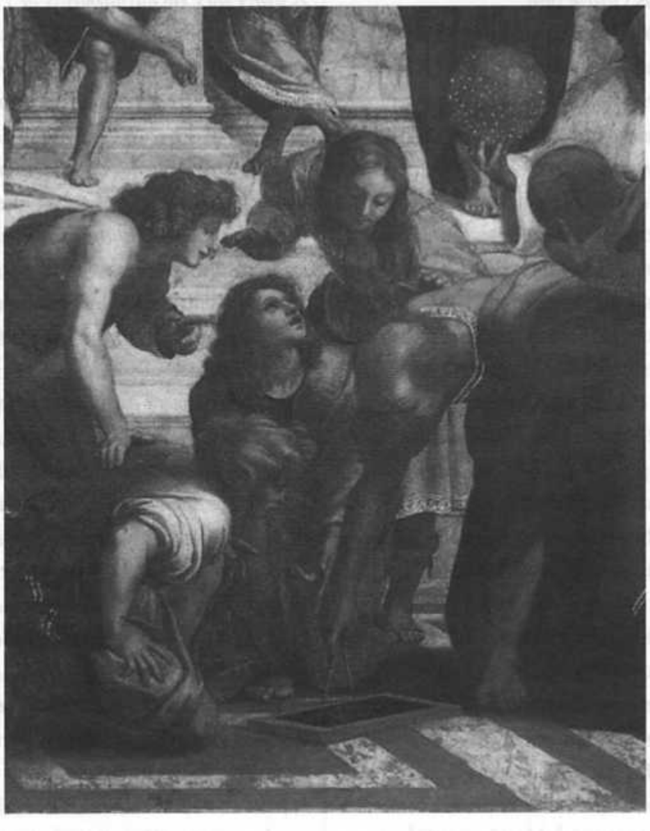
Redécouvrir la méthode d'Archimède



Connu en tant que géomètre et mathématicien, Archimède fut surtout l'auteur d'une méthode scientifique féconde. Nous allons ici retracer, à travers de nombreux exemples, sa démarche qui l'amena souvent à dire « Eurêka ! ».

BOB ROBINSON

Syracuse fut construite par les Grecs de Corinthe sur le sud-est de la côte sicilienne, sept cents ans avant notre ère. Ses temples et monuments font partie, avec le Parthénon, des vestiges grecs les plus impressionnants. Au Vème siècle avant J.-C., Syracuse était devenue l'une des plus importantes et puissantes villes de Grèce et abritait, à son apogée, 1 million d'habitants. C'est là que naquit Archimède en 287 avant J.-C.

L'esprit scientifique de la Grèce antique prit son essor à l'Académie d'Athènes, fondée par Platon en 387 avant J.-C., et s'est étendu à travers le monde dans le sillage des conquêtes d'Alexandre le Grand (356 à 323 avant J.-C.). Celui-ci construisit sa capitale — Alexandrie — non pas dans son pays natal, la Macédoine, mais au carrefour du commerce mondial, sur le delta du Nil. Il établit alors un musée universel et une bibliothèque riche de quelque 750.000 « volumes » (rouleaux de parchemins) provenant de Grèce, d'Inde, de Rome, d'Egypte, etc. Le bibliothécaire du musée d'Alexandrie, Eratosthène[1], astronome et géomètre de premier ordre, fut aussi en contact avec Archimède.

Après la mort d'Alexandre le Grand, la constitution républicaine de Solon d'Athènes, véritable socle de la cité-Etat grecque antique, fut entièrement balayée par les luttes d'empires, au profit de la vision spartiate de Lycurge. Au temps d'Archimède, Rome et Carthage étaient devenues des « superpuissances » se disputant, à travers les guerres Puniques, le contrôle du monde méditerranéen. Même la bibliothèque d'Alexandrie — véritable mémoire de la vie intellectuelle — ne sera pas épargnée, puisqu'elle sera incendiée lors de la conquête de l'Egypte menée par Jules César en l'an 48 avant notre ère.

Toutefois, il y a bien une chose que l'empire Romain n'a pas pu détruire, c'est l'apport considérable d'Archimède et de ses amis comme Eratosthène.

Surtout connu comme géomètre et mathématicien, Archimède fut un génie universel. La redécouverte et la traduction de ses travaux au XVème siècle, et leur application à la quadrature du cercle par Nicolas de Cuse en 1450, furent (avec les dialogues de Platon) le fondement de la plupart des percées technologiques de le Renaissance. Que ce soit Léonard de Vinci avec bon nombre de ses inventions mécaniques, Kepler avec l'utilisation en astronomie et en cristallographie des cinq solides réguliers platoniciens et des treize solides semi-réguliers d'Archimède, ou encore, plus tard, Pascal, Huygens et Leibniz avec le développement du calcul intégral, tous sont redevables à Archimède.

La découverte d'Archimède

L'élaboration du concept de centre de gravité et ses applications constituent la principale découverte scientifique d'Archimède. En géométrie, ce concept se rapporte à l'action circulaire, les sections coniques, les spirales et les sphères. La plupart de ses inventions utilisant le levier et la vis découlent de cette percée.

Il est important de distinguer, d'une part, l'utilisation de la balance dans le commerce, par exemple (existant bien avant Archimède) et, d'autre part, le centre de gravité en tant que concept universel des lois naturelles. Ce concept est au cœur de tous les travaux d'Archimède et c'est sur ce fondement qu'il unifie géométrie et physique en un seul domaine cohérent. Deux de ses travaux, *Equilibre des plans ou des centres de gravité des plans* et *La méthode*, traitent explicitement de la question.

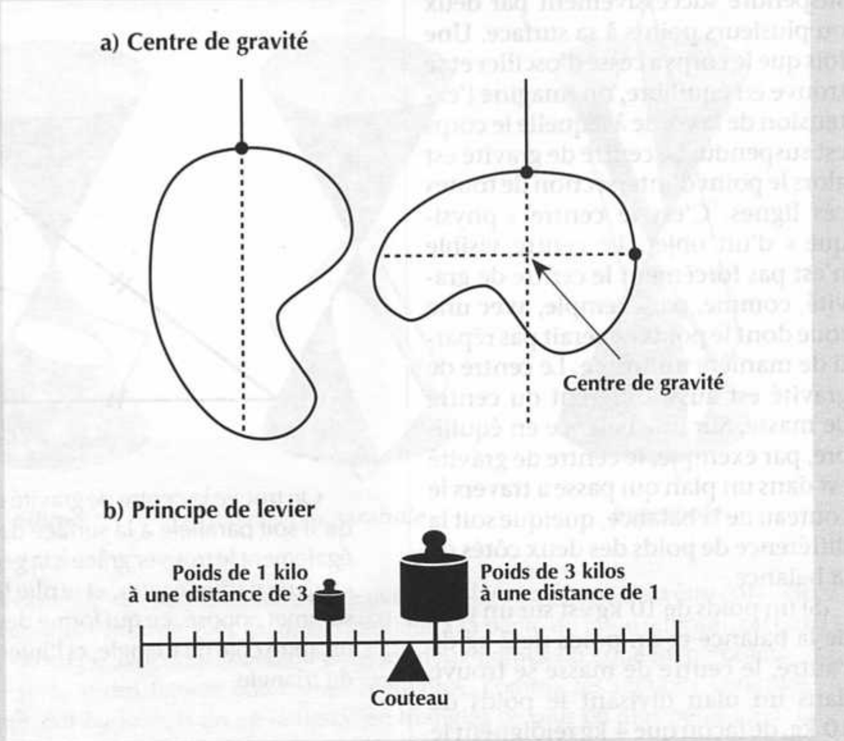
Le centre de gravité est un point tel que, si on s'imagine que l'on suspend un corps à ce point, quelque soit son orientation initiale, le poids reste à l'équilibre et le corps garde sa position initiale (**Figure 1**). Il peut aussi être conçu comme l'intersection de tous les axes autour desquels un corps en chute libre peut tourner, quelque soit la direction de la rotation. Ainsi, une autre représentation du centre de gravité peut être « le centre d'inertie ». Pour que le centre de gravité soit fixe par rapport aux parties d'un corps, celles-ci doivent généralement être fixes les unes par rapport aux autres (mais ce n'est pas toujours le cas).

Le centre de gravité n'est pas forcément à l'intérieur d'un corps ou de l'une des parties composant le corps. Par exemple, dans un tore, le centre de gravité est dans le trou au milieu du tore. Si deux objets sont en équilibre sur deux côtés opposés d'un couteau de balance, le centre de gravité des deux objets, pris comme un ensemble avec le bras de la balance, est un point du plan perpendiculaire au bras de la balance qui passe par le couteau et non dans l'un des deux objets.

Dans une sphère, qu'elle soit pleine ou creuse comme une bulle de savon, le centre de gravité demeure au centre. De même dans un solide régulier ou semi-régulier.

Toutefois, tous les corps, quelque

Figure 1 - Le concept du centre de gravité



En utilisant ce concept du centre de gravité, Archimède, armé d'une balance, fut capable de mesurer et de comparer différentes surfaces curvilignes, solides et linéaires qui ne pouvaient pas l'être autrement, et leur découvrit des propriétés et des points communs.

Il compara cette méthode à la technique d'exhaustion, où on remplit à l'infini les volumes et les aires avec des unités de plus en plus petites, pour évaluer leur dimension asymptotiquement (voir figure 8). La méthode des centres de gravité utilise des égalités, et non des asymptotes ou des convergences.

Le centre de gravité, différent du centre de masse, est un point tel que si l'objet est suspendu par ce point, le poids du corps est à l'équilibre. A l'aide de ce concept, Archimède inventa plusieurs mécanismes fort utiles, parmi lesquels les leviers et la fameuse vis qui porte son nom.

Pour trouver le centre de gravité d'un objet assez petit pour être manipulé, il suffit de le suspendre successivement par deux ou plusieurs points à sa surface. Une fois que le corps a cessé d'osciller, et se trouve en équilibre, on imagine l'extension de la corde à laquelle le corps est suspendu. Le centre de gravité est alors le point d'intersection de toutes ces lignes.

La balance représentée en b) montre le principe du levier d'Archimède, où le produit des poids multiplié par la distance est égal des deux côtés. Ainsi, un poids de 1 kg situé à une distance de trois unités sur un côté du couteau de la balance, maintiendra en équilibre un poids de 3 kg situé à une distance de seulement une unité de l'autre côté.

soit leur forme, ont un et un seul centre de gravité. Pour trouver le centre de gravité d'un corps assez petit pour être manipulé, il suffit de le suspendre successivement par deux ou plusieurs points à sa surface. Une fois que le corps a cessé d'osciller et se trouve en équilibre, on imagine l'extension de la corde à laquelle le corps est suspendu. Le centre de gravité est alors le point d'intersection de toutes ces lignes. C'est le centre « physique » d'un objet. Le centre visible n'est pas forcément le centre de gravité, comme, par exemple, avec une roue dont le poids ne serait pas réparti de manière uniforme. Le centre de gravité est aussi différent du centre de masse. Sur une balance en équilibre, par exemple, le centre de gravité est dans un plan qui passe à travers le couteau de la balance, quelque soit la différence de poids des deux côtés de la balance.

Si un poids de 10 kg est sur un côté de la balance et un poids de 2 kg de l'autre, le centre de masse se trouve dans un plan divisant le poids de 10 kg, de façon que 4 kg rejoignent le poids de 2 kg pour diviser le poids total en deux fois 6 kg.

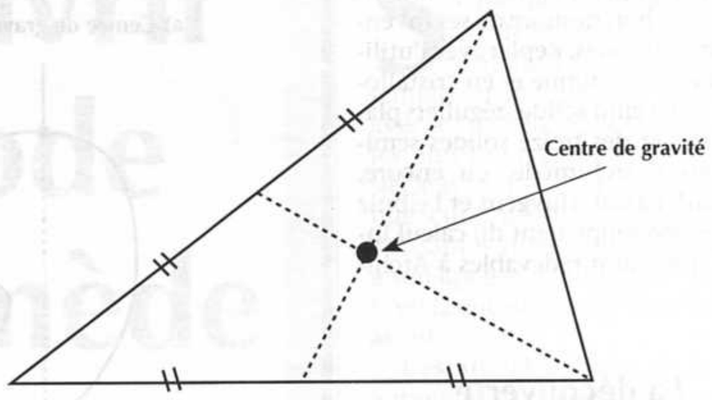
Le centre de gravité, d'autre part, sera dans un plan (incluant le couteau de la balance) cinq fois plus près du poids de 10 kg que du poids de 2 kg, mais ne passant pas nécessairement par le poids de 10 kg. Ce qui s'égalise, ou s'équilibre, au centre de gravité, c'est la masse multipliée par la distance du centre de gravité, et non pas la masse et la distance séparément.

Si les matériaux de construction sont homogènes et la figure symétrique, le centre visible, le centre de gravité et, dans ce cas, le centre de masse coïncident. Un carré, un rectangle ou un parallélogramme ont ainsi un centre de gravité assez évident, qui peut être déterminé comme l'intersection de ses diagonales.

Et à propos du triangle ? Si vous êtes familier avec la géométrie plane, vous devez savoir que l'aire d'un triangle sur un plan est égale à une demi fois sa base multipliée par sa hauteur. Ainsi, si nous traçons une médiane au niveau de la base du triangle, nous créons deux triangles, de même base et hauteur et aussi de même aire (**Figure 2**). Cette médiane ne forme pas le centre de gravité mais un axe de gravité ou un axe de rotation d'inertie, identique à l'axe autour duquel tournent une planète ou un gyroscope. Si nous traçons la médiane d'un autre côté du triangle, l'intersection avec la première médiane nous donnera un point unique qui est le centre de gravité du triangle de départ. On peut facilement démontrer que ce point sera toujours un tiers de la distance de la médiane.

Supposons maintenant que nous ayons deux triangles, adjacents ou non, mais fixés entre eux et d'aire égale. Le centre de gravité de l'ensemble des deux triangles sera le point du milieu de la droite reliant leurs deux centres de gravité. Cependant, qu'en est-il d'une surface qui ne peut pas être divisée en triangles ou d'une figure tridimensionnelle qui ne peut pas être divisée en pyramides ; par exemple, une surface curviligne autre qu'un cercle ou une sphère qui n'est pas parfaitement symétrique ? Qu'en est-il des sections coniques autres que le cercle, comme l'ellipse, la parabole ou l'hyperbole ? Qu'en est-il des surfaces et volumes produits par révolution des figures mentionnées, comme les ellipsoïdes et les paraboloïdes ? Qu'en est-il des parties de ces surfaces et volumes ? Et appliqué à la technologie, comme en navigation, qu'en est-il du centre de gravité d'un bateau afin de résister aux mers agitées. Voilà certaines des questions auxquelles Archimède a répondu.

Figure 2 - Le centre de gravité d'un triangle



On trouve le centre de gravité d'un triangle en le suspendant de telle façon qu'il soit parallèle à la surface de la Terre. Archimède démontre qu'on peut également le trouver grâce à la géométrie plane. Il divise la base d'un triangle en deux parties égales, et le plie le long de la ligne, du point de bissection au sommet opposé, ce qui forme deux triangles égaux ; il répète ce procédé sur un autre côté du triangle, et l'intersection des deux plis est le centre de gravité du triangle.

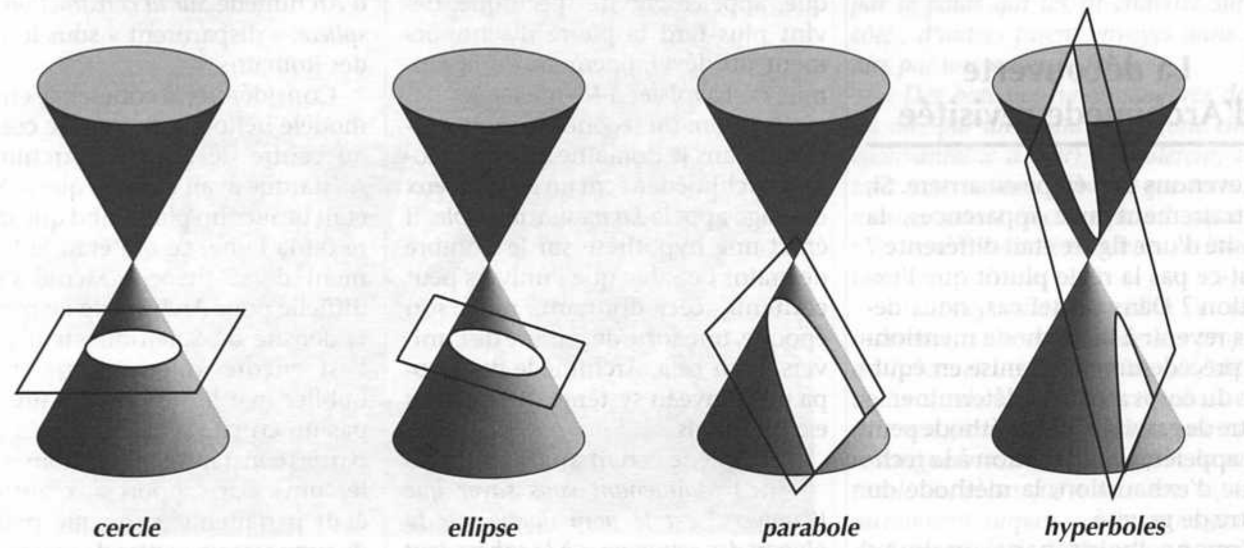
La technique « d'exhaustion »

On peut déterminer l'aire approximative de figures curvilignes, comme les sections coniques, en les divisant en triangles de plus en plus petits jusqu'à approcher le tracé de la courbe asymptotiquement, comme une limite. Cette technique, développée par Eudoxe, un étudiant de Platon qui vécut cent cinquante ans avant Archimède, est appelée « exhaustion ». Eudoxe l'utilisa avec succès pour évaluer les volumes et les aires des cônes et des troncs de cône.

Archimède lui-même utilisa cette technique pour déterminer que l'aire d'une section de parabole correspond exactement à 4/3 de l'aire du plus grand triangle que l'on peut inscrire (**Figure 4**). C'est ce qu'il appela la « quadrature de la parabole ».

De plus, comme les triangles composant la parabole sont organisés symétriquement autour de l'axe central de la parabole, Archimède fut capable de déterminer le centre de gravité des sections paraboliques en

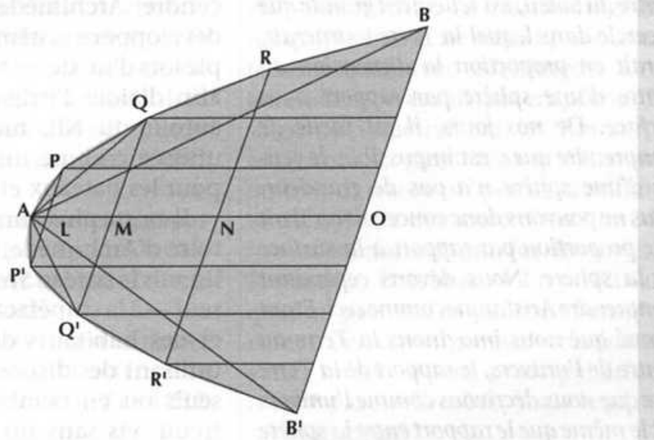
Figure 3 - Trouver le centre de gravité d'autres figures planes



Les « sections coniques » sont les figures obtenues en sectionnant le cône avec un plan. La coupe peut être parallèle à la base du cône (produisant un cercle), sectionner le cône avec un angle inférieur à la pente du cône (ellipse), ou être parallèle à cette pente (parabole), ou avec un angle supérieur, coupant ainsi les deux parties du cône (hyperbole).

Pour trouver le centre de gravité de la surface des figures curvilignes régulières, comme les sections coniques, Archimède utilise une technique développée par Eudoxe. Il divise la figure en triangles de plus en plus petits, dont la limite approche la courbe.

Figure 4 - La quadrature de la parabole



Grâce à la technique d'exhaustion, Archimède détermine la surface d'une parabole qui est exactement les 4/3 de la surface du plus grand triangle que l'on peut inscrire à l'intérieur de cette parabole. Il utilise une série de triangles organisés autour de l'axe central de la parabole.

O est le centre de la droite BB' qui délimite la base de la parabole. Donc ALMNO est la droite médiane du triangle ABB'. Les droites parallèles à ALMNO et passant par les points Q et Q', coupant BA et BA', forment ainsi les droites médianes des triangles respectifs BQA et B'Q'A. Cette construction de petits triangles remplit la parabole et permet de déterminer sa surface et son centre de gravité.

utilisant la même technique, comme il le montre dans son *Equilibre des plans*. Ceci lui permit de déterminer, dans son *Traité des corps flottants*, la forme de la coque d'un bateau pour que son centre de gravité soit tel qu'il reste en équilibre dans l'eau.

Toutefois, Archimède n'a jamais réussi à déterminer précisément l'aire d'un cercle ou sa circonférence de cette manière. Il ne trouva aucune façon de relier l'aire du cercle ou sa circonférence à son diamètre, à un triangle inscrit ou à un autre polygone inscrit dans le cercle, par un nombre connu qu'il soit entier, rationnel ou irrationnel, comme $\sqrt{2}$. Il eut quand même l'honnêteté de reconnaître son échec, contrairement à beaucoup d'autres. Ce qu'il arrive tout de même à faire, c'est mesurer un cercle avec une spirale, mais en restant dans le cadre de l'action circulaire.

Archimède ne pouvait évidemment qu'approcher π, symbole qu'il n'utilisait d'ailleurs pas. Il a néanmoins réussi à déterminer précisément l'aire d'un cercle ainsi que l'aire et le volume d'une sphère, en traitant π comme un nombre réel, même s'il n'a jamais pu (ni personne d'autre d'ailleurs) déduire logiquement sa valeur des nombres entiers ou d'une série de triangles. Comment a-t-il résolu ce paradoxe ?

La découverte d'Archimède revisitée

Revenons une étape en arrière. Si, contrairement aux apparences, la densité d'une figure était différente ? N'est-ce pas la règle plutôt que l'exception ? Dans un tel cas, nous devons revenir à la méthode mentionnée précédemment de mise en équilibre du corps afin d'en déterminer le centre de gravité. Cette méthode peut être appelée, en opposition à la technique d'exhaustion, la méthode du centre de gravité.

Voyons maintenant quelques exemples de l'utilisation de cette méthode par Archimède.

D'abord, considérons la fameuse histoire du couronnement du roi Hiéron de Syracuse. Celui-ci demanda à son ami Archimède de savoir si un orfèvre peu scrupuleux avait substitué de l'argent à une partie de l'or de sa couronne. Un jour, alors qu'il prenait un bain, Archimède réfléchissait comment mener cette enquête sans avoir besoin de fondre la couronne. Alors qu'il rentrait dans le bain, il remarqua que son corps déplaçait une certaine quantité d'eau, faisant augmenter son niveau. Selon la légende, Archimède sortit de son bain et se mit à dévaler les rues de Syracuse dans le plus simple appareil en criant *« Eurêka ! »*.

Archimède se rendit au palais, et plaça la couronne du roi Hiéron sur un côté de la balance avec un poids égal d'or pur de l'autre côté, équilibrant les deux objets à égale distance. Alors, il substitua un poids égal d'argent à l'or, en équilibrant encore la couronne. Ensuite, il immergea en premier l'or, puis l'argent dans un bac d'eau. L'argent, bien sûr, étant moins dense, déplaça plus d'eau que l'or. Enfin, il immergea la couronne, constatant qu'elle déplaçait plus d'eau que son poids en or, mais moins que son poids en argent. Il démontra ainsi que l'or avait été en partie remplacée par de l'argent dans la couronne.

Archimède a utilisé le couteau de la balance pour établir le centre de gravité et répartir équitablement la masse entre la couronne, l'or et l'argent. Il a pu démontrer que le déplacement volumique par unité de masse est une caractéristique propre de chaque élément. Cette caractéristique, appelée gravité spécifique, devint plus tard la pierre d'achoppement du développement de la chimie, de Lavoisier à Mendeleïev.

Abordons un second exemple, cette fois dans le domaine de l'astronomie. Archimède a écrit un merveilleux ouvrage appelé *La mesure du sable*. Il émet une hypothèse sur le nombre de grains de sable que l'univers peut contenir, ceci donnant, pour son époque, une sorte de mesure de l'univers. Pour cela, Archimède développa un nouveau système de nombres exponentiels.

Archimède écrivit au roi Gelon[2] :

« (...) Maintenant vous savez que l'"univers" est le nom donné par la plupart des astronomes à la sphère dont le centre est la Terre et dont le rayon est égal à la ligne droite qui relie le centre de la Terre au centre du Soleil (...).

« Mais Aristarque de Samos a publié un livre constitué de plusieurs hypothèses, dans lesquelles les prémisses conduisent à la conclusion que l'univers est beaucoup plus grand. Ses hypothèses : les étoiles et le Soleil ne bougent pas, la Terre tourne autour du Soleil avec un mouvement circulaire, le Soleil est situé au milieu de l'orbite, et la sphère des étoiles, située au même niveau que le centre du Soleil, est tellement grande que le cercle dans lequel la Terre tournerait, aurait en proportion la dimension du centre d'une sphère par rapport à sa surface. De nos jours, il est facile de comprendre que c'est impossible, le centre d'une sphère n'a pas de grandeur, nous ne pouvons donc concevoir qu'il ait une proportion par rapport à la surface de la sphère. Nous devons cependant comprendre Aristarque comme ceci. Etant donné que nous imaginons la Terre au centre de l'univers, le rapport de la Terre à ce que nous décrivons comme l'univers est le même que le rapport entre la sphère contenant le cercle dans lequel il suppose que la Terre tourne et la sphère des étoiles fixes. »

Ainsi, à partir du modèle héliocentrique d'Aristarque, il réalisa une équation entre deux proportions, celle du diamètre de la Terre à son orbite autour du Soleil, et celle du diamètre de l'orbite terrestre au diamètre de la « sphère des étoiles ».

Archimède développa un modèle sphérique des mouvements du ciel, probablement inspiré par le modèle des sphères concentriques d'Eudoxe, où il trouva, du moins peut-on le supposer, les proportions ci-dessus. Hélas, les modèles ainsi que le traité d'Archimède *Sur la construction de la sphère*, « disparurent » sous le règne des Romains.

Considérons la cohérence entre le modèle héliocentrique et le concept du centre de gravité d'Archimède. Aristarque avait montré que le Soleil était beaucoup plus grand que la Terre ou la Lune, ce qui était le fondement de sa théorie. Même s'il est difficile pour Archimède de mesurer la densité du Soleil directement (ça l'est encore aujourd'hui), et sans oublier que le système solaire n'est pas un corps rigide mais qu'il a des parties constamment en mouvement les unes par rapport aux autres, il était parfaitement logique pour lui de supposer un centre de gravité proche du Soleil, autour duquel celui-ci tournerait à faible distance, pendant que les planètes tourneraient à une distance plus importante.

Heureusement, de nombreuses inventions d'Archimède n'ont pas « disparues » : la vis sans fin, ou cochlée, qui fut appelée par Galilée *« pas seulement merveilleuse mais aussi miraculeuse »*, où il défie la gravité en transportant l'eau en amont sans compartiments dans le mécanisme de vis pour empêcher l'eau de redescendre. Archimède a apparemment développé ce système mécanique simple lors d'un de ses voyages en Egypte afin d'aider l'irrigation des régions autour du Nil, mais elle fut aussi utilisée comme une pompe de cale pour les bateaux et les mines.

Il existe plusieurs versions de l'histoire d'Archimède, sur la façon dont il a mis le bateau *Syracusia* à l'eau tout seul — à la stupéfaction du roi Hiéron et des habitants de Syracuse — en utilisant des dispositifs mécaniques, seuls ou en combinaison : moufle, treuil, vis sans fin et simple levier, toutes ces techniques sont citées par les différents auteurs. Quoi qu'il en soit, Archimède a réduit l'effort nécessaire pour bouger un fardeau en augmentant la distance totale à laquelle cet effort est exercé.

Quand il accomplit sa tâche, Archimède déclara : *« Donnez-moi un point d'appui et je soulèverai le monde. »*

Ses autres inventions furent la grue, l'orgue hydraulique et le réflecteur parabolique. D'après certains récits, peut-être apocryphes, Archimède

Archimède, trop absorbé par un problème de géométrie, ignora les injonctions d'un soldat romain. Celui-ci finalement tua le savant grec, malgré les consignes contraires du général Marcellus.

aurait utilisé un réflecteur avec un réseau élaboré de petits miroirs rotatifs pour faire converger la lumière et mettre ainsi le feu aux vaisseaux des ennemis. Léonard de Vinci s'émerveilla de l'invention d'une arme conçue par Archimède et capable de lancer des projectiles enflammés sur les bateaux des adversaires. A chaque fois, c'est la même idée inspirée par le levier : découvrir le vrai centre de gravité d'un corps, faire tourner alors cet objet autour afin d'accomplir le travail plus efficacement, en toutes circonstances.

C'est par cette *méthode*, et non par une invention particulière, qu'Archimède représente un tournant dans l'histoire des sciences.

Avec ces éléments, il est maintenant possible de situer la défense de Syracuse par Archimède de 216 à 212 avant J.-C.

Quand Hannibal, le grand général carthaginois, conquit pratiquement Rome en 216 avant J.-C. à la bataille de Cannes, sa stratégie fut de provoquer une révolte dans les cités contrôlées par les Romains, ainsi qu'au sein de l'empire. La stratégie n'avait pas bien fonctionné, peut-être à cause de la méfiance vis-à-vis d'Hannibal et de l'armée carthaginoise, qui étaient, comme Rome, des bâtisseurs d'empire et peu respectueux de la vie humaine. Cependant, Syracuse et quelques autres peuples, comme les Gaulois, ébranlèrent le joug romain à tel point que Rome dut mobiliser 10% de sa population pour défendre l'empire.

Fabius Maximus, qui fut désigné dictateur romain pour cette période de crise, envoya le général Marcellus défier Hannibal et reconquérir les villes en révolte. La grande tragédie fut qu'Hannibal ne s'était pas ouvertement allié avec Archimède. Une telle alliance aurait pu empêcher le siège de Syracuse par les Romains. Mais ceux-ci gagnèrent et l'histoire qu'il nous reste à propos de la brillante défense de Syracuse d'Archimède fut immortalisée par les historiens Plutarque, Polybius et Livy. Plutarque, un grec qui vivait sous l'empire romain, en donne un récit très émouvant, même si son principal héros n'était pas Archimède, mais le général Marcellus[3] :

« Lorsque les Romains attaquèrent les murs à deux endroits en même temps, les Syracusiens furent pris de peur et de stupéfaction, persuadés que rien ne pouvait résister à tant de violence et de force. Toutefois Archimède commença à faire intervenir ses machines, lançant sur les forces ennemies toutes sortes de projectiles et d'immenses quantités de pierres qui tombèrent avec violence dans un fracas énorme ; aucun homme ne pouvait résister à cela. Ces multitudes de projectiles renversaient ceux sur qui ils tombaient, brisant leurs rangs et lignes. Pendant ce temps, d'immenses perches s'allongèrent brusquement allant des murs aux bateaux ; certains coulèrent par le poids qui les fit chavirer sur le côté ; d'autres furent envoyés dans les airs par une main de fer.

« Des bateaux furent soulevés dans les airs par un grand poids (une chose épouvantable à voir) et roulèrent, restant à se balancer, avant que tous les marins soient éjectés, quand enfin ils s'écrasèrent contre les rochers, ou encore tombèrent.

« (...) Cependant Marcellus s'en sorti indemme, et se moqua de ses propres artificiers et ingénieurs, "ce qui, dit-il, doit nous donner envie de combattre ce Briareus géométrique, qui s'amuse à faire tanguer nos bateaux et, avec la multitude de flèches que nous avons reçue, à un moment, surpasse vraiment les géants de la mythologie." Marcellus laissa de côté conflits et assauts, mettant tous ses espoirs en un siège long (...).

« Rien n'affecta plus Marcellus que la mort d'Archimède. Celui-ci tentait, telle fut sa destinée, de résoudre ses problèmes par un diagramme, et fixait toutes ses pensées sur le sujet de sa spéculation, ne remarquant pas l'invasion (par subterfuge) des Romains, ni la prise de la ville. Dans cet élan de réflexion et de contemplation, un soldat vint à lui sans qu'il s'y attende, lui demandant de suivre Marcellus ; ce qu'il refusa de faire avant d'avoir résolu son problème à l'aide d'une démonstration ; le soldat, furieux, pris son épée et le transperça (...) Par la suite, Marcellus considéra toujours le soldat comme un meurtrier. »

Marcellus, qui garda deux œuvres d'Archimède comme butin après la conquête de Syracuse, tomba plus tard dans un guet-apens et fut tué par Hannibal. Plutarque décrit l'inscription sur la tombe d'Archimède comme étant une sphère dans un cylindre, ce qui fut confirmé quelques siècles plus tard par Cicéron, lors d'un voyage qu'il effectua à Syracuse. Une chose est sûre, ce qui ressort clairement du récit de Plutarque, c'est le respect avec lequel les Romains, et Plutarque lui-même, considéraient la méthode scientifique d'Archimède.

La méthode d'Archimède

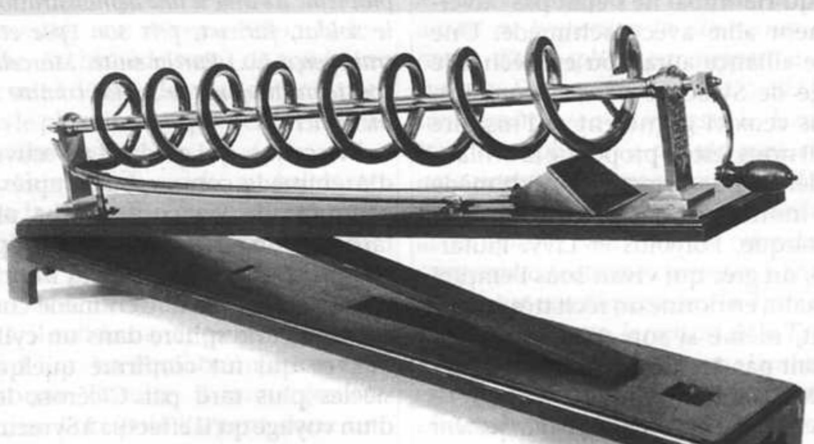
Allons plus avant dans cette méthode. La meilleure façon de commencer est d'évoquer une lettre qu'Archimède écrivit à son ami Eratosthène. Celle-ci constitue l'introduction à un traité d'Archimède appelé *La méthode mécanique*, comprenant de nombreuses illustrations de sa méthode pour résoudre différents problèmes géométriques qui n'avaient pas auparavant trouvé de solutions. La lettre et le traité furent découverts en 1906 par le savant allemand J.L. Heiberg, alors qu'ils étaient cachés depuis sept siècles dans un document liturgique orthodoxe oriental. Cette lettre commence ainsi[4] :

« *J'ai pensé vous écrire pour vous expliquer en détails dans le même livre la particularité d'une certaine méthode, avec laquelle il vous sera possible de commencer à résoudre quelques problèmes mathématiques par le biais de la mécanique. Ce procédé est, j'en suis persuadé, pas moins utile pour démontrer les théorèmes eux-mêmes ; certaines choses sont d'abord devenues claires pour moi grâce à la méthode mécanique, bien qu'il fallut par la suite les démontrer en géométrie, parce que l'investigation par la dite méthode ne fournissait pas une démonstration réelle. Mais c'est bien entendu plus facile, quand nous avons déjà acquis, par la méthode, quelques connaissances sur la question, de trouver la démonstration plutôt que de la découvrir sans aucune connaissance préalable.* »

Archimède explique que sa méthode de découverte scientifique doit être distincte de sa méthode de démonstration logique formelle. Archimède s'inspire donc clairement de la méthode de l'hypothèse présente dans les dialogues de Platon, et non de la logique d'Aristote ou d'Euclide. Il n'aurait jamais accepté un quelconque système logique qui soit en contradiction avec la construction cohérente d'une forme géométrique.

Cette distinction, entre la méthode expérimentale et la démonstration logique formelle, correspond à peu près à celle qui existe, dans l'esprit d'Archimède, entre la méthode du « centre de gravité » (ou l'utilisation de la balance pour équilibrer différentes formes géométriques) et la technique d'exhaustion utilisée pour prouver formellement que ces égalités (équilibres) étaient compatibles avec la géométrie pythagoricienne. En fait, Archimède pensait combiner ces deux méthodes : la première, pour accomplir des percées scientifiques et, la seconde, pour obliger les logiciens formels à accepter, même à contrecœur, ses résultats.

Figure 5 - La vis sans fin d'Archimède



Modèle d'une vis d'Archimède.

Archimède utilisa le même principe pour la pompe en hélice afin de transporter de l'eau en amont et remonter, par exemple, de l'eau de la cale d'un bateau. Un tuyau circulaire renferme une hélice. Quand il tourne avec une extrémité plongée dans l'eau, avec un angle de 45° par rapport à la surface de l'eau, le mouvement de rotation oblige l'eau à remonter.

Le centre de gravité permet de mesurer directement différentes surfaces, solides, et droites curvilignes qui ne pourraient pas l'être autrement. C'est une raison suffisante pour considérer la proposition comme vraie. La technique d'exhaustion prouve qu'une telle proposition ne contredit pas les axiomes existants, en démontrant que toute autre proposition (impliquant des quantités plus ou moins grandes de la proposition de départ) se trouve en contradiction avec les axiomes existants.

Pour être valable, la technique d'exhaustion doit toujours impliquer quelques règles de formation d'une série infinie, géométrique ou numérique. La méthode du centre de gravité, bien qu'elle puisse être utilisée comme une simple mesure empirique, n'est rigoureusement scientifique que si, par un dispositif expérimental ingénieux, on peut montrer qu'elle implique une série ordonnée de son propre type, comme nous l'avons vu dans le cas du triangle. Les deux impliquent la création ou la découverte d'une règle sous-jacente ou d'un principe. Toutefois, la technique d'exhaustion ignore toutes les différences en dehors de celles de l'extension, tandis que la méthode du centre de gravité se fonde — principalement, comme nous l'avons vu — sur la prise en compte de différences physiques sous-jacentes qui déterminent les différences visibles. Ainsi, l'exhaustion est une technique, tandis que le centre de gravité est une méthode.

En utilisant des balances, ou la méthode du centre de gravité, dans *La méthode*, Archimède émet l'hypothèse que tous les volumes, plans, droites et points ont un poids (et donc une masse) et sont donc mesurables sur une balance. En reconstituant les expériences d'Archimède, on doit donc prendre garde à utiliser du matériel ayant les caractéristiques adéquates en épaisseur et en gravité spécifique.

La technique d'exhaustion, elle, se fonde sur une hypothèse opposée ; à savoir que les volumes, aires et droites peuvent être divisés à l'infini. Prenons un exemple et examinons la série $1/2 + 1/4 + 1/8 + \ldots$ Il n'existe pas de nombre inférieur à 1 que les séries ne peuvent dépasser. Nous pouvons donc conclure indirectement, par l'absurde, que la valeur limite de la série est 1.

Cette technique d'exhaustion a été utilisée bien avant Archimède pour montrer, par exemple, que certains nombres comme √2 sont irrationnels, et pour déterminer le volume et la surface de différents solides comme les cônes (dans sa lettre à Eratosthène, Archimède fait référence au travail d'Eudoxe dans ce domaine).

Ainsi, les séries formées par la technique d'exhaustion sont asymptotiques, convergeant vers une limite, si on les poursuit à l'infini. D'un autre côté, les séries ordonnées de la méthode du centre de gravité sont, comme on peut s'y attendre vu l'emploi d'une balance, des séries d'égalités parfaites n'impliquant ni asymptote ni convergence, mais simplement une cohérence entre les parties et le tout ainsi qu'une correspondance biunivoque entre les parties. (En fait, ces séries sont de parfaits exemples élémentaires de la définition cantorienne des ensembles équivalents.[5])

L'utilisation de la méthode du centre de gravité d'Archimède embarrassa au plus haut point les positivistes logiques du XXème siècle, comme Ernst Mach. Ces logiciens — évidemment à cause de leur peur des solutions non euclidiennes aux propositions géométriques, et/ou de leur peur de Georges Cantor — refusaient furieusement de faire la différence entre une proposition tautologique et une proposition fondée sur une cohérence autoréflexive.

La quadrature du cercle

Archimède fit d'une pierre deux coups en combinant la méthode du centre de gravité avec la technique d'exhaustion. On le voit d'autant mieux dans sa quadrature de la parabole et dans sa comparaison des aires et volumes de la sphère, du cône et du cylindre en fonction de simples rapports d'un cercle trigonométrique, ou ce que nous appelons π. Comme nous l'avons déjà dit, il n'existait pas, à l'époque, de nombre appelé π et, de plus, Archimède savait qu'il ne pourrait pas déterminer la valeur de ce nombre. Dans ce cas, ni la technique d'exhaustion ni la méthode du centre de gravité ne sont d'aucune utilité.

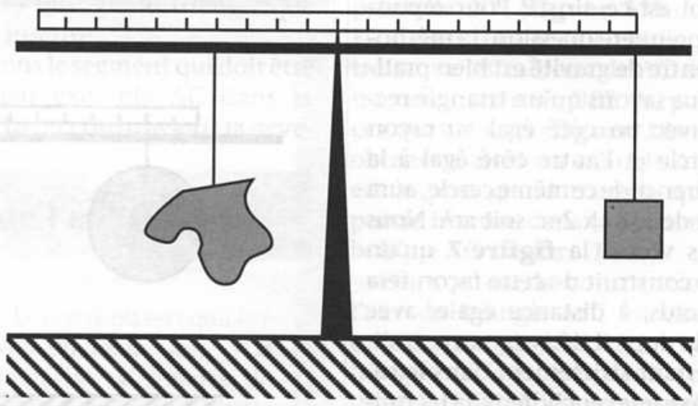
Nicolas de Cuse fut, en 1440, le premier à reconnaître et à prouver rigoureusement qu'il était, en fait, nécessaire de créer un nouveau type de nombre (qu'on appellera plus tard transcendantal) pour définir ce que nous appelons π. En s'appuyant sur les travaux d'Archimède, Cuse fut capable de percevoir ce qu'Archimède lui-même ne vît jamais : la nécessité de créer un ordonnancement plus élevé des nombres, inconnu des Grecs.

On trouva finalement des séries permettant d'évaluer la circonférence du cercle à partir de son diamètre, mais aucune ne convergeait vers un nombre connu, entier, rationnel ou irrationnel, comme dans le cas de la quadrature de la parabole. Archimède s'essaya à des approximations successives avec des polygones inscrits et circonscrits, dont le nombre de côtés étaient constamment doublés. Plus tard, d'autres se fondèrent sur une technique développée par Nicolas de Cuse, qui consiste à analyser par des séries exhaustives certaines figures géométriques dont la longueur est proche de la circonférence du cercle. En 1674, le créateur du calcul différentiel, Gottfried Leibniz, forma une série de ce type pour $1/4\ \pi$, à savoir $1 - 1/3 + 1/5 - 1/7 + \ldots$ Cependant, toutes ces séries ne sont que des approximations.

Beaucoup d'autres séries similaires furent trouvées par la suite, certaines par Newton et d'autres par Euler. Toutefois, Cuse, Kepler, Huygens et Leibniz, à l'origine de cette méthode de quadrature approximative, furent toujours réticents, comme Archimède, à considérer avoir réussi une quadrature parfaite d'une quelconque figure curviligne, que l'on puisse ou non former une série infinie. Newton et Euler attaquèrent Leibniz parce qu'il refusait d'accepter l'implication « logique » — l'équivalence des figures rectilignes et des courbes inscrites — de ses propres démonstrations fondées sur les séries infinies.

L'incapacité des Grecs à réaliser la quadrature du cercle en utilisant les méthodes de Pythagore et leur incapacité encore plus irritante à prouver que π était un nombre irrationnel, était leur point de blocage : comment pouvait-on espérer déterminer la surface ou le volume d'une sphère ou d'une section conique, si on ne pouvait même pas démontrer que la circonférence d'un cercle était réelle ou irrationnelle ?

Figure 6 - Mesurer une surface irrégulière



Une surface irrégulière peut être mesurée en l'équilibrant avec un carré-unité.

Quelques exemples

Terminons maintenant notre exploration de la méthode du centre de gravité complétée par la technique d'exhaustion. Cette fois-ci nous allons appliquer à un domaine normalement réservé à la géométrie euclidienne, c'est-à-dire la détermination de l'aire et du volume de figures géométriques curvilignes. Les trois premiers exemples sont élémentaires, mais ne sont pas dans la *Méthode* d'Archimède.

1. La **figure 6** montre une surface irrégulière mesurée grâce à un carré-unité sur une balance. C'est une solution simple à un des problèmes mentionnés auparavant : comment mesurer une aire très difficile à triangu-

ler.

2. L'aire d'un cercle, comme nous l'avons tous appris à l'école, est πr^2. Mais comment savons-nous cela et pourquoi est-ce ainsi ? Pour répondre à la première question, la méthode du centre de gravité est bien pratique. Nous savons qu'un triangle rectangle avec un côté égal au rayon d'un cercle et l'autre côté égal à la circonférence de ce même cercle, aura une aire de $1/2\ r \times 2\pi r$, soit πr^2. Nous pouvons voir à la **figure 7** qu'un triangle construit de cette façon fera contrepoids, à distance égale, avec un cercle dont il dérive.

En restant strictement dans le cadre des axiomes euclidiens, la technique d'exhaustion est la meilleure explication pour comprendre pourquoi les deux figures s'équilibrent. Archimède montre (**Figure 8**) qu'en doublant successivement les côtés de polygones inscrits et circonscrits dans le cercle, la hauteur commune des triangles isocèles qui sont définis par le centre du cercle et les côtés des polygones convergera vers le rayon, et la somme de leurs bases convergera vers la circonférence (πr).

Ainsi, même si la circonférence n'existe pas dans la logique des polygones, on peut déterminer, en considérant π, que l'aire du cercle ne peut pas être supérieure ou inférieure à πr^2.

3. Considérons un carré simple (**Figure 9**), dont les axes de gravité doivent tous passer par son centre de gravité, pouvant être défini comme l'intersection des deux diagonales. (Nous faisons l'hypothèse que l'épaisseur de l'aire et sa gravité spécifique sont uniformes.)

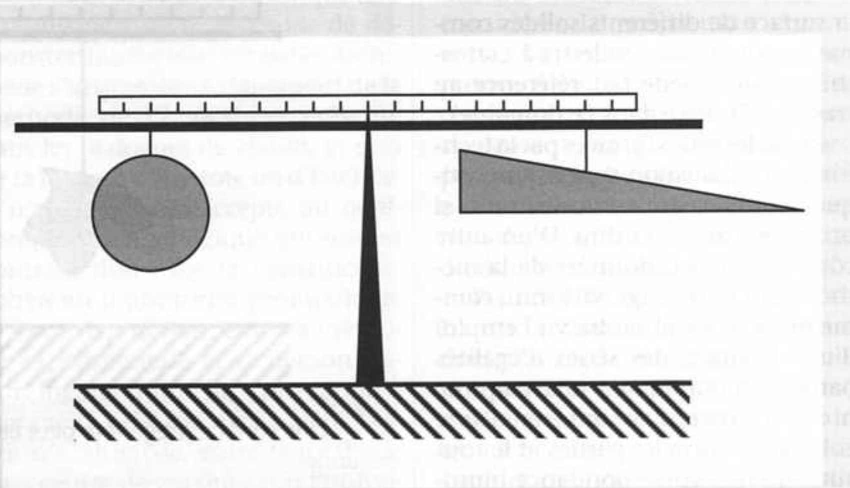
Divisons le carré en deux le long d'une de ses diagonales. Comme vous vous en douter, le demi-carré doit être placé deux fois plus loin du couteau de la balance que le carré entier pour atteindre l'équilibre. Mais si nous ne savions pas que couper un carré le long de sa diagonale le divise en deux, comment pourrions-nous vérifier si cette méthode produit bien un véritable demi-carré et pas seulement une bonne approximation ?

Créons une série en divisant le carré entier et le demi-carré avec le même nombre de segments verticaux de largeur identique (**Figure 10**). Plaçons les trois segments (A', B', C') du demi-carré supposé en un même point quelconque du bras de la balance. Ensuite, trouvons expérimentalement l'endroit où l'on doit accrocher chaque segment (A, B, C) du carré entier pour qu'il équilibre le segment correspondant. *Si les intervalles AB et BC sont égaux, et si la distance du couteau au point où B est suspendu représente la moitié de la distance du couteau au point fixe où les segments du demi-carré sont suspendus, alors le demi-carré est une vraie moitié.* Ceci reste vrai quelque soit le nombre de segments créés dans le carré et le demi-carré, et quelque soit l'espacement des segments du carré, imposé par le choix initial du point fixe de l'autre bras de la balance.

Cet exemple, contrairement aux deux autres, n'est pas une simple mesure empirique mais implique un test de cohérence de la mesure initiale avec la création d'une série. C'est ce qui nous donne de bonnes raisons de croire — si nous ne le savions pas déjà — que le carré divisé représente la moitié du carré entier.

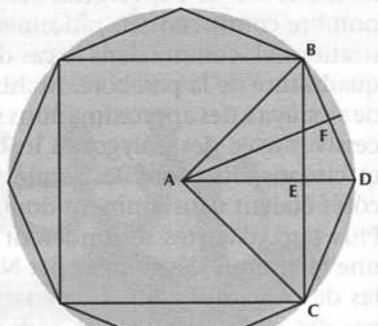
Avec ce principe, Archimède rend visible l'invisible : on mesure la sur-

Figure 7 - Un triangle rectangle de surface égale à un cercle donné



Un triangle rectangle avec un côté égal au rayon d'un cercle et l'autre côté égal à la circonférence de ce même cercle, aura une aire de $1/2\ r \times 2\pi r$, soit πr^2. On peut le vérifier en équilibrant le cercle et le triangle à distance égale.

Figure 8 - Trouver la surface d'un cercle en utilisant la technique d'exhaustion



On inscrit un polygone dans le cercle et on augmente progressivement son nombre de côtés. La hauteur des triangles, comme AE dans le triangle ABC et AF dans le triangle ABD, approche la hauteur de AD, le rayon du cercle. La somme des longueurs des bases des triangles composant les polygones, comme BC dans le carré, ou BD et DC dans l'octagone, approche la longueur de la circonférence du cercle. La surface totale des polygones successifs, égal à la surface totale des triangles les constituant, approche le produit 1/2 x rayon x circonférence, et la circonférence = πr^2.

face d'une figure grâce à des distances linéaires le long des bras de la balance. Archimède n'a pas présenté cet exemple simple, mais en comprendre le principe sous-jacent clarifiera les exemples plus difficiles qui suivent, tirés eux de ses écrits.

4. La **figure 11** illustre la démonstration d'Archimède qui lui permit, en utilisant la méthode du centre de gravité et la technique d'exhaustion, de prouver que l'aire d'une section de parabole représente exactement 4/3 de l'aire du plus grand triangle que l'on peut inscrire.

Indiquons le segment qui doit être mesuré, par exemple AC dans la **figure 11a**, et construisons la développante de la parabole en déroulant une tangente à C. Indiquons une section de cette développante, CF, telle que FA soit parallèle à l'axe de la parabole XY (**figure 11b**). Plions FCA pour former une médiane CK ; trouvons les milieux de AC et CF et traçons une droite DBE qui passe par ces deux points (**figure 11c**). Nous obtenons ainsi un triangle ABC qui est le plus grand triangle que l'on puisse inscrire dans la section parabolique AC (**figure 11d**).

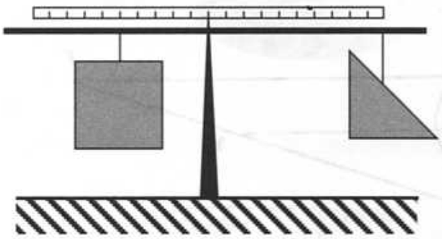
On voit sur la construction que l'aire du triangle AFC est deux fois celle du triangle AEC, et que l'aire du triangle AEC est deux fois celle du triangle ABC. Aussi, le triangle AFC mesure quatre fois l'aire du triangle ABC.

Or, les surfaces qu'Archimède veut relier sont celles du triangle AFC et de la section parabolique limitée par la droite AC. Une balance est construite — CKH avec son couteau en K. La section parabolique entière AC, est placée à une des extrémités de la balance H, équilibrant le triangle entier AFC, placé à 1/3 de la distance de l'autre côté de la balance C. Cela permet de constater que la section parabolique AC représente, en surface, 1/3 du triangle AFC.

Ensuite, de la même manière que nous avions découpé le carré en segments (Figure 10) avec une correspondance univoque entre eux, Archimède coupe la parabole AC et le triangle AFC en une série de segments MO-PO, ED-BD, et QU-RU.

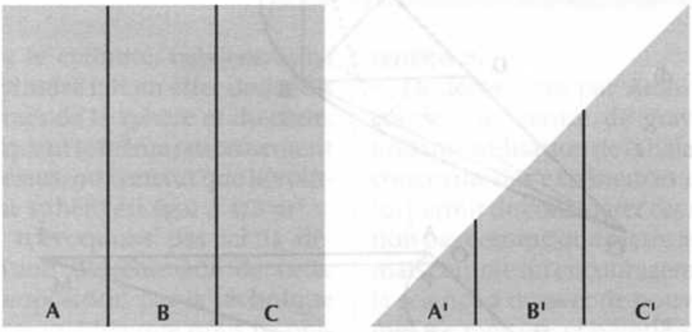
Comme dans l'exemple précédent, les segments de la section parabolique AC, soit PO, BD et RU, quand ils sont placés en un point quelconque sur l'une des bras de la balance, s'équilibrent exactement avec les segments du triangle AFC, soit MO, ED et QU, quand ils sont placés selon une succession de points le long de la balance, correspondant précisément à leurs positions d'origine le long de la médiane CK. Mais, cette fois, le rapport du bras de la balance, quand la section parabolique et le triangle AFC s'équilibrent, n'est pas 2/1 comme pour le demi-carré et le carré, mais 3/1. Archimède a créé une série ordonnée confirmant l'exactitude de la mesure « approximative » de départ, selon laquelle la section parabolique AC mesure 1/3 du triangle AFC. Les parties (les segments) sont en cohérence avec le tout (la section parabolique).

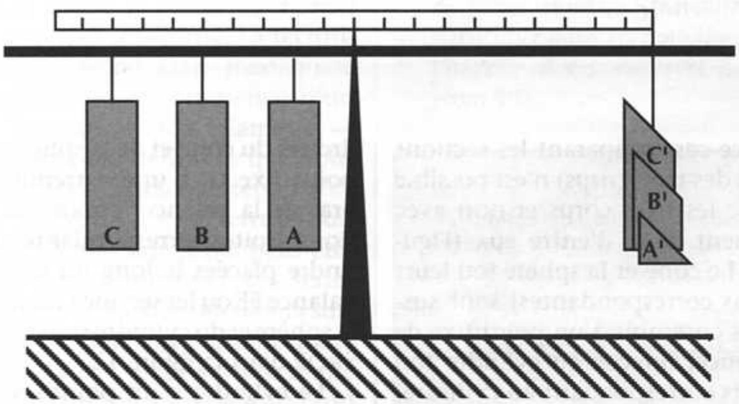
Figure 9 - La loi élémentaire de l'équilibre



Un carré est en équilibre avec un demi-carré à la moitié de sa distance du couteau, en accord avec la loi de l'équilibre : masse x distance d'un côté du couteau = masse x distance de l'autre côté.

Figure 10 - Une diagonale coupe-t-elle un carré en deux ?





Etant donné que l'aire du triangle ABC est un quart de celle du triangle AFC, la section parabolique AC fait les 4/3 du plus grand triangle ABC que l'on peut inscrire.

On aboutit au même résultat avec la technique d'exhaustion, si l'on voulait convaincre un formaliste euclidien. Les triangles sont inscrits successivement, comme dans la figure 4, et leur somme converge asymptotiquement vers une surface qui fait 4/3 du triangle inscrit au départ. Ceci parce que la somme des surfaces de chaque ensemble de triangles est, dans une progression autosimilaire, exactement 1/4 de la surface de l'ensemble précédant : 1 + 1/4 + 1/8 + 1/16 +..., série qui, si on l'étend à l'infini, converge vers 4/3.

Notons que nous avons mesuré la surface d'une section de parabole et non la parabole entière, parce qu'elle est, comme l'hyperbole, une section conique infinie. Ainsi, ce qu'Archimède a mesuré est un microcosme « infiniment » petit de la parabole, même si la figure est bien définie.

5. Archimède prouve, en utilisant la méthode du centre de gravité et la technique d'exhaustion, que le volume d'une sphère fait 2/3 de celui d'un cylindre de diamètre et de hauteur égaux à ceux de la sphère. C'est ce problème qui fut gravé sur la tombe d'Archimède.

Dans ce cas (**Figure 12**), Archimède équilibre trois objets : une sphère, un cône et un cylindre. Le cône et le cylindre ont tous les deux une hauteur égale au diamètre de la sphère, mais les diamètres de leurs bases sont deux fois plus grands que celui de la sphère.

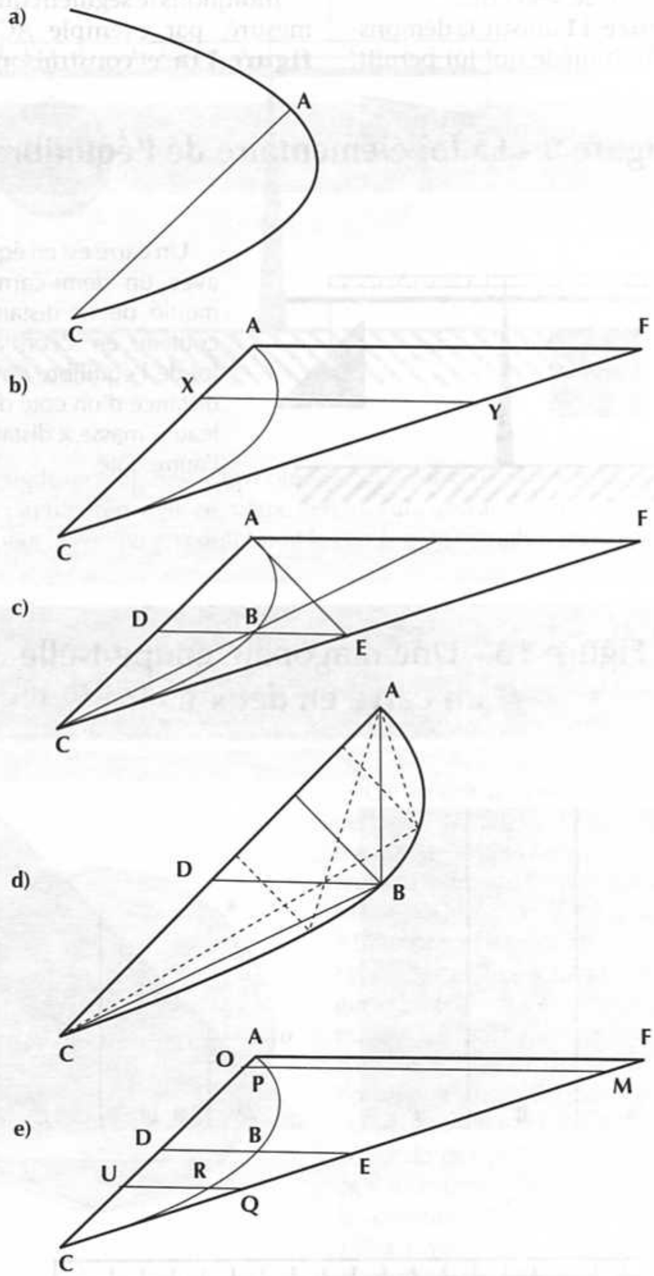
La sphère équilibre le cylindre quand elle est placée six fois plus loin du couteau de la balance que lui. On peut donc penser que la sphère a un volume de 1/6 de celui du cylindre.

Le cylindre s'équilibre avec le cône à 1/3 de la distance du cône, mais Archimède savait déjà que le cône faisait 1/3 du volume du cylindre de même base et hauteur.

Le cône et la sphère mis ensembles s'équilibrent avec le cylindre placé à la moitié de leur distance du couteau. C'est logique, car la sphère, représentant 1/6 du volume du cylindre, et le cône, 1/3 du volume du cylindre, font tous les deux la moitié du volume du cylindre.

Ce qui est remarquable ici c'est que cette série de corps en équilibre

Figure 11 - La quadrature de la parabole en utilisant la méthode du centre de gravité

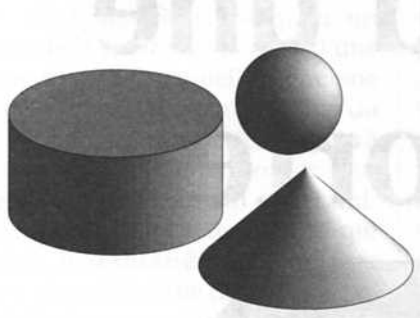


(dans ce cas comparant les sections droites des trois corps) n'est possible qu'avec les trois corps et non avec seulement deux d'entre eux (Figure 12). Le cône et la sphère (ou leurs sections correspondantes) sont suspendus ensemble à un point fixe de la balance, opposé au cylindre (ou sections correspondant au cylindre) placé à la suite.

Archimède créa une série de sections droites, suspendant les sections droites du cône et de la sphère en un point fixe G, à une extrémité d'un bras de la balance, opposé aux sections droites correspondantes du cylindre placées le long du bras de la balance FE où les sections du cône, de la sphère et du cylindre sont coupées, SRQP dans la figure 12.

Le cylindre a un point commun avec le carré : son centre de gravité est au milieu de son axe de rotation. Ainsi, si la série de sections droites

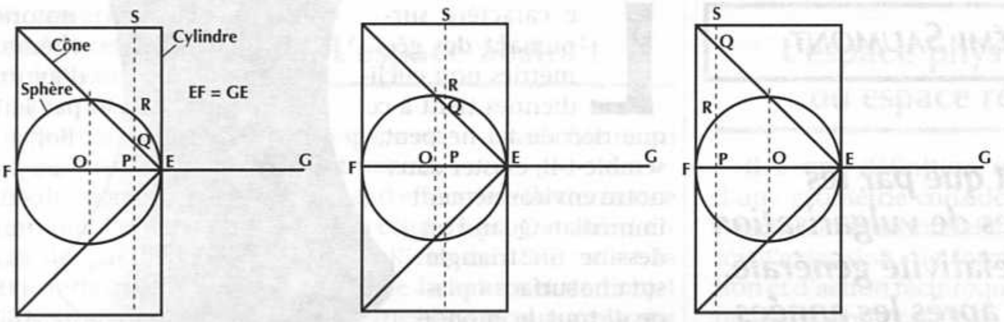
Figure 12 - Equilibrer une sphère, un cône et un cylindre afin de mesurer leurs volumes



a)

a) Soit un cône, un cylindre et une sphère de même hauteur, mais le cône et le cylindre ont tous deux une base qui mesure deux fois le diamètre de la sphère (a). Archimède crée une série de sections droites (b), comme dans les figures 10 et 11, et les équilibre pour confirmer que le cylindre fait deux fois les volumes de la sphère et du cône. De cette façon, Archimède détermine que le volume d'une sphère est égal à 4/3 πr^3.

b) Un schéma de la méthode d'Archimède. FEG représente la balance avec le couteau en E, mais aussi l'axe de rotation de la sphère, du cône et du cylindre. Un plan PS, perpendiculaire à GF en tout point P, coupe la sphère, le cône et le cylindre en cercles de rayons PR, PQ et PS. Archimède prouva que ces cercles provenant de la sphère et du cône placés sur la balance FEG en G s'équilibrent avec le cercle provenant du cylindre placé en P. Il put ainsi trouver le volume d'un segment sphérique, et le volume d'une sphère entière ($4/3\pi r^3/3$).



b)

équilibre le cylindre, cela confirme que le cylindre fait en effet deux fois les volumes de la sphère et du cône. En appliquant le même raisonnement que ci-dessus, on conclut que le volume d'une sphère est égal à 4/3 πr^3.

Nous n'évoquons pas ici la démonstration d'Archimède de cette même proposition par la technique d'exhaustion, bien que nous recommandions aux lecteurs de l'examiner par eux-mêmes.

Grâce à ces exemples, nous comprenons mieux le paradoxe auquel Archimède fut confronté. La technique d'exhaustion était inadéquate pour définir la circonférence d'un cercle à partir de son diamètre — inadéquate pour définir ce que nous appelons π. Le paradoxe tenait à ce que la mesure du cercle, bien que non définissable par une série, peut être utilisée pour déterminer des séries autosimilaires afin de calculer la surface d'un cercle (πr^2), le volume d'une sphère (4/3 πr^3), et la surface d'une sphère (quatre fois l'aire de son grand cercle). En plus, Archimède réussit à définir une section conique, la section de parabole, sans aucune référence à π.

La découverte par Archimède du concept de centre de gravité et sa brillante utilisation de la balance pour concevoir des expériences cruciales, lui permit de considérer ces résultats, non pas comme une pierre angulaire, mais comme un encouragement pour la science à trouver de nouvelles formes de mesure, cohérentes avec ses progrès. ■

Bob Robinson de l'université de Johns Hopkins, travaille en particulier dans les domaines de l'histoire des sciences et de la géométrie.

Notes

1. Voir à ce sujet Pierre Beaudry, « Comment les Grecs mesuraient l'invisible », Fusion, n°58, novembre-décembre 1995.

2. Thomas L. Heath, *The Works of Archimedes*, New York, Dover Publications, , pp.221-222, 1953.

3. Plutarque, « Marcellus », *Plutarch's Lives*, New York, Modern Library, pp.377-379.

4. Heath, *The Works of Archimedes*, p.13.

5. Georg Cantor, Contributions to the *Founding of Theory of Transfinite Numbers*, New York, Dover Publications, p.86, 1955.

Références

Petr Beckmann, *A History of π*, Boulder, Colo., Golem Press, 1971.

E.J. Dijksterhuis, *Archimedes*, Princeton University Press, 1987.

Thomas L. Heath, *The Works of Archimedes*, New York, Dover Publications, 1953.

Thomas L. Heath, *A History of Greek Mathematics*, New York, Dover Publications, 1981.

Lyndon Larouche, « History As Science », *Fidelio*, Vol.2, n°3 Automne 1993.

Lyndon H. Larouche, « La fraude de la causalité algébrique », Fusion, n°58, novembre-décembre 1995.

Plutarque, « Marcellus », dans *Plutarch's Lives*, New York, Modern Library.

William W.Strader et Lawrence D. Rhoads, *Planar Geometry*, Philadelphie, John C. Winston Co., 1934.

A.M. Welchans et W.R. Krickenberger, *Solid Geometry*, Boston, Ginn and Co., 1955.