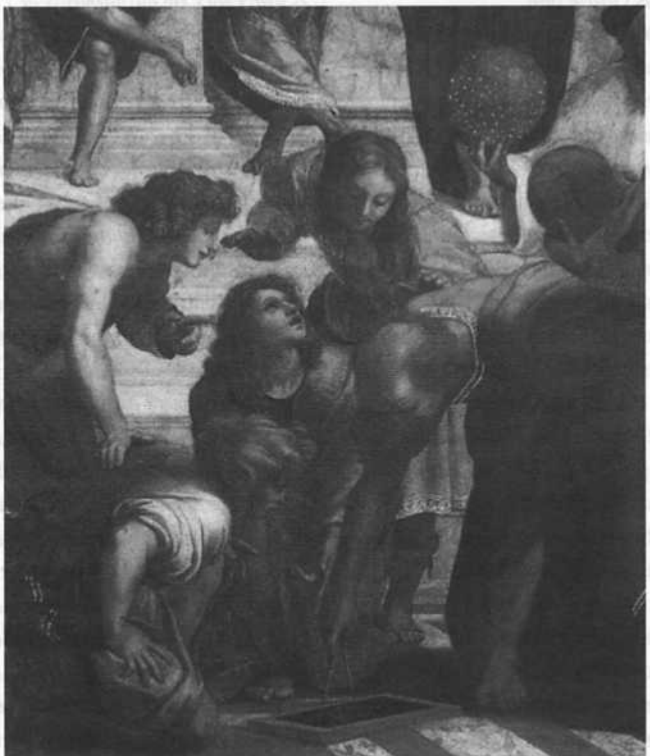
Redécouvrir la méthode d'Archimède



Connu en tant que géomètre et mathématicien, Archimède fut surtout l'auteur d'une méthode scientifique féconde. Nous allons ici retracer, à travers de nombreux exemples, sa démarche qui l'amena souvent à dire « Eurêka ! ».

BOB ROBINSON

Syracuse fut construite par les Grecs de Corinthe sur le sud-est de la côte sicilienne, sept cents ans avant notre ère. Ses temples et monuments font partie, avec le Parthénon, des vestiges grecs les plus impressionnants. Au Vème siècle avant J.-C., Syracuse était devenue l'une des plus importantes et puissantes villes de Grèce et abritait, à son apogée, 1 million d'habitants. C'est là que naquit Archimède en 287 avant J.-C.

L'esprit scientifique de la Grèce antique prit son essor à l'Académie d'Athènes, fondée par Platon en 387 avant J.-C., et s'est étendu à travers le monde dans le sillage des conquêtes d'Alexandre le Grand (356 à 323 avant J.-C.). Celui-ci construisit sa capitale — Alexandrie — non pas dans son pays natal, la Macédoine, mais au carrefour du commerce mondial, sur le delta du Nil. Il établit alors un musée universel et une bibliothèque riche de quelque 750.000 « volumes » (rouleaux de parchemins) provenant de Grèce, d'Inde, de Rome, d'Egypte, etc. Le bibliothécaire du musée d'Alexandrie, Eratosthène[1], astronome et géomètre de premier ordre, fut aussi en contact avec Archimède.

Après la mort d'Alexandre le Grand, la constitution républicaine de Solon d'Athènes, véritable socle de la cité-Etat grecque antique, fut entièrement balayée par les luttes d'empires, au profit de la vision spartiate de Lycurge. Au temps d'Archimède, Rome et Carthage étaient devenues des « superpuissances » se disputant, à travers les guerres Puniques, le contrôle du monde méditerranéen. Même la bibliothèque d'Alexandrie — véritable mémoire de la vie intellectuelle — ne sera pas épargnée, puisqu'elle sera incendiée lors de la conquête de l'Egypte menée par Jules César en l'an 48 avant notre ère.

Toutefois, il y a bien une chose que l'empire Romain n'a pas pu détruire, c'est l'apport considérable d'Archimède et de ses amis comme Eratosthène.

Surtout connu comme géomètre et mathématicien, Archimède fut un génie universel. La redécouverte et la traduction de ses travaux au XVème siècle, et leur application à la quadrature du cercle par Nicolas de Cuse en 1450, furent (avec les dialogues de Platon) le fondement de la plupart des percées technologiques de le Renaissance. Que ce soit Léonard de Vinci avec bon nombre de ses inventions mécaniques, Kepler avec l'utilisation en astronomie et en cristallographie des cinq solides réguliers platoniciens et des treize solides semi-réguliers d'Archimède, ou encore, plus tard, Pascal, Huygens et Leibniz avec le développement du calcul intégral, tous sont redevables à Archimède.

La découverte d'Archimède

L'élaboration du concept de centre de gravité et ses applications constituent la principale découverte scientifique d'Archimède. En géométrie, ce concept se rapporte à l'action circulaire, les sections coniques, les spirales et les sphères. La plupart de ses inventions utilisant le levier et la vis découlent de cette percée.

Il est important de distinguer, d'une part, l'utilisation de la balance dans le commerce, par exemple (existant bien avant Archimède) et, d'autre part, le centre de gravité en tant que concept universel des lois naturelles. Ce concept est au cœur de tous les travaux d'Archimède et c'est sur ce fondement qu'il unifie géométrie et physique en un seul domaine cohérent. Deux de ses travaux, *Equilibre des plans ou des centres de gravité des plans* et *La méthode,* traitent explicitement de la question.

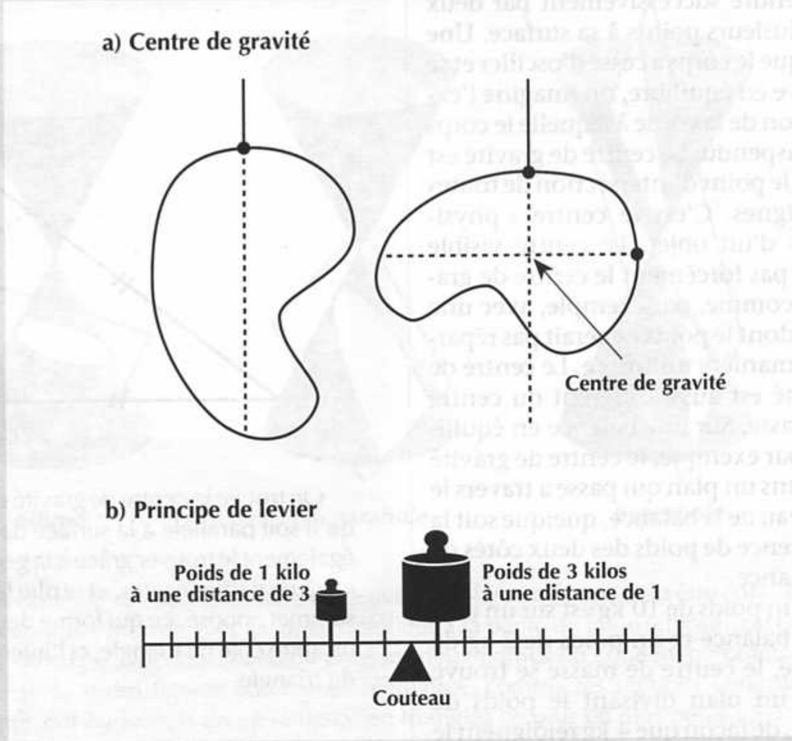
Le centre de gravité est un point tel que, si on s'imagine que l'on suspend un corps à ce point, quelque soit son orientation initiale, le poids reste à l'équilibre et le corps garde sa position initiale (**Figure 1**). Il peut aussi être conçu comme l'intersection de tous les axes autour desquels un corps en chute libre peut tourner, quelque soit la direction de la rotation. Ainsi, une autre représentation du centre de gravité peut être « le centre d'inertie ». Pour que le centre de gravité soit fixe par rapport aux parties d'un corps, celles-ci doivent généralement être fixes les unes par rapport aux autres (mais ce n'est pas toujours le cas).

Le centre de gravité n'est pas forcément à l'intérieur d'un corps ou de l'une des parties composant le corps. Par exemple, dans un tore, le centre de gravité est dans le trou au milieu du tore. Si deux objets sont en équilibre sur deux côtés opposés d'un couteau de balance, le centre de gravité des deux objets, pris comme un ensemble avec le bras de la balance, est un point du plan perpendiculaire au bras de la balance qui passe par le couteau et non dans l'un des deux objets.

Dans une sphère, qu'elle soit pleine ou creuse comme une bulle de savon, le centre de gravité demeure au centre. De même dans un solide régulier ou semi-régulier.

Toutefois, tous les corps, quelque

Figure 1 - Le concept du centre de gravité



En utilisant ce concept du centre de gravité, Archimède, armé d'une balance, fut capable de mesurer et de comparer différentes surfaces curvilignes, solides et linéaires qui ne pouvaient pas l'être autrement, et leur découvrit des propriétés et des points communs.

Il compara cette méthode à la technique d'exhaustion, où on remplit à l'infini les volumes et les aires avec des unités de plus en plus petites, pour évaluer leur dimension asymptotiquement (voir figure 8). La méthode des centres de gravité utilise des égalités, et non des asymptotes ou des convergences.

Le centre de gravité, différent du centre de masse, est un point tel que si l'objet est suspendu par ce point, le poids du corps est à l'équilibre. A l'aide de ce concept, Archimède inventa plusieurs mécanismes fort utiles, parmi lesquels les leviers et la fameuse vis qui porte son nom.

Pour trouver le centre de gravité d'un objet assez petit pour être manipulé, il suffit de le suspendre successivement par deux ou plusieurs points à sa surface. Une fois que le corps a cessé d'osciller, et se trouve en équilibre, on imagine l'extension de la corde à laquelle le corps est suspendu. Le centre de gravité est alors le point d'intersection de toutes ces lignes.

La balance représentée en b) montre le principe du levier d'Archimède, où le produit des poids multiplié par la distance est égal des deux côtés. Ainsi, un poids de 1 kg situé à une distance de trois unités sur un côté du couteau de la balance, maintiendra en équilibre un poids de 3 kg situé à une distance de seulement une unité de l'autre côté.

soit leur forme, ont un et un seul centre de gravité. Pour trouver le centre de gravité d'un corps assez petit pour être manipulé, il suffit de le suspendre successivement par deux ou plusieurs points à sa surface. Une fois que le corps a cessé d'osciller et se trouve en équilibre, on imagine l'extension de la corde à laquelle le corps est suspendu. Le centre de gravité est alors le point d'intersection de toutes ces lignes. C'est le centre « physique » d'un objet. Le centre visible n'est pas forcément le centre de gravité, comme, par exemple, avec une roue dont le poids ne serait pas réparti de manière uniforme. Le centre de gravité est aussi différent du centre de masse. Sur une balance en équilibre, par exemple, le centre de gravité est dans un plan qui passe à travers le couteau de la balance, quelque soit la différence de poids des deux côtés de la balance.

Si un poids de 10 kg est sur un côté de la balance et un poids de 2 kg de l'autre, le centre de masse se trouve dans un plan divisant le poids de 10 kg, de façon que 4 kg rejoignent le poids de 2 kg pour diviser le poids total en deux fois 6 kg.

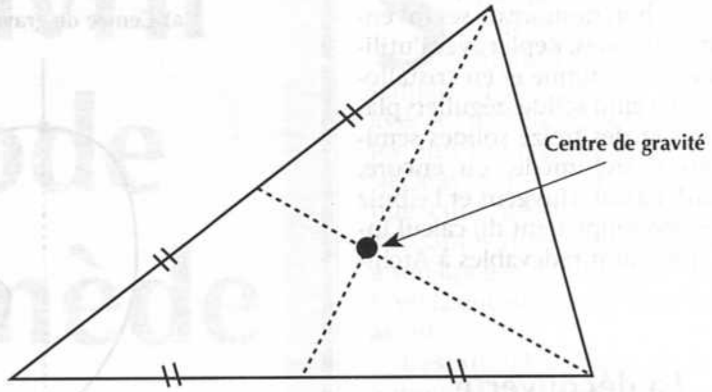
Le centre de gravité, d'autre part, sera dans un plan (incluant le couteau de la balance) cinq fois plus près du poids de 10 kg que du poids de 2 kg, mais ne passant pas nécessairement par le poids de 10 kg. Ce qui s'égalise, ou s'équilibre, au centre de gravité, c'est la masse multipliée par la distance du centre de gravité, et non pas la masse et la distance séparément.

Si les matériaux de construction sont homogènes et la figure symétrique, le centre visible, le centre de gravité et, dans ce cas, le centre de masse coïncident. Un carré, un rectangle ou un parallélogramme ont ainsi un centre de gravité assez évident, qui peut être déterminé comme l'intersection de ses diagonales.

Et à propos du triangle ? Si vous êtes familier avec la géométrie plane, vous devez savoir que l'aire d'un triangle sur un plan est égale à une demi fois sa base multipliée par sa hauteur. Ainsi, si nous traçons une médiane au niveau de la base du triangle, nous créons deux triangles, de même base et hauteur et aussi de même aire (**Figure 2**). Cette médiane ne forme pas le centre de gravité mais un axe de gravité ou un axe de rotation d'inertie, identique à l'axe autour duquel tournent une planète ou un gyroscope. Si nous traçons la médiane d'un autre côté du triangle, l'intersection avec la première médiane nous donnera un point unique qui est le centre de gravité du triangle de départ. On peut facilement démontrer que ce point sera toujours un tiers de la distance de la médiane.

Supposons maintenant que nous ayons deux triangles, adjacents ou non, mais fixés entre eux et d'aire égale. Le centre de gravité de l'ensemble des deux triangles sera le point du milieu de la droite reliant leurs deux centres de gravité. Cependant, qu'en est-il d'une surface qui ne peut pas être divisée en triangles ou d'une figure tridimensionnelle qui ne peut pas être divisée en pyramides ; par exemple, une surface curviligne autre qu'un cercle ou une sphère qui n'est pas parfaitement symétrique ? Qu'en est-il des sections coniques autres que le cercle, comme l'ellipse, la parabole ou l'hyperbole ? Qu'en est-il des surfaces et volumes produits par révolution des figures mentionnées, comme les ellipsoïdes et les paraboloïdes ? Qu'en est-il des parties de ces surfaces et volumes ? Et appliqué à la technologie, comme en navigation, qu'en est-il du centre de gravité d'un bateau afin de résister aux mers agitées. Voilà certaines des questions auxquelles Archimède a répondu.

Figure 2 - Le centre de gravité d'un triangle



On trouve le centre de gravité d'un triangle en le suspendant de telle façon qu'il soit parallèle à la surface de la Terre. Archimède démontre qu'on peut également le trouver grâce à la géométrie plane. Il divise la base d'un triangle en deux parties égales, et le plie le long de la ligne, du point de bissection au sommet opposé, ce qui forme deux triangles égaux ; il répète ce procédé sur un autre côté du triangle, et l'intersection des deux plis est le centre de gravité du triangle.

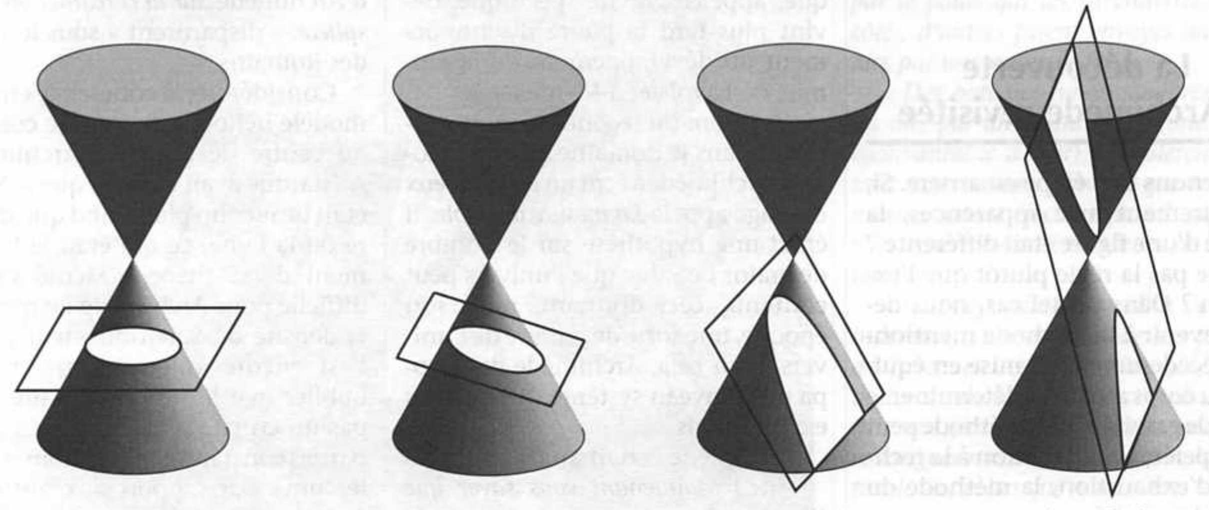
La technique « d'exhaustion »

On peut déterminer l'aire approximative de figures curvilignes, comme les sections coniques, en les divisant en triangles de plus en plus petits jusqu'à approcher le tracé de la courbe asymptotiquement, comme une limite. Cette technique, développée par Eudoxe, un étudiant de Platon qui vécut cent cinquante ans avant Archimède, est appelée « exhaustion ». Eudoxe l'utilisa avec succès pour évaluer les volumes et les aires des cônes et des troncs de cône.

Archimède lui-même utilisa cette technique pour déterminer que l'aire d'une section de parabole correspond exactement à 4/3 de l'aire du plus grand triangle que l'on peut inscrire (**Figure 4**). C'est ce qu'il appela la « quadrature de la parabole ».

De plus, comme les triangles composant la parabole sont organisés symétriquement autour de l'axe central de la parabole, Archimède fut capable de déterminer le centre de gravité des sections paraboliques en

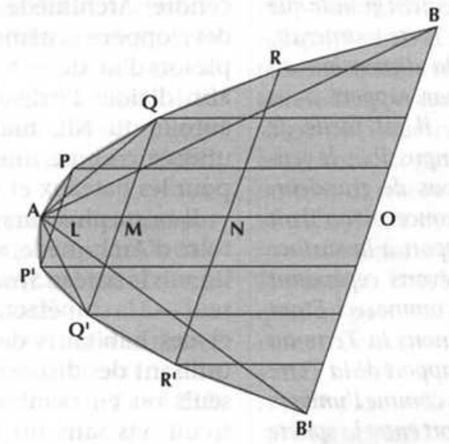
Figure 3 - Trouver le centre de gravité d'autres figures planes



Les « sections coniques » sont les figures obtenues en sectionnant le cône avec un plan. La coupe peut être parallèle à la base du cône (produisant un cercle), sectionner le cône avec un angle inférieur à la pente du cône (ellipse), ou être parallèle à cette pente (parabole), ou avec un angle supérieur, coupant ainsi les deux parties du cône (hyperbole).

Pour trouver le centre de gravité de la surface des figures curvilignes régulières, comme les sections coniques, Archimède utilise une technique développée par Eudoxe. Il divise la figure en triangles de plus en plus petits, dont la limite approche la courbe.

Figure 4 - La quadrature de la parabole



Grâce à la technique d'exhaustion, Archimède détermine la surface d'une parabole qui est exactement les 4/3 de la surface du plus grand triangle que l'on peut inscrire à l'intérieur de cette parabole. Il utilise une série de triangles organisés autour de l'axe central de la parabole.

O est le centre de la droite BB' qui délimite la base de la parabole. Donc ALMNO est la droite médiane du triangle ABB'. Les droites parallèles à ALMNO et passant par les points Q et Q', coupant BA et BA', forment ainsi les droites médianes des triangles respectifs BQA et B'Q'A. Cette construction de petits triangles remplit la parabole et permet de déterminer sa surface et son centre de gravité.

utilisant la même technique, comme il le montre dans son *Equilibre des plans*. Ceci lui permit de déterminer, dans son *Traité des corps flottants*, la forme de la coque d'un bateau pour que son centre de gravité soit tel qu'il reste en équilibre dans l'eau.

Toutefois, Archimède n'a jamais réussi à déterminer précisément l'aire d'un cercle ou sa circonférence de cette manière. Il ne trouva aucune façon de relier l'aire du cercle ou sa circonférence à son diamètre, à un triangle inscrit ou à un autre polygone inscrit dans le cercle, par un nombre connu qu'il soit entier, rationnel ou irrationnel, comme $\sqrt{2}$. Il eut quand même l'honnêteté de reconnaître son échec, contrairement à beaucoup d'autres. Ce qu'il arrive tout de même à faire, c'est mesurer un cercle avec une spirale, mais en restant dans le cadre de l'action circulaire.

Archimède ne pouvait évidemment qu'approcher π, symbole qu'il n'utilisait d'ailleurs pas. Il a néanmoins réussi à déterminer précisément l'aire d'un cercle ainsi que l'aire et le volume d'une sphère, en traitant π comme un nombre réel, même s'il n'a jamais pu (ni personne d'autre