La géométrie des nombres complexes

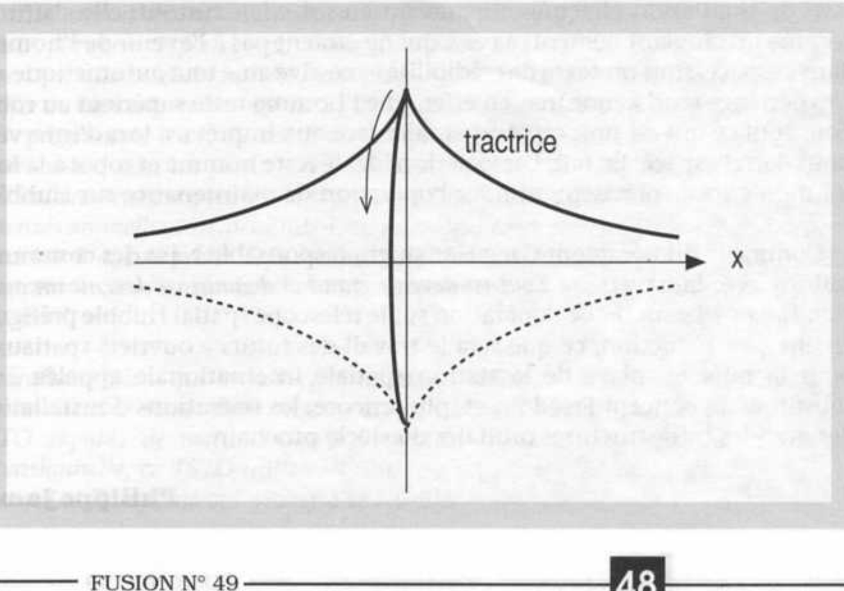
Les nombres complexes et les transformations dans le plan complexe sont fréquemment utilisés par les ingénieurs et les scientifiques. Presque toujours, on oublie la base géométrique et physique de ces nombres et on les utilise sans avoir réellement conscience de l'opération que l'on mène.

Les géomètres savent que la géométrie hyperbolique ou non-euclidienne peut être réalisée sur la surface de courbure négative constante connue sous le nom de pseudosphère. J'ai récemment découvert que la pseudosphère donne également une base géométrique naturelle aux nombres complexes : toute section plane qui passe par l'axe de la pseudosphère peut être décrite par les coordonnées du plan complexe de Gauss.

Les conséquences mathématiques et physiques de ce fait me semblent profondes et pas assez reconnues. Je commencerai par décrire la construction avec laquelle je suis arrivé à cette découverte, puis j'en discuterai certaines implications.

La sphère, la plus simple surface de courbure positive constante, est générée par la rotation d'un cercle. Le cercle peut ainsi être considéré comme la courbe de génération de la sphère, et de lui sont dérivées les fonctions trigonométriques ordinaires (circulaires). La surface caractéristique de courbure négative constante, la pseudosphère, est générée par la rotation d'une tractrice autour de son axe asymptotique (Figure 1). A partir de la tractrice, on peut définir un ensemble correspondant de fonctions trigonométriques dans le plan complexe.

Figure 1



Laurence Hecht

On comprendra mieux ce que je veux dire en examinant d'abord la dérivation des fonctions trigonométriques ordinaires à partir du cercle. Nous construisons dans le cercle ce que l'on appelle le triangle trigonométrique complet (Figure 2). Dans un cercle de rayon unité, on définit un angle central quelconque AOP. La tangente en P au cercle coupe OA en {M} et la perpendiculaire en O à OA en {Q}. On construit aussi la ligne PN perpendiculaire à OA.

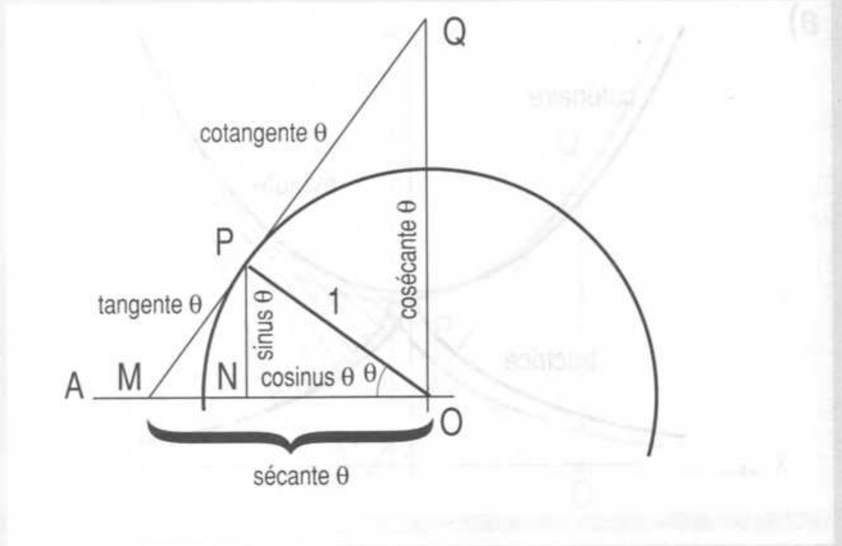
Le triangle rectangle MOQ contient alors en lui toutes les fonctions trigonométriques, comme indiqué dans la figure 2. Les identités trigonométriques peuvent se lire dans la figure en utilisant uniquement le théorème de Pythagore :

$\sin^2 + \cos^2 = 1$
$1 + \tan^2 = \sec^2$
$1 + \cot^2 = \csc^2$

La figure a aussi un caractère mnémonique en ce sens que la sécante et la cosécante *coupent* le cercle alors que la tangente et la cotangente le *touchent*. Pensons maintenant le cercle comme une section de sphère, et l'angle quelconque comme une coordonnée de position sur cette sphère.

Passons maintenant à la construction correspondante pour la pseu-

Figure 2

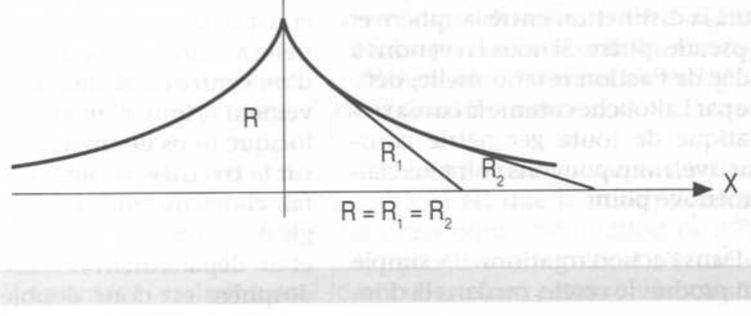


dosphère. Etant donné que sa courbe de génération, la tractrice, est moins connue que le cercle, nous allons l'examiner plus précisément. La tractrice, (ou courbe équitangentielle) est le chemin parcouru par les roues arrières d'un semi-remorque lorsque le conducteur de celui-ci fait un virage à angle droit (Figure 3). La tractrice a comme propriété que la longueur de sa tangente jusqu'à l'axe horizontal est constante (d'où son autre nom d'équitangentielle).

La chaînette est directement reliée à la tractrice puisqu'elle en est la développée. La développée d'une courbe est générée en traçant les normales à cette courbe. Ces normales forment alors l'enveloppe d'une autre courbe (ou de plusieurs courbes), que l'on appelle la développée de la courbe originale (Figure 4a). Si l'on fait tourner l'ensemble du système, tractrice et chaînette, autour de l'axe de la tractrice, la figure dessinée en 4b en résulte. Il s'agit de la pseudosphère et de sa développée dans l'espace, la caténoïde.

Nous en resterons pour l'instant au système chaînette-tractrice, la coupe plane de la pseudosphère et de la caténoïde. A partir de tout point {P} de la tractrice on peut mener une tangente vers l'axe horizontal. On appelle O le point d'intersection avec cet axe (Figure 5a). On trace ensuite la normale à la tractrice passant par P et l'on appelle M son intersection avec l'axe horizontal. La normale sera tangente à la chaînette à un point Q, puisque c'est la propriété même d'une développée. On peut montrer que la ligne QO sera alors perpendiculaire à l'axe.

Figure 3



Si nous traçons maintenant un cercle de rayon OP et que nous menons la perpendiculaire PN (Figure 5b), nous constatons que nous avons construit le triangle trigonométrique complet de la figure 2. L'angle MOP, que nous considérions auparavant comme l'angle central du cercle, doit être considéré maintenant comme l'angle caractéristique de la tractrice. Lorsque P se déplace le long de celle-ci, l'angle varie de 0 à 90 degrés. Si l'on imagine un reflet miroir de la tractrice de l'autre côté de l'axe horizontal, on observe que l'angle fait une rotation de 360 degrés lorsque P parcourt la tractrice dans les quatre cadrans.

L'angle MOP peut donc être considéré comme une coordonnée de position sur la pseudosphère, exactement de la même manière qu'on l'a considéré auparavant comme une coordonnée de position sur la sphère. La différence étant que, si la position angulaire sur une sphère est déterminée par rapport à un point fixe, ce point se déplace sur l'axe avec la variation de l'angle dans le cas de la pseudosphère.

Nous pouvons maintenant montrer que le système de coordonnées approprié pour le système chaînette-tractrice est le plan complexe.

Pour aller plus rapidement, prenons la définition pré-gaussienne de la courbure développée par Euler. La courbure en tout point d'une surface est le produit inverse des deux principaux rayons de courbure en ce point :

$$k = 1/rr'$$

Pour la sphère, dont le rayon de courbure est toujours le même, égal au rayon de la sphère :

$$k = 1/r^2$$

Pour la pseudosphère,

$k = -1/r^2$ (où le rayon de la pseudosphère est défini comme la longueur de l'équitangente).

Les deux rayons de courbure principaux varient sur toute la surface ; seul leur produit est constant.

Pour la pseudosphère, ces deux rayons sont les segments MP et PQ de la figure 5b. (Démonstration : MPQ est la normale à la surface au point P. Or la chaînette, développée de la tractrice, est le lieu des centres de courbure de celle-ci. PQ est donc un rayon de courbure au point P. En vertu du théorème de Monge, selon lequel l'axe d'une surface de révolution forme l'une de ses développées, MP est l'autre rayon de courbure).

On remarque que MP = $\tan\theta$ et PQ = $\cot\theta$. Pour le cercle unité, leur produit sera toujours égal à 1. Mais afin que la courbure de la surface soit négative, leur produit doit être négatif. Cette condition est réalisée lorsqu'on donne les valeurs :

MP = $i \tan\theta$ et PQ = $i \cot\theta$ pour la pseudosphère unité, puisque $i^2 = -1$, par définition.

Ceci signifie que le plan du cercle OP est le plan complexe avec ses axes x et i y. Tout point peut être caractérisé par les valeurs $x + i\,y$ ou encore $\cos\theta + i \sin\theta$. Le triangle trigonométrique caractéristique apparaît alors comme en figure 6.

Le théorème de Pythagore montre alors que les identités du plan complexe pseudosphérique ont la forme suivante :

$$\cos^2\theta - \sin^2\theta = 1$$

$$1 - \tan^2\theta = \sec^2\theta$$

$$\cot^2\theta - 1 = \csc^2\theta$$

On constate que ces relations sont parallèles aux identités des fonctions hyperboliques :

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$$

$$1 - \tanh^2 x = \operatorname{sech}^2 x$$

$$\coth^2 x - 1 = \operatorname{csch}^2 x$$ [1]

Mais il doit y avoir une raison plus fondamentale, au-delà de l'exigence formelle que le produit des rayons de courbure soit négatif, pour justifier cette construction du plan complexe. Je crois qu'on peut la trouver dans la nature de l'action rotationnelle et dans la distinction entre la sphère et la pseudosphère. Si nous en venons à l'idée de l'action rotationnelle, définie par LaRouche comme la base axiomatique de toute géométrie constructive, nous pouvons voir plus clairement ce point.

Dans l'action rotationnelle simple qui produit le cercle, ou dans la double action rotationnelle qui produit la sphère, la rotation se fait autour d'un centre. Pour la pseudosphère, la construction par l'action rotationnelle a besoin d'une rotation autour d'un centre combinée avec un mouvement le long d'un axe. Par ailleurs, lorsque nous définissons la position sur la tractrice, comme nous l'avons fait ci-dessus, nous voyons que l'angle θ détermine à la fois une rotation et un déplacement linéaire. La pseudosphère est donc doublement dé-

Figure 4

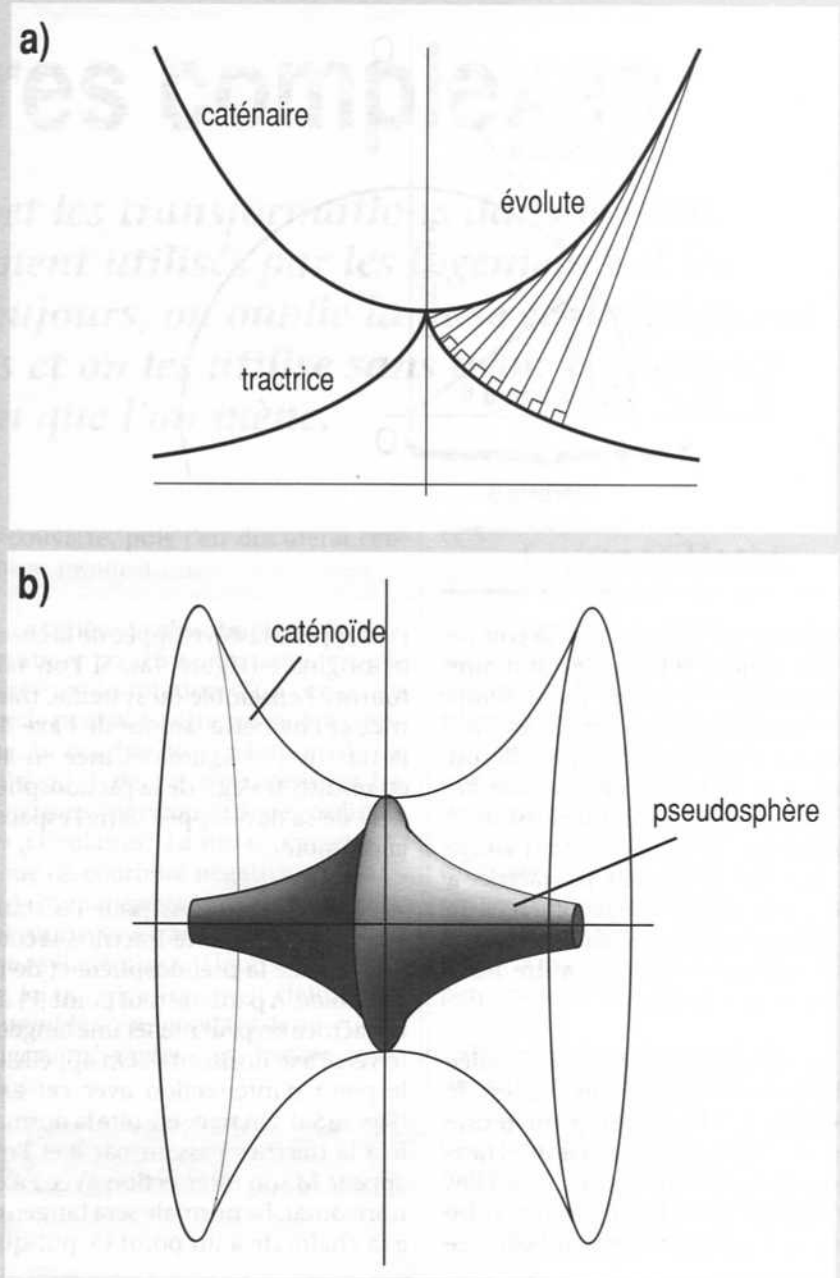
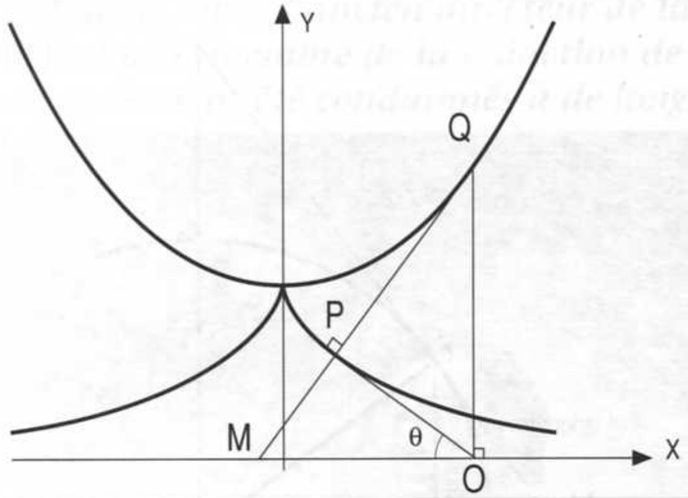
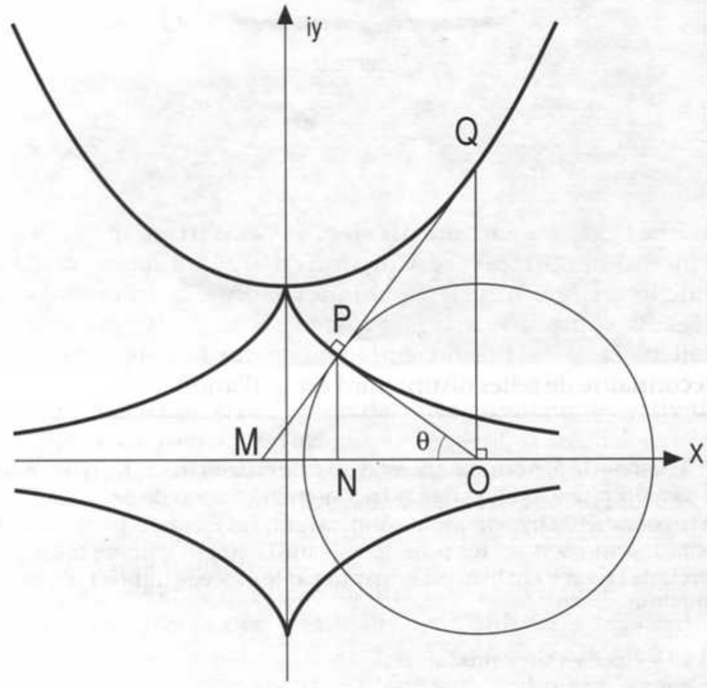


Figure 5

a)



b)



terminée par deux formes d'actions distinctes, la rotation et la translation. Pour décrire ces actions, on a besoin du plan complexe.

Ceci est précisément en accord avec la vision qu'avait Gauss du plan complexe considéré comme une multiplicité doublement étendue. Non pas une multiplicité à deux dimensions spatiales, selon la conception triviale ayant cours aujourd'hui, mais une multiplicité exprimant la relation de choses *« d'une nature telle qu'elles ne peuvent être ordonnancées dans une série simple, même infinie dans les deux directions, mais ne peuvent être ordonnancées que dans une série de séries ou, autrement dit, qui forment une multiplicité à deux dimensions... »*[2]

Une autre caractéristique du plan complexe est que la multiplication par i provoque une rotation de 90°. Ceci prend une signification toute particulière dans cette construction. Comme la section d'une pseudosphère se compose de deux tractrices en miroir (Figure 5b), l'angle θ est défini dans quatre régions correspondant aux quatre cadrans. Celles-ci sont séparées par deux sortes de singularités : à 90° et à 270°, on trouve le point de rebroussement de l'équateur de la pseudosphère ; à 0° et 180°, on trouve l'axe asymptotique. La multiplication par i fait ainsi passer un angle par dessus une singularité, vers le domaine suivant.

Quelques implications

Le cercle et la tractrice peuvent donc être considérés comme des courbes analogues, l'une définissant une mesure angulaire pour des sections planes en courbure positive et l'autre pour les sections planes en courbure négative. La notion selon laquelle les sections planes diffèrent selon la courbure des surfaces qu'elles sectionnent semble sans doute étrange, même pour ceux qui sont accoutumés aux étranges pensées que la théorie des surfaces suscite. Il s'agit pourtant d'une conséquence nécessaire de notre analyse.

Nous devons conclure que l'hypothèse que nous faisons habituellement, selon laquelle le plan euclidien est la multiplicité cartésienne naturelle à deux dimensions, est fausse. On doit donner au plan complexe au moins autant de prétention à pouvoir décrire une section plane d'un volume tridimensionnel. Il est question de déterminer si la région de l'espace que nous examinons se définit comme étant de courbure positive ou négative. Que conclure de nos affirmations dans le domaine physique ? Qu'en est-il du préjugé newtonien de l'espace vide ou du médium isotrope de Maxwell ?

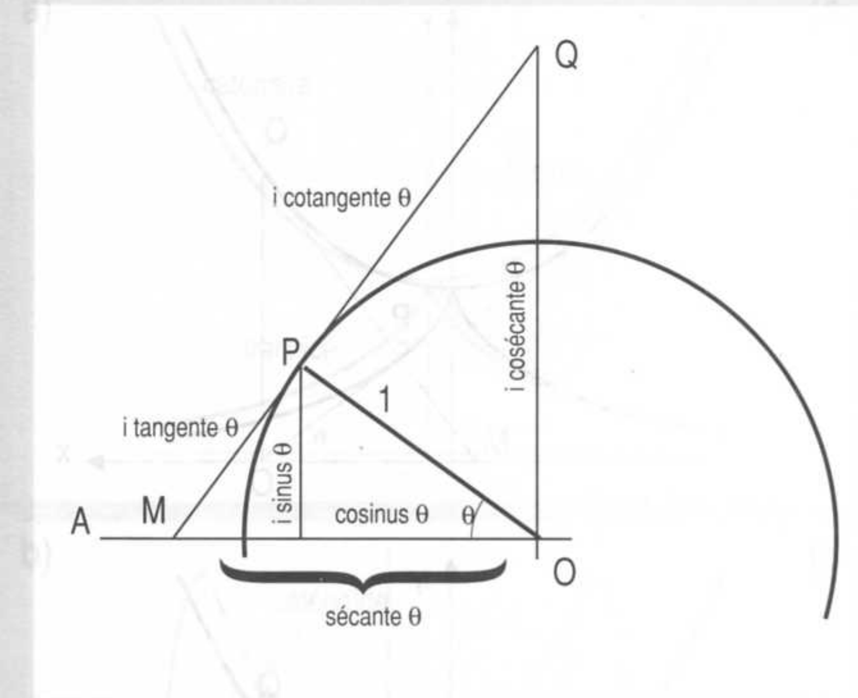
De telles considérations ont dû jouer un rôle dans le développement par Gauss de sa notion de plan complexe et, sans doute encore plus, pour sa physique. Ceci va de pair avec la signification fondamentale de la courbure de l'espace que Gauss fut le premier à soulever explicitement. Selon son biographe R. Dunnington, Gauss a construit pour la première fois une représentation géométrique de la géométrie hyperbolique ou « anti-euclidienne » vers 1828. A ce moment, Gauss découvrit que la rotation de la tractrice autour de son axe asymptotique produisait une surface de courbure négative constante. Cela se passait juste après ses fameuses études sur la courbure de l'espace, et ses travaux cruciaux sur les nombres complexes, publiés en 1825 et 1831, entourent joliment cette découverte.

Malheureusement, les travaux de Gauss sur ces sujets sont aujourd'hui ignorés ou compris de façon erronée. Ses recherches ne sont généralement connues que de façon indirecte à travers l'influence de Riemann sur la formulation par Einstein de la Théorie générale de la relativité. Du fait de l'influence de Maxwell et d'autres, le niveau général du discours philosophique entre scientifiques avait considérablement baissé à la fin du XIXème siècle, et les considérations d'Einstein ne sont donc qu'un pâle reflet de la puissance des idées originales de Gauss. Par exemple, en retenant la conception de forces fondamentales telles que la gravitation ou l'attraction coulombienne, qui se réduisent à des lois de carré inverse dans le cas des mouvements non-relativistes, Einstein réintroduit toutes les hypothèses qui découlent d'un espace courbé positivement de la supposition.[3]

La question de la courbure de l'espace et de l'organisation topologique de cette courbure reste ouverte. Le point le plus important est de reconnaître que l'on fait des suppositions sur cette question et que beaucoup de ces suppositions sont implantées en nous, dans des conditions équivalentes à une anesthésie, par les procédures standards de l'enseignement universitaire des mathématiques. Se guérir d'une telle implantation forcée ne peut être accompli que par un examen de conscience parfois douloureux, examen de ses propres suppositions motivé par un puissant désir de vérité.

En considérant le plan complexe comme la section plane d'un espace courbé négativement, on met en évidence d'importantes distinctions fonctionnelles entre les courbures négative et positive, masquées par le traitement algébrique conventionnel. Reconnaître de telles distinctions est essentiel pour le scientifique d'aujourd'hui qui souhaite comprendre le comportement de la matière à très petite échelle, comportement qui fait apparaître de plus en plus d'anomalies. ■

Figure 6



Notes

1. Quand le plan complexe est dérivé de cette manière de la courbe génératrice de la pseudosphère, on voit que la trigonométrie naturelle de ce plan est la même que la trigonométrie hyperbolique. Auparavant, ces identités pouvaient être dérivées de deux façons : soit on les pensait, suivant Lambert, comme la trigonométrie d'un cercle de rayon i. Ou bien on y arrivait par le procédé indirect d'Euler, où la fameuse équation :

$e^{iz} = \cos z + i \sin z$ produit :
$\cos z = \cosh iz$
$i \sin z = \sinh iz$
où $z = x + iy$

Cependant, dans cette forme de présentation, il y a toujours une confusion sur le fait que z n'est pas un angle. La substitution de z à x + iy requiert un acte de foi similaire à celui qui est nécessaire pour la proposition par Lambert du cercle de rayon i, avec le désavantage supplémentaire que l'imagination est ici purement algébrique.

Dans ma construction, on voit que les identités de la trigonométrie hyperbolique sont les identités trigonométriques ordinaires du plan complexe. Réconcilier les deux nécessite cependant de garder à l'esprit que le centre du cercle se déplace le long de l'axe pendant la rotation angulaire.

2. Karl Gauss, « La métaphysique des nombres complexes» (traduction anglaise, par Jonathan Tennenbaum, de l'article de 1825 sur son *Premier commentaire sur la théorie des résidus biquadratiques*), *21st Century*, Spring 1990, p. 63.

3. Je développe ce point dans « Potential in a space of negative curvature », *21st Century*, Winter 1992.