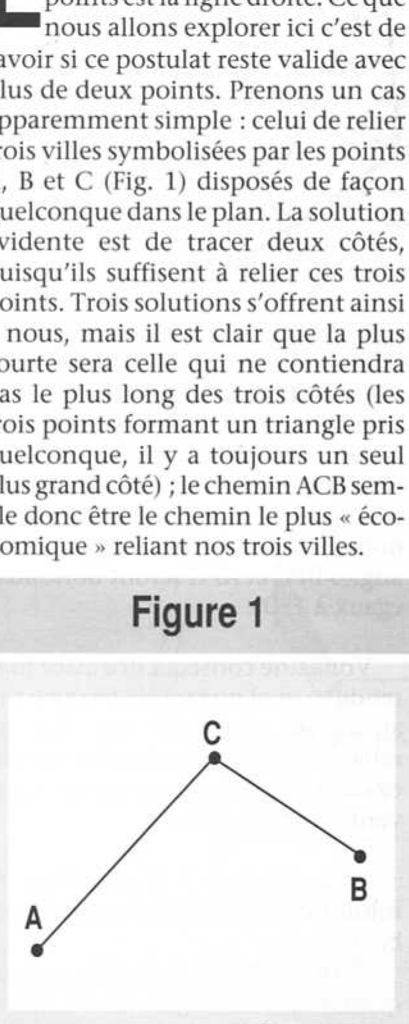
Des films de savon au service des autoroutes !

Le Palais de la Découverte a consacré il y a deux ans une belle exposition aux bulles de savon. En exposant aux sens le principe caché de la moindre action, les films de savon représentent un irremplaçable instrument pédagogique.

Yves Messer

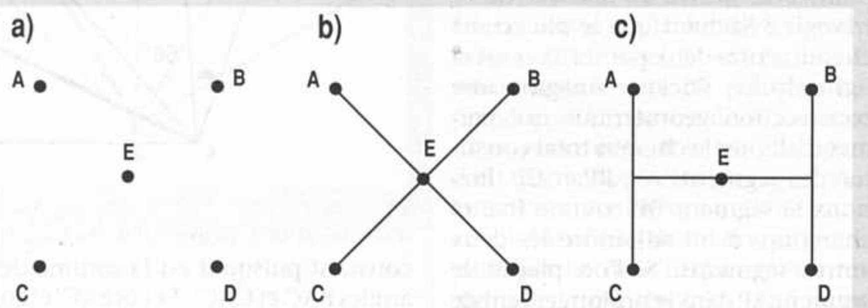
Le postulat euclidien dit que le chemin le plus court entre deux points est la ligne droite. Ce que nous allons explorer ici c'est de savoir si ce postulat reste valide avec plus de deux points. Prenons un cas apparemment simple : celui de relier trois villes symbolisées par les points A, B et C (Fig. 1) disposés de façon quelconque dans le plan. La solution évidente est de tracer deux côtés, puisqu'ils suffisent à relier ces trois points. Trois solutions s'offrent ainsi à nous, mais il est clair que la plus courte sera celle qui ne contiendra pas le plus long des trois côtés (les trois points formant un triangle pris quelconque, il y a toujours un seul plus grand côté) ; le chemin ACB semble donc être le chemin le plus « économique » reliant nos trois villes.

Figure 1



Prenons maintenant un autre exemple ; le cas de deux triangles disposés de telle façon qu'un sommet leur est commun et tel que les quatre autres forment, par souci de simplification, un carré (Fig. 2a). Soit donc, cinq villes représentées par cinq points A, B, C et D (formant les sommets d'un carré) et E (son centre). Il est évident qu'*individuellement* parlant, le chemin le plus court entre ces points, pris deux à deux, reste la ligne droite et c'est cette règle que les urbanistes appliquent quotidiennement. Il en est ainsi pour les paires AB, BC, CD, DA qui forment les côtés du carré abcd, mais aussi pour les paires AE, BE, CE et DE, qui en constituent les diagonales. A première vue donc, le chemin le plus court serait, soit de tracer les diagonales AD et BC (Fig. 2b), soit de relier ces cinq points par trois segments (équivalant à trois côtés du carré) comme dans le cas de la figure 2c. Ces deux solutions semblent répondre au problème posé. Reste à savoir laquelle des deux correspond à un chemin total *minimum*. Calculons. Prenons le côté du carré comme étant égal à 1 ; la longueur totale vaudra dans le premier cas, $2 \times \sqrt{2}$, soit ± 2,8, et dans le second elle vaudra 3. Le premier chemin est donc plus court que le second. Cqfd ?

Figure 2



La solution de Bückner

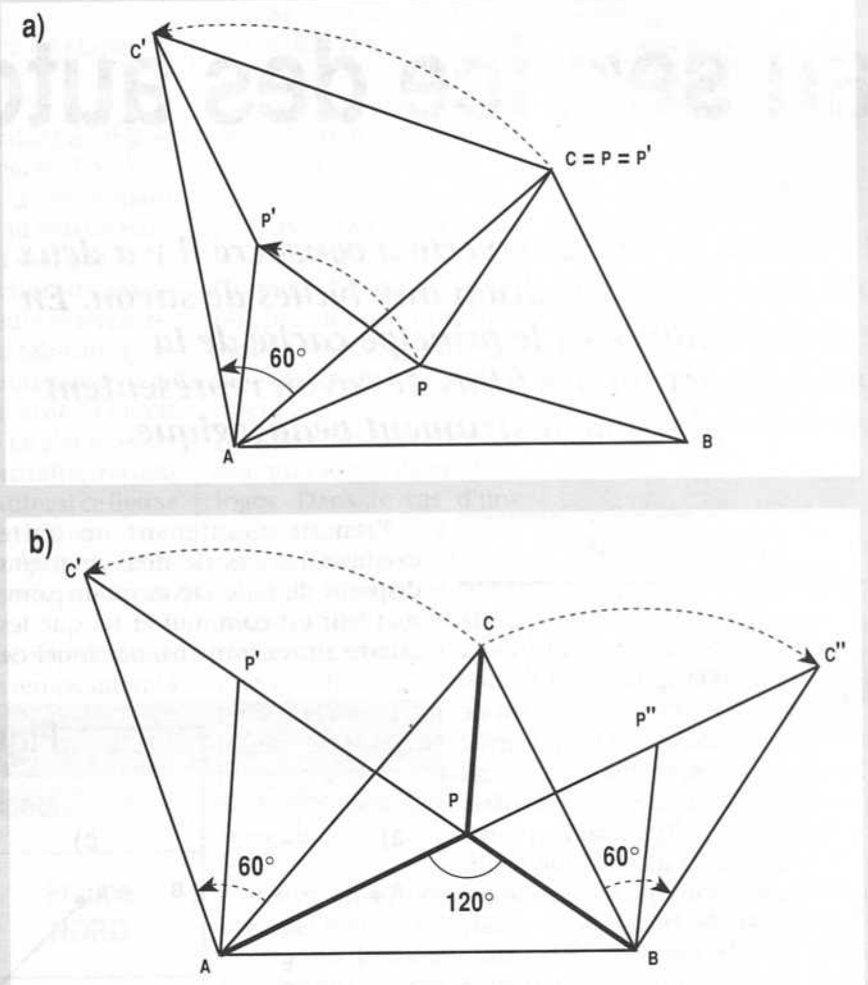
Comment pouvons-nous être sûrs qu'il s'agit du plus court chemin possible ? Que cela « saute aux yeux » ne constitue évidemment pas, pour le géomètre rigoureux, une preuve, et encore moins une démonstration. Le mathématicien Bückner[1] s'était penché sur ce problème, et particulièrement sur cet exemple, ô combien élémentaire, de relier par un chemin minimum, c'est-à-dire le plus écono-

1. *Le plaisir des mathématiques,* Rademacker et Toplitz, Dunod, 1967.

mique possible, trois points quelconques du plan. Revenons donc à notre problème initial. Bückner s'était demandé si « à tout hasard », il n'existait pas une solution autre que celle décrite ci-dessus, en d'autres termes, s'il n'existait pas un point P, différent de A, B ou C, qui appartiendrait à la solution. Poser une telle question revient en fait, implicitement, à suggérer l'éventualité que le « problème à trois points » puisse être de nature différente que celle d'un « problème à deux points »... Soit donc un triangle formé de trois points quelconques A, B et C et soit un point P, les distances AP, BP et CP reliant les trois sommets entre eux (Fig. 3a).

Ce qu'il faut découvrir ici, c'est le chemin le plus court reliant ces trois sommets. Posons que le côté AB soit le côté le plus long ; la solution la plus évidente est que P soit confondu avec le sommet C et que la solution au problème de minimum soit le chemin A-P-B (P confondu avec C). Il est aussi évident que si P se trouvait *à l'extérieur* du triangle, le chemin serait plus long. Mais qu'en est-il si le point P se trouve *à l'intérieur* de ce triangle ? Sachant que le plus court chemin entre deux points fixes est la ligne droite, Bückner imagina une construction géométrique qui permet d'aligner le chemin total constitué des segments AP, BP et CP. Prenons le segment BP comme fixe et cherchons à lui adjoindre les deux autres segments. Si l'on plaçait le segment AP dans le prolongement de BP ; il faudrait ensuite placer le troisième, c'est-à-dire CP, de telle façon que le chemin reliant C à B, via A et P soit le plus court. Bückner proposa, non sans un certain génie, de faire tourner le triangle APC autour de son sommet A en un triangle égal AP'C' de telle sorte que le chemin C'-P'-P-B apparaisse (Fig. 3b). Une telle construction exige que le triangle APC pivote d'un angle de 60°, puisque PP' doit être égal à AP (et donc à AP'). L'avantage d'une telle construction c'est que le sommet C' reste fixe *quel que soit le centre P choisi* ! En effet, il est aisé de comprendre pourquoi l'angle BAC' est fixe ; puisque la construction de Bückner consiste à faire tourner de 60° le triangle APC ; l'angle CAC' est égal à 60° ; l'angle BAC' est

Figure 3



constant puisqu'il est la somme des angles BAC et CAC'. Le côté AC' étant toujours égal au côté AC ; le point C' est fixe (pour un triangle ABC donné), quel que soit P. Nous avons donc un outil permettant de rechercher systématiquement et de comparer toutes les solutions possibles. Si, comme nous l'avions d'abord proposé, P était confondu avec le sommet C, le chemin total serait visualisé par C'-P'-C-B, ce qui ne semble plus guère convainquant (Fig. 3a). En effet, il devient beaucoup plus naturel de relier C' à B *directement*... par une ligne droite (Fig. 3b). Le chemin C'-P'-P-B, représentant la somme des distances de P aux sommets du triangle ABC, est donc le plus court. Qu'avons-nous obtenu ? Etant donné que le triangle AP'P est équilatéral ; l'angle APP' vaut donc 60° et l'angle supplémentaire APB vaudra ainsi 120°. La construction montrant qu'il ne peut y avoir qu'un seul point minimal P, il en résulte que la même construction faite à partir d'un autre sommet que A doit conduire au même point P ; les angles BPC et APC seront donc aussi égaux à 120°.

Voilà une conséquence assez inattendue : quel que soit le triangle pris au départ, le chemin le plus court reliant ces sommets forme des angles égaux à 120° ! Trois conclusions peuvent être formulées :

1) la solution à ce problème de minimum/maximum est constructible ;

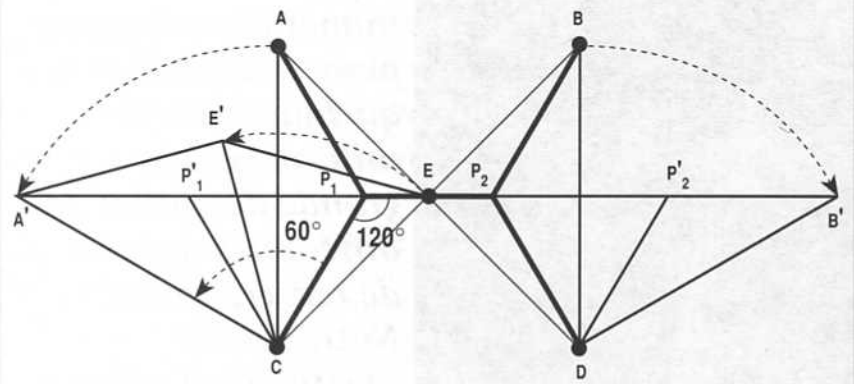
2) trois points, situés d'une façon quelconque le long de trois axes formant trois angles égaux, seront reliés

d'une façon minimale le long de ces axes ;

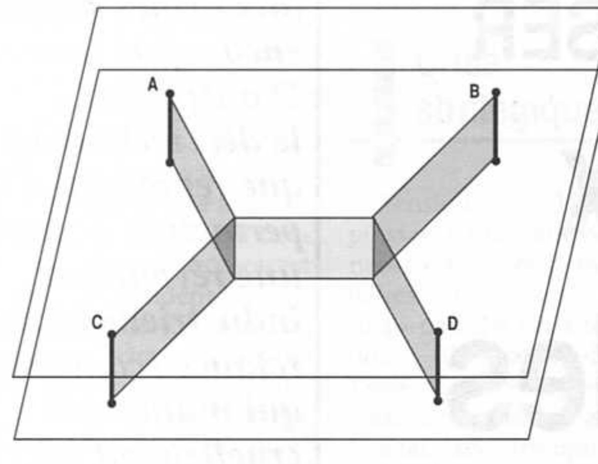
3) si un des angles formés par ces trois points est égal ou supérieur à 120°, alors le chemin le plus court sera celui formé des deux côtés les plus courts, c'est-à-dire notre première solution envisagée (Fig. 1).

Le fait que nous nous soyons trompés dans le cas de trois points nous oblige donc à reconsidérer le cas de cinq points, vu ci-dessus. Soit 4 points A, B, C et D, et E, le centre des diagonales du carré ABCD. Considérons le triangle formé des points AEC (Fig. 4a). Les côtés du carré étant par définition plus longs que les demi-diagonales, le chemin A-E-C nous semblait donc le plus court, en tout cas, le plus court des deux cas que nous avions imaginés ci-dessus. Si nous appliquons au triangle AEC la construction de Bückner, il devient évident que le chemin A'-P_1'-P_1-E est le plus court, et non celui des diagonales représenté par le chemin A'-E'-E. Les points A, E et C étant reliés, nous pouvons appliquer le même raisonnement au triangle symétrique BED et trouver un point symétrique P_2. Etant donné que nous nous étions simplifié la tâche en prenant quatre points A, B, C et D formant un carré, une conséquence est que P_1EP_2 est colinéaire, car A'P_1 et B'P_2 sont médianes respectivement des côtés AC et BD. Les angles ainsi formés autour des points P_1 et P_2 valant tous 120° ; il nous faut conclure que la solution retenue des diagonales ne constitue pas la solution minimale pour relier les cinq villes. Cette dernière, à la surprise de nos planificateurs du territoire, est formée par une portion d'*hexagone* ! Une seconde conclusion peut être tirée ; à savoir qu'en raison de la symétrie du carré, non pas une mais *deux* solutions minimales répondent au problème posé. Troisièmement, il est évident que le cinquième point E n'est qu'accessoire et que cette solution minimale reste valable pour quatre points A, B, C et D. Enfin, comme dans les autres cas étudiés ; toutes ces solutions de moindre action s'avèrent *constructibles* !

Figure 4



La solution retenue en Fig. 2b (Chemin A'E'E) est plus longue que la solution A'P'$_1$P$_1$



Film de savon entre deux plaques de plexiglas

La sagesse des films de savon

Si dans nos exercices précédents (voir *Fusion* n°45 et 46), nous nous étions servis de la lumière comme moyen de trouver les plus courts chemins, dans le type de cas qui nous préoccupe ici, la lumière ne nous serait guère utile. Il se trouve cependant que la Nature ne s'est pas pour autant trouvée en reste ; elle a réservé ce rôle aux films de savon qui ont la particularité de n'utiliser qu'un minimum de matière ! En effet, si au lieu de points à relier avec la plus grande économie, nous placions des bâtonnets fixés entre deux plaques de plexiglas (Fig.4b), et que nous trempions ce modèle dans de l'eau savonneuse, tout comme la lumière semblait connaître le plus court chemin, de même, le film de savon suit très exactement le chemin minimum tel que nous venons de le construire si laborieusement ! Ainsi, si quatre points représentent quatre villes à relier avec un maximum d'économie de routes et si, enfin, le terrain à traverser s'avère être plat et uniforme, c'est-à-dire, si nous nous mettons dans les conditions d'un espace euclidien ; et bien nos planificateurs seraient bien inspirés de suivre la sagesse des films de savon ! ■