc dans de tels espaces une infinité de plans sur lesquels les triangles qui peuvent y être tracés ont bien sûr la somme de leurs angles égale à 180°, propriété parfaitement compatible avec leur caractère d'espaces courbes.

En vérité, *la question est très complexe et elle le sera d'autant plus pour nous que nous sommes peut-être nous-mêmes les êtres d'une géométrie à forte courbure.*

Si l'espace intérieur (que nous devons concevoir comme froissé) de l'icosaèdre était en réalité sans courbure, ceci voudrait dire que c'est notre propre espace de référence, celui de notre organisme même, qui est en réalité « déformé » par comparaison avec le premier et devrait être ainsi doté d'une courbure qui corresponde à ce type d'état.

Supposons que l'espace du réseau tridimensionnel icosaèdrique soit réellement celui d'un espace sans courbure (surfaces réticulaires planes, alors qu'elle nous paraissent courbes), ceci voudrait donc dire que l'angle dièdre entre faces du tétraèdre régulier de ce réseau, qui nous parait en fonction de notre propre espace

Encadré 2 - La notion d'angle solide et le stéradian

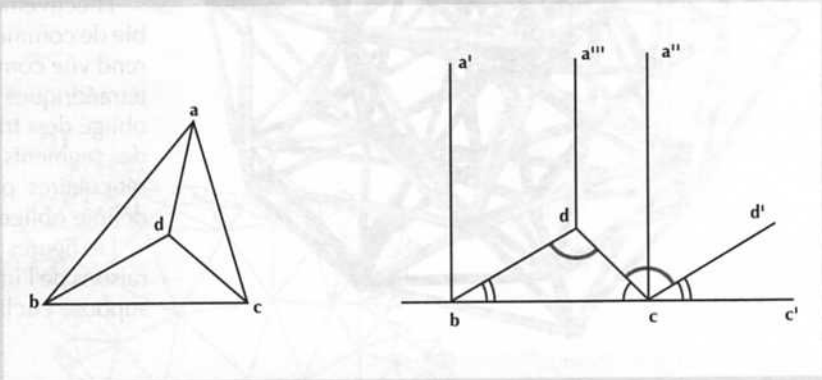
Soit un cône et une sphère de rayon R ayant pour centre le sommet du cône. Soit S l'aire de la portion de la surface de la sphère qui est comprise dans le cône. Le rapport

$$\text{Omega} = \frac{S}{R^2}$$

est un nombre indépendant de R. Le nombre Oméga mesure l'angle solide du cône. Ce raisonnement peut être étendu au cas d'une pyramide de forme quelconque ayant son sommet au centre de la sphère.

L'unité d'angle solide est le stéradian.

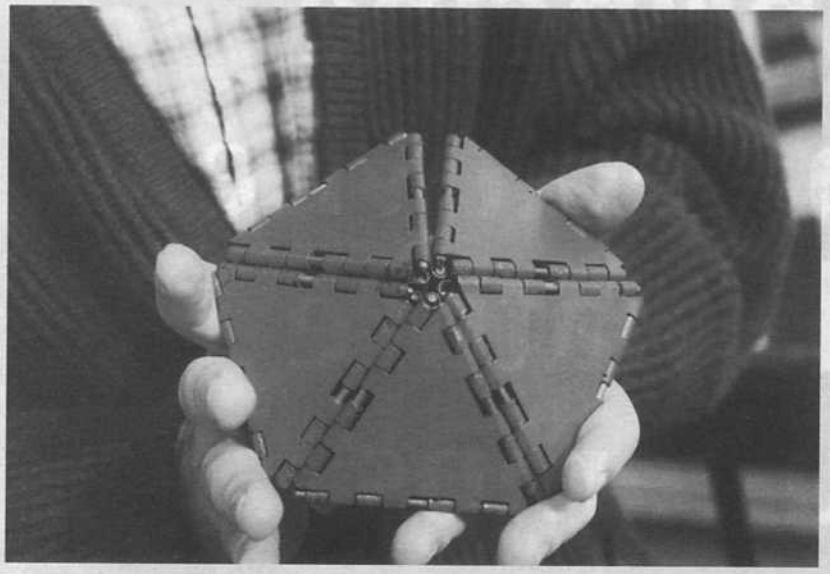
D'un point, la totalité de l'espace est généralement vue sous un angle solide de 4 Π stéradians puisque la surface totale de la sphère est 4 Π R^2



Pour obtenir la somme des angles solides du tétraèdre ABCD, on peut passer au cas limite où A est rejeté à l'infini. Cet angle solide doit être considéré comme nul et la somme des angles solides du tétraèdre est alors égale à celle des angles solides au sommet commun C des trois pyramides accolées CBDA'' CDD'A'' et CD'C'A''.

La somme de ces angles solides est le quart de l'angle solide total de l'espace au point C. Il est donc de Π stéradians. Et pour un tétraèdre régulier, chacun des quatre angles solides est égal à Π/4 stéradians.

Figure 10



Comme le montre cette figure, il nous est impossible d'accoler « en couronne » cinq tétraèdres réguliers par leurs faces autour d'un axe commun. Pour qu'une telle opération soit possible l'angle dièdre des tétraèdres devrait mesurer 72° ce qui n'est le cas dans notre espace puisque notre trigonométrie lui attribue 70°31'42". La vue par un de ses sommets d'un icosaèdre nous donne donc une image fallacieuse de symétrie d'ordre 5. Cette symétrie ne peut pas pour nous être une symétrie du réseau tridimensionnel, et l'angle dièdre entre faces de l'icosaèdre n'est pas égal à deux fois l'angle dièdre du tétraèdre régulier.

de référence et de la trigonométrie qui en découle, être de 70°31'42", mesure en réalité 72° et que l'angle solide à chacun des sommets de ce tétraèdre qui nous parait de même être de $\Pi/4$ stéradians mesure en réalité $\Pi/5$ stéradians puisque la réunion de vingt d'entre eux mesure $4\,\Pi$ stéradians au centre de la sphère circonscrite de l'icosaèdre. La coordinance simpliciale de cet espace sans courbure serait effectivement entière et égale à 12 ce qui semble quand même plus cohérent qu'une hypothétique coordinance non entière qui, à la vérité, n'a pas de signification évidente.

Donc nos résultats habituels seraient la marque d'un espace courbe : angle solide aux sommets du tétraèdre régulier égal à $\Pi/4$ stéradians (au lieu de $\Pi/5$), somme de ses angles solides égale à Π stéradians (au lieu de $4\,\Pi/5$) et angle dièdre entre faces égal à 70°31'42" (au lieu de 72°). *Nous serions alors incapables de nous rendre compte directement de l'existence d'une telle courbure puisque nous y participons nous-mêmes et que notre trigonométrie y est adaptée* et l'espace de notre environnement immédiat nous paraîtrait donc, à l'examen superficiel, faussement euclidien.

Nous ne serions de la sorte pas mieux lotis que les habitants de l'espace de Poincaré décrits au début de cet article et il nous faudrait revoir en fonction de ces faits certains des éléments et des lois d'une physique et même d'une mathématique primitivement établies à partir de données de base inadéquates. ■

Bibliographie

1. Boi L., *Le problème mathématique de l'espace*, Springer Verlag, Berlin.
2. Poincaré H., *La science et l'hypothèse*, Flammarion, Paris, pp. 83 à 87, 1902.
3. Kendall M. G., *A Course in the Geometry of n Dimensions*, Griffin, Londres, 1961.
4. LaRouche L. H., *The Science of Christian Economy*, Schiller Institute, Washington, 1991.
5. Abelson H., di Sessa A., *Turtle Geometry*, The MIT Press Cambridge, Etats-Unis ,1981.
6. Cartan E., *Œuvres complètes*, Editions du CNRS, Paris, 1984.
7. Greenberg M. J., *Euclidian and Non-Euclidian Geometries*, Freeman, New York, 1994.
8. Vygodski M., *Aide-Mémoire de Mathématiques*, Mir, Moscou, 1973.
9. Apery F., « La Surface de Boy », *Revue du Palais de la Découverte*, 1987, 16 24-46.
10. Saumont R., *Analyse Dimensionnelle et Similitude en Physique Fondamentale*, Les Editions Européennes, Antony, 1988.
11. Lochak G., *La géométrisation de la physique*, Flammarion, Paris, 1994.
12. Lobatchevski N., *La théorie des parallèles*, Monom, 1980, distribué par Blanchard Paris (traduit de l'allemand, Berlin, 1840).
13. Tennenbaum J. Schauerhammer R., « La méthode géométrique de Bernhard Riemann », *Fusion*, n°45, Mars-Avril 1993.
14. Sortais Y. et R., *Géométrie de l'espace et du plan*, Hermann, Paris, 1993.
15. Bonola R., *Non-Euclidian Geometry*, Dover, New York, 1955 (traduit de l'Italien).
16. Connes A., *Géométrie Non Commutative*, InterEditions, Paris, 1990.
17. *Encyclopédie Francaise*, Paris, 1937, La Géométrie et la Théorie des Groupes 1.88.12, Topologie 1.90.9.
18. Hilbert D., *Les fondements de la Géométrie*, Dunod, Paris, 1971 (traduit de l'allemand : *Grundlagen der Geometrie Teubner*, Stuttgart, 1899).
19. Lehmann D., Sacre C., *Géométrie et topologie des surfaces*, PUF, Paris, 1982.
20. Nikulin V. V., Shafarevich I. R., *Geometries and Groups* (traduit du russe), Springer, Berlin, 1987.
21. Priest C., *Le monde inverti*, Calmann-Levy, Paris, 1975 (traduit de l'anglais : *The Inverted World*, 1974).
22. Rucker R., *La quatrième dimension*, Seuil, Paris, 1985 (traduit de l'américain).
23. Saumont R., « La généralisation des lois de la physique », *Fusion*, nos 59-60-61, Janvier-Juin 1996.
24. Sawyer W. W., *Introduction aux Mathématiques* (traduit de l'américain), Payot, 1996.
26. Sivardiere J., *La symétrie en mathématiques*, physique et chimie, Presses Universitaires de Grenoble, 1995.
27. Tennenbaum J., « Un modèle topologique de la génération des particules », *Fusion*, n°50, Mars-Avril 1994.
28. Wallace P. R., *Paradox Lost*, Springer-Verlag, New York, 1996.
29. Weyl Hermann Raum, *Zeit und Materie*, 1918.