À l'occasion du 375e anniversaire de la mort de Képler

« En ces temps inquiétants et incertains que sont les nôtres, lorsqu'il est difficile d'avoir goût en l'humanité ou dans la course des affaires humaines, il est particulièrement réconfortant de penser à la sereine grandeur d'un Képler. Il vécu à une époque où le règne de la loi dans la nature n'était en aucune manière une certitude reconnue. Combien fut grande sa foi en une loi uniforme, pour lui avoir donner la force de vouer dix années de durs et persévérants labeurs à l'étude empirique du mouvement des planètes et aux lois mathématiques de ce mouvement, totalement seul, sans le moindre soutien et compris par si peu ! Si nous voulons honorer sa mémoire comme elle le mérite, nous devons nous faire une image aussi claire que possible de ce problème et des étapes de sa solution. »

Tels étaient les mots qu'Einstein fit publier dans le *Frankfurter Allgemeine Zeitung* du 9 Novembre 1930, à l'occasion de la commémoration du 300e anniversaire de la mort de Képler. Soixante-quinze ans plus tard, ces mots sonnent toujours juste, et ils offrent un point de vue acceptable à partir duquel nous pouvons enquêter sur ce qui est aussi important aujourd'hui qu'alors : la relation entre l'épistémologie et la condition générale de l'humanité.

Il y a un bénéfice ironique à tirer de l'exploration de cette relation à partir de l'idée qu'Einstein avait de Képler. Même s'il reconnaissait l'importance de la relation entre l'état de la science et celui de la société, il échoua à en saisir, comme Képler, les implications épistémologiques plus profondes. Le problème n'est toujours pas résolu aujourd'hui. C'est pourquoi, en regardant Képler avec les yeux d'Einstein et réciproquement, nous pourrons appliquer la méthode de Képler aux problèmes identifiés par Einstein.

Johanes Kepler
(1571 - 1630)

BRUCE DIRECTOR

Du temps de Képler, l'irrationalisme dominait aussi la société européenne, en dépit du haut degré de connaissance atteint grâce à l'initiative des cercles associés à Nicolas de Cuse, près de deux siècles auparavant. Pour Cuse, à l'instar de Socrate et Platon, la cognition, bien que propre à l'être humain dans la forme soi-consciente, reflète une caractéristique générale de l'univers. C'est pourquoi, à l'opposé du dogme aristotélien qui domina l'Europe, suite de l'effondrement de la société grecque dans les siècles qui suivirent les Guerres du Péloponnèse, Cuse comprit, comme Socrate et Platon, que *non seulement l'univers matériel a un lien avec la pensée humaine, mais que l'homme, par son pouvoir de découvrir les principes physiques universels, fait partie intégrante de l'auto-développement de l'univers tout entier.*

Il poussa plus loin cette hypothèse. Selon lui, l'organisation des affaires humaines doit se fonder sur la reconnaissance du rôle de l'esprit humain dans le monde physique. Ses cercles réussirent à s'imposer dans la société, à preuve les succès, dans les sciences et les arts, de Brunelleschi, De Vinci, Pacioli, et les perfectionnements de la société créés par la mise en place des premiers états-nations dans la France de Louis XI et l'Angleterre de Henri VII.

En réaction, les financiers vénitiens, héritiers des traditions de la Rome impériale, tentèrent désespérément de rétablir leur contrôle féodal sur l'Europe en affaiblissant le concept optimiste de l'homme, qui avait pris corps dans la Renaissance. En lançant l'Inquisition espagnole de 1492, Venise et ses alliés déchaînèrent les guerres de religion à travers toute l'Europe dans le but de réintroduire, comme caractéristique dominante de la culture du continent, une conception de l'homme et de l'univers fondamentalement irrationnelle. Au crépuscule de la vie de Képler, cette horreur explosa en une dernière orgie de folie, appelée aujourd'hui guerre de Trente Ans.

Bohr et Heisenberg

Mais Képler comprenait que la folie sur Terre était le reflet d'une idée irrationnelle du Ciel. L'astronomie de son siècle avait abandonné la recherche des principes physiques universels qui caractérisaient la science égypto-pythagoricienne des sphères, et était revenue au modèle babylonien/persan, qui tenait l'homme pour incapable de découvrir une quelconque vérité sur la nature du monde physique, et lui ordonnait par conséquent d'accepter les dogmes irrationnels promus par l'autorité régnante, quels qu'ils soient. Ce modèle, qui enchaînait la science à la sophistique, était conçu pour faire porter par les cieux la justification des sociétés oligarchiques impériales.

Évoquant Ératosthène face au problème délien , Képler, à l'instar de Platon, implora ses contemporains de reconnaître que leurs conceptions erronées des planètes n'étaient que le reflet, tout aussi faux, de l'idée qu'ils se faisaient d'eux-mêmes. L'admission, tant par les scientifiques que par l'ensemble de la société, des doctrines aristotéliciennes était la cause de la désintégration politique et sociale qu'ils subissaient. Képler, de son propre aveu disciple du Cusain, soulignait que les principes organisateurs de l'univers sont congruents avec l'aptitude de l'esprit humain à les découvrir ; et que, de plus, l'existence de cette aptitude est, en elle-même, une indication que les caractéristiques de la créativité humaine sont celles de l'univers dans son ensemble. Ainsi l'écrit-il dans *Optiques* :

« Quant à celui qui évaluera cela avec attention, il trouvera (si tant est qu'il refuse d'avoir recours à la foi dans les saintes écritures) qu'il y a un Dieu créateur de toute la nature, et qu'en plus, dans la mécanique de celle-ci, il a pris soin des hommes à venir. Car ce théâtre du monde est ordonné de telle manière qu'il existe en celui-ci les signes suffisants par lesquels les esprits humains, reflets de Dieu, sont non seulement invités à étudier les œuvres divines, desquelles ils pourront évaluer la bonté du créateur, mais en plus aidés à enquêter plus profondément. »

Képler rejetta l'erreur commune faite par Ptolémée, Copernic et Brahé qui demeuraient attachés au diktat d'Aristote selon lequel les orbites des planètes devaient être des cercles parfaits. Au contraire, il adopta l'idée du Cusain selon laquelle le changement est une caractéristique bénévolente (de bonne volonté) de l'homme et du monde physique – et donc que l'orbite non-uniforme elliptique exprime plus parfaitement l'auto-perfectionnement de l'univers que les cercles mathématiquement parfaits. En démontrant, à partir de preuves déterminées expérimentalement, que les orbites des planètes étaient de fait non-uniformes, et en déterminant les principes gouvernants ce mouvement, Képler prouva, contre Aristote, non seulement que le changement est une caractéristique de l'univers physique, mais que l'esprit humain est capable de le connaître.

Pour Képler, la planète, bien qu'objet matériel, ne doit pas son existence au seul monde matériel, et son orbite n'est pas gouvernée uniquement par des principes matériels. Au contraire, sa trajectoire, passée et future, *trace un chemin à travers* un univers dans lequel les principes physiques de la vie et de la cognition sont tous ensemble agissants, partout et en tout temps. C'est pourquoi les principes gouvernant le mouvement de la planète ne servent pas seulement à la guider, ils mènent aussi l'esprit humain à les découvrir. Ainsi, souligne-t-il, l'esprit est un principe dans le monde matériel.

En prouvant qu'il pouvait découvrir et communiquer les véritables principes ordonnant les mouvements planétaires, Képler ne fit pas seulement avancer l'astronomie ; il affirma une conception optimiste de l'homme et de la nature contre l'opinion dominante, induite à accepter le règne de l'irrationalisme et de l'arbitraire sur la science et les affaires humaines.

A l'époque d'Einstein, cet irrationalisme culturel recommença à dominer les sciences. Vers la fin du XIX^{e} siècle, un nombre croissant de preuves expérimentales, telles que l'effet photoélectrique et la découverte de la quantisation de la lumière et de la chaleur par Planck, indiquait l'existence d'un changement fondamental des caractéristiques de l'action physique entre les domaines macroscopiques et microscopiques. Ces découvertes concordaient avec les travaux précédents de Gauss, Fresnel, Riemann, Weber etc., qui, ayants développé la méthode du calcul intégral de Leibniz, découvrirent des principes microscopiques à partir de leurs effets macroscopiques déterminés. Cela amena Riemann à souligner, dans sa dissertation d'habilitation, qu'il était hasardeux de présumer que les caractéristiques de l'action physique dans le domaine macroscopique pouvaient être étendues linéairement au très grand et au très petit. Au contraire, la science doit développer une notion dynamique de géométrie physique apte à refléter le potentiel de changement non-linéaire entre ces trois domaines d'action.

Karl F. Gauss
(1777 - 1855)

Ainsi, Riemann déclare :

« La connaissance de la relation causale d'un phénomène est fondée essentiellement sur la précision avec laquelle nous pouvons la poursuivre dans l'infiniment petit... Dans les sciences naturelles, cependant, où les concepts fondamentaux simples manquent encore de telles synthèses, l'on ne poursuit les phénomènes dans le petit, dans le but de percevoir des relations causales, qu'autant que nous le permet le microscope. Les questions se rapportant aux relations spatiales de la mesure dans l'infiniment petit ne sont donc pas inutile ».

En opposition, les empiristes britanniques tentèrent de réanimer Kant et Euclide à travers les travaux de James Clerk Maxwell notamment, célèbre pour avoir rejeté l'approche riemannienne de la physique en faveur de la doctrine néo-euclidienne qui excluait « toute géométrie autre que la nôtre ». Mais, lorsque la relation entre les effets macroscopiques observés de l'élec-

Bernhard Riemann (1826 - 1866)

tromagnétisme fut examinée à la lumière de la quantité croissante de preuves expérimentales indiquant un changement de caractéristique physique dans le domaine microscopique, le conseil de Riemann s'avéra essentiel, ce qu'Einstein reconnu.

Cependant, parmi les contemporains d'Einstein, la tentation « d'expliquer » ces phénomènes par des méthodes statistiques – similaires à celles utilisées par Ptolémée, Copernic et Brahé – connaissait une popularité croissante. Ces efforts furent dirigés par Niels Bohr, son protégé, Werner Heisenberg, et le premier professeur d'Heisenberg, Max Born.

Cette idée positiviste reposait sur l'affirmation selon laquelle, puisque qu'il n'existe pas de description mathématique de ces phénomènes autre que les méthodes statistiques, alors l'univers lui-même doit être fondamentalement livré au hasard. En d'autres termes, Bohr, Heisenberg, Born, et autres, soutinrent non tant qu'ils ne connaissaient tout simplement pas les principes sur lesquels se fondaient ces phénomènes, mais que de tels principes n'existaientt pas ; et puisque qu'ils n'existaient pas, ils ne pouvaient être découverts.

Born résuma son opinion sur ce débat dans l'édition de sa correspondance avec Einstein :

« La raison fondamentale du désaccord entre nous sur la validité des lois statistiques se résumait ainsi : Einstein était fermement convaincu que la physique pouvait nous fournir des connaissances du monde existant objectif. Je fus pour ma part, avec de nombreux autres physiciens, et en conséquence d'expériences dans le domaine des phénomènes quantiques atomiques, graduellement converti à l'idée qu'il n'en est rien. À quelque moment que ce soit, notre connaissance du monde objectif n'est qu'une approximation grossière à partir de laquelle, en y appliquant certaines règles comme les lois de probabilités de la mécanique quantique, nous pouvons prédire des conditions inconnues (e.g. futures) ».

[Il est important de souligner que ce point de vue, que l'on appelle généralement l'interprétation de Copenhague des phénomènes quantiques, n'est pas plus de la science que l'astronomie de Ptolémée. Cela n'était qu'une croyance post hoc quasi-sectaire reflétant – et finalement utilisée pour justifier – l'existentialisme courant, associé à la mise en place de formes fascistes de contrôle oligarchique sur le monde. Dans la pure tradition des empires babylonien, perse et romain, l'intention des impérialistes londoniens visait à saper la propagation de l'optimisme culturel lié au système américain, et à retourner à l'ère des sorciers et des serfs.]

Les fondations axiomatiques de l'Ecole de Copenhague sont depuis devenues si profondément enracinées dans l'opinion populaire qu'elles sont regardées comme doctrine par des gens qui ne connaissent absolument rien à la physique, à l'exemple de la croyance selon laquelle les doctrines de libre-échange de Mandeville reflètent « l'ordre naturel des choses ».

Einstein, Planck et une poignée d'autres rejetèrent ce positivisme radical, et défendirent avec ténacité la causalité scientifique tout au long des premières décennies du XX[e] siècle. En septembre 1926, Einstein présenta clairement sa position à Born :

« La mécanique quantique en impose certainement. Mais une voix intérieure me dit que n'est pas encore la réalité. La théorie est bavarde, mais elle ne nous rapproche réellement pas plus du secret de 'l'Ancien'. De toute manière, je suis convaincu qu'Il

ne joue pas aux dés. Des ondes dans un espace tridimensionnel, dont la vélocité est régulée par l'énergie potentielle (par exemple, des bandes de caoutchouc)... je travaille énormément à déduire l'équation du mouvement de points matériels considérés comme des singularités, à partir de l'équation différentielle de la relativité générale ».

Dans une lettre écrite à Born des années plus tard, en septembre 1944, Einstein résuma l'opinion qu'il avait continuellement exprimée :

« *Nos perspectives scientifiques nous ont rendus antipodaux. Vous croyez en un dieu qui joue aux dés, et moi en une loi et un ordre complet dans un monde qui existe objectivement, et que j'essaie de saisir d'une manière furieusement spéculative. J'y crois pourtant fermement, mais j'espère que quelqu'un découvrira une manière plus réaliste, ou plutôt une base plus tangible, qu'il n'a été mon lot de trouver. Et même les magnifiques succès initiaux de la théorie quantique ne me font pas croire au jeu de dés fondamental, bien que je sois parfaitement au courant que nos jeunes collèges interprètent cela comme une conséquence de la sénilité. Il ne fait aucun doute qu'un jour viendra où nous verront laquelle de nos attitudes instinctives était correcte.* »

En septembre 1950, après que son association avec Kurt Gödel ait amélioré sa compréhension historique et épistémologique, Einstein écrit à Born pour lui dire :

« *Je vois dans le dernier paragraphe de votre lettre que vous aussi tenez la description théorique quantique pour incomplète (votre référence à un ensemble). Mais vous êtes après tout convaincu qu'il n'existe aucune loi (complète) permettant une description complète, cela en accord avec la maxime positiviste* esse est percipi. *Ceci est une attitude programmatique, non une connaissance ! C'est ici que nos attitudes se différencient réellement. Pour le temps présent, je suis seul avec mes idées – comme Leibniz l'était au sujet de l'espace absolu de la théorie de Newton. Et voilà, j'ai refait parader mon vieux cheval de bataille ! Mais c'est de votre faute, car vous m'avez provoqué.* »

Mais bien qu'Einstein soit demeuré résolu dans sa résistance au positivisme radical de l'interprétation de Copenhague, et qu'il ait dépensé l'essentiel de ses efforts à essayer de développer un concept qui puisse le remplacer, il fut incapable de réussir, pour deux raisons qui sont liées. Premièrement, contrairement à Képler et à Leibniz, il ne parvint pas à s'extraire complètement du pessimisme culturel dominant dont le reflet était la dégénération de la science et de la société ; deuxièmement, il ne perçut pas – comme son contemporain Vernadski – que la question posée par les preuves expérimentales de phénomènes quantiques ne pouvait trouver de réponse dans le domaine de la physique mathématique. En se référant à un « monde objectif » dans son rejet de l'interprétation de Copenhague, Einstein acceptait tacitement le sophisme aristotélicien selon lequel le monde de l'esprit et le monde physique seraient séparés. Mais, ces questions ne peuvent être examinées que lorsque les phénomènes physiques sont perçus – ce que Képler fit – comme des effets observés à l'intérieur d'un univers dans lequel la physique, la vie et l'esprit interagissent dans ce que Riemann appelle une variété multiplement connexe.

Max Plank
(1858 - 1947)

L'UNIVERS VU DE L'INTÉRIEUR

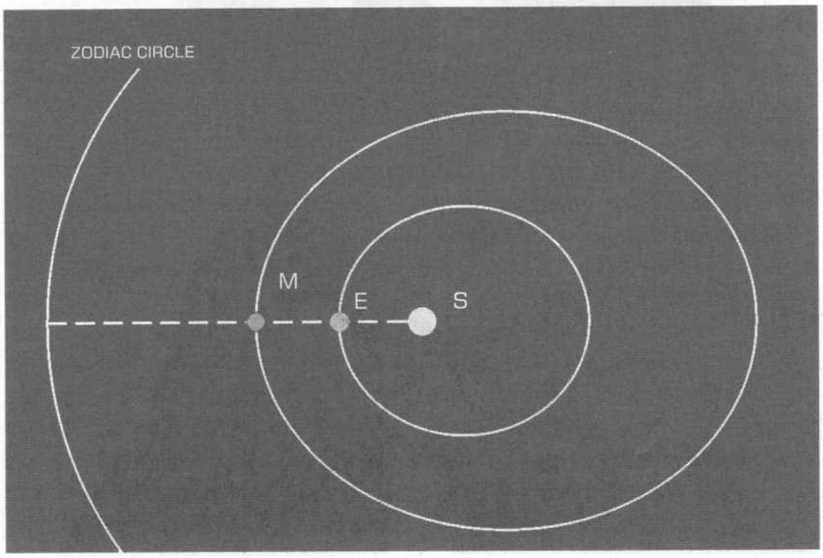
Pour commencer à se faire une idée de ce qui devint une conception hypergéométrique de l'univers, nous pouvons examiner le problème identifié par Einstein dans sa commémoration de Képler de 1930 : la détermination de l'orbite de la Terre. Cela représentait un défi sérieux, car il s'agissait de déterminer cette orbite à partir de la Terre elle-même, ou plus généralement de déterminer les mouvements du système solaire quoique circulant dans celui-ci.

Il était évident pour Képler que toute enquête scientifique – comme celle de la détermination de l'orbite de Mars – est en réalité une enquête sur l'univers dans son ensemble, et non sur un phénomène particulier. Toute tentative visant à réduire le problème à un petit ensemble de particularités ne serait rien d'autre que de la sophistique. D'un point de vue plus général, la question serait : comment déterminer la nature dynamique éternelle de l'univers lui-même, de l'intérieur du développement temporel de cette dynamique éternelle ?

Einstein écrivit en 1930 :

« Copernic avait ouvert les yeux du plus intelligent au fait que la meilleure manière de se faire une idée claire des mouvements apparents des planètes dans les cieux, était de les considérer tournant autour du Soleil supposé stationnaire. Si les planètes s'étaient déplacées uniformément en cercle autour du Soleil, il eut été comparativement facile de découvrir à quoi ces mouvements auraient ressemblé vus de la Terre. Cependant, puisque le phénomène en question était beaucoup plus compliqué que cela, la tâche en fut nettement plus ardue. La première des choses à faire était de déterminer ces mouvements empiriquement à partir des observations de Tycho Brahé. C'est seulement alors qu'il devint possible de penser à découvrir les lois générales auxquelles ces mouvements satisfont ».

Figure 1



Pour comprendre combien il était difficile de seulement comprendre la réalité des mouvements de rotations planétaires, l'on doit se figurer ceci : on ne peut jamais voir où se situe réellement une planète à un moment donné, mais seulement dans quelle direction on peut l'observer à ce moment depuis la Terre, qui tourne elle-même autour du Soleil d'une manière inconnue. Les difficultés semblaient donc insurmontables.

Képler dut trouver le moyen de mettre de l'ordre dans ce chaos. Pour commencer, il lui fallait découvrir à quoi ressemblait le mouvement de la Terre elle-même.

Comme Einstein le faisait remarquer, le mouvement des planètes dans le système solaire n'est pas directement observable. Depuis la Terre, il n'est possible d'observer que les positions relatives du Soleil, des planètes et des étoiles fixes. Les variations constatées dans ces positions relatives sont donc dues à une combinaison de tous ces mouvements. Par conséquent, pour déterminer le mouvement de la planète Mars, comme Képler tenta de le faire, il fallait d'abord démêler quelle part de ces variations des positions relatives appartenait respectivement aux mouvements de Mars, de la Terre, du Soleil et des étoiles fixes.

Képler avait montré dans sa *Nouvelle Astronomie* que Ptolémée, Copernic et Brahé avaient tous trouvé différents moyens mathématiques de démêler ces mouvements. Le problème était qu'aucun n'était vrai, ni même ne prétendait l'être. Képler, suivant en cela le Cusain, tenta de comprendre les variations observées en les considérant comme fonctions de causes véritables ; mais ne pouvant pas observer directement ces causes, il dut dépasser les limitations des perceptions sensorielles et imaginer les mouvements apparents d'un point de vue accessible à la raison seule.

Mais avant de déterminer les causes véritables, Képler devait apprendre à connaître les différents mouvements, ce qui demandait aussi un dépassement les limitations imposées par les sens. Dans le cas des mouvements apparents de Mars, il lui fallut d'abord découvrir les relations entre Mars, la Terre et le Soleil ; ce qui signifiait connaître le mouvement de la Terre, lequel n'était pas directement observable. En conséquence de quoi, il chercha à imaginer le mouvement de la Terre à partir de Mars, dont le mouvement lui était inconnu !

Son approche est présentée en détail dans sa *Nouvelle Astronomie,* mais on peut la résumer ainsi : de la Terre, on peut observer le mouvement apparent du Soleil à travers le zodiaque sur une année ; il conçut que ce mouvement apparent du Soleil était le reflet du mouvement réel de la Terre ; sa nature cyclique indiquait clairement que le mouvement de la Terre était une orbite close ; et de cette manière il imagina comment un observateur, à partir du Soleil, verrait la Terre.

Regarder la Terre depuis Mars était plus problématique, car contrairement au Soleil, Mars était aussi en mouvement. Cherchant une solution, Képler commença par noter la position dans le zodiaque de Mars et du Soleil au moment unique où le Soleil, la Terre et Mars sont alignés (**Figure 1**).

Cette configuration est appelée opposition, et s'est produite la dernière fois le 7 Novembre 2005. Dans cette situation, un observateur sur Terre verra Mars en une certaine position dans le zodiaque, et un observateur sur Mars verra la Terre et le Soleil ensemble dans une position directement opposée à celle de Mars.

Quelque temps après cet évènement (les relevés historiques ont donné à cette période une durée de 687 jours terrestres), Mars retournera à la même position sur son orbite, en opposition avec la Terre et le Soleil. Mais la Terre sera alors dans une position différente sur sa propre orbite, et, à cause de cela, on observera Mars en une position différente dans le zodiaque. (**Figure 2**)

Néanmoins, un observateur martien observera que le Soleil occupe la même place que 687 jours auparavant, mais constatera un changement de la position zodiacale de la Terre d'une date à l'autre. Ces observations permettent de former un triangle entre la Terre, le Soleil et Mars, dont la base est la ligne directe formée par les trois astres lors de l'opposition, et dont les côtés sont les lignes de visées de la Terre vers Mars et vers le Soleil, à partir de sa nouvelle position. En comparant les relevés obtenus de ces trois postes d'observations, Képler détermina les angles de ce triangle. En appliquant cette méthode de calcul aux vingt années d'observations qu'il tenait de Tycho Brahé, il détermina précisément l'orbite de la Terre (**Figure 3**).

Cela étant fait, Képler se tourna vers l'orbite de Mars. Sa découverte est présentée en détail dans *Nouvelle Astronomie,* que nous invitons le lecteur à consulter, mais il y a un point qu'il est vital de souligner en vue de ce qui va suivre.

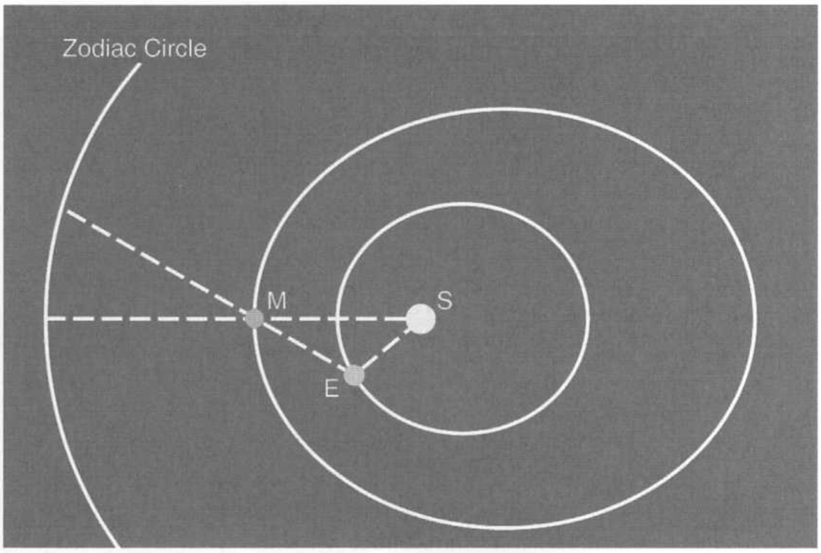


Figure 2

Lorsque Képler eut déterminé la taille de l'orbite terrestre et sa position excentrique par rapport au Soleil, il constata que celle de Mars était excentrique elle-aussi. Sa première supposition leur accordait une forme circulaire. Pour la Terre, cela constitua une approximation fructueuse en raison de la très faible excentricité de son orbite ; cependant, l'excentricité de l'orbite martienne s'éloignait quant à elle significativement de la pure circularité. Képler le découvrit en comparant les positions de Mars avec les caractéristiques géométriques du cercle : en particulier, celle qui spécifie que trois positions distinctes sont suffisantes pour déterminer un cercle unique. Suivant la supposition de la circularité, n'importe quel groupe de trois positions observées de Mars se trouvera sur le même cercle. Mais, après avoir testé 79 groupes de trois positions et constaté que chaque groupe reposait sur un cercle différent, Képler réalisa qu'il n'avait pas affaire à une orbite circulaire et, après beaucoup de travail, il montra que cette orbite était une ellipse dont le Soleil occupe l'un des foyers.

DÉMÊLER LES OMBRES

Comme nous l'avons dit plus haut, Képler, en cherchant à déterminer l'orbite de Mars, cherchait à découvrir la nature de l'univers lui-même. Un univers qui a produit un système solaire ; dans lequel

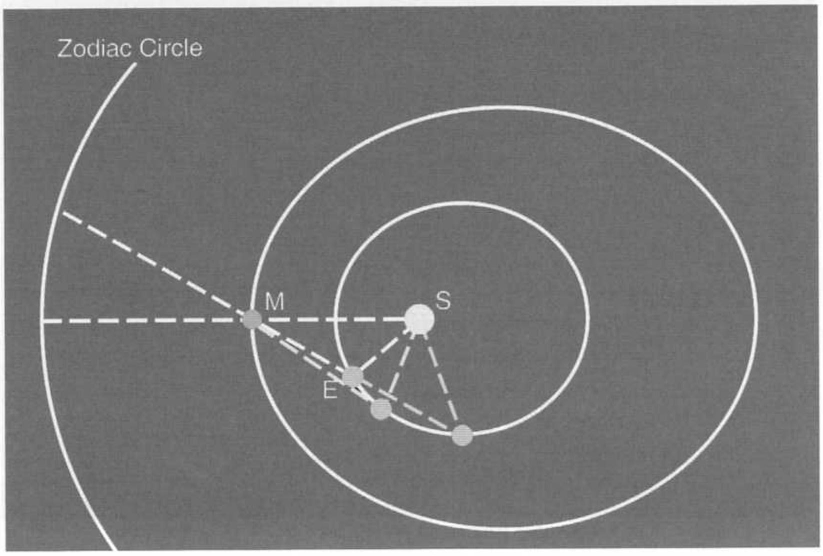


Figure 3

circule une Terre ; qui a été progressivement dominée par la vie ; et habitée par des êtres humains pensants, capables d'en découvrir les principes.

Képler compris que pour enquêter sur ces principes profonds à l'aide de l'astronomie, il devait aussi examiner le processus qui le portait à chercher. Dans le même temps qu'il chercha à déterminer les mouvements du système solaire de l'intérieur de celui-ci, en vue de découvrir la nature sous-jacente de l'univers, il dut former une idée soi-consciente du rôle de son propre esprit dans le développement de cet univers. Ce qui signifie qu'il devait enquêter sur la connexion entre les éléments physiques de l'univers, l'interaction entre ces éléments et ses propres sens, l'interaction entre ces perceptions sensorielles et son esprit, et celle entre son esprit et l'univers lui-même.

Il reconnu que, puisque toute observation astronomique est le résultat de l'interaction entre de la lumière et l'œil humain, connaître les principes de la lumière et de la vision pourrait offrir un lien vers la connexion entre les domaines cognitif et physique. Il écrit à ce sujet dans l'introduction d'*Optiques* :

« Lors, quelle merveille, si ce principe de tous les ornements de l'univers, que le divin Moïse introduit immédiatement au premier jour dans la matière à peine crée, comme une sorte d'instrument du Créateur, pour donner forme et accroissement à toute chose – si, dis-je, ce principe, chose excellentissime du monde corporel, matrice des facultés animales, et chaîne liant les mondes corporel et spirituel, s'était introduit dans les lois mêmes desquelles le monde dut être pourvu ».

Dans *Optiques*, cette cohérence entre les lois physiques et la cognition s'exprime comme un reflet dans les orbites planétaires elliptiques et les caractéristiques de la lumière et de la vision comme cas particuliers d'une seule et même conception de la fonction conique.

Il est important ici de dissiper le mythe populaire répété dans quasiment tous les lycées et les départements de mathématiques universitaires aujourd'hui. Nos mathématiciens, passés maîtres dans l'art de l'esquive, insistent sur le fait que les grecs n'étudiaient les sections coniques qu'en raison de leur pureté mathématique, et sans aucun regard pour leur importance dans le monde physique. De fait, ces sophistes maintiennent que, lorsque Képler découvrit la nature elliptique des orbites planétaires, cela fut une surprise complète, secondaire par rapport aux intérêts purement mathématiques des grecs.

Rien n'est plus loin de la vérité. Les recherches grecques sur les sections coniques provenaient des recherches de Pythagore sur le problème du doublement du cube. Platon explique dans le *Timée* qu'il s'agissait d'une enquête sur les caractéristiques de l'univers physique, sur la manière dont ces principes étaient véritablement reflétés par l'esprit humain, et sur l'interaction de l'esprit humain avec l'univers entier. Par conséquent, la découverte de Képler d'une nouvelle forme de la fonction conique exprimée par les orbites planétaires n'était pas accidentelle, mais elle n'était pas non plus une surprise, sauf pour les mathématiciens contemporains.

De plus, lorsqu'il découvrit les manifestations planétaires de sections coniques, il comprit aussi que cela avait une portée universelle, en indiquant – de la même manière que la construction d'Archytas pour le doublement du cube par le tore, le cylindre et le cône – que la caractéristique d'action dans l'univers physique n'est pas simplement sphérique, mais d'une espèce supérieure – une espèce que Gauss et Riemann appelleront plus tard hypergéométrique.

Cette espèce supérieure hypergéométrique fait son apparition lors de la recherche d'une forme générale de la fonction conique, de laquelle les orbites elliptiques et le doublement du cube sont des manifestations physiques. Dans *Optiques*, Képler enquête sur cette fonction conique à partir de la lumière et de la vision.

On peut représenter de cette manière les sections coniques, en les produisant par le mouvement d'un plan coupant un cône (**Figure 4**).

Cependant, si nous les représentons projetées sur une surface, il apparaît une discontinuité mathématique, lors de la transition de la région elliptique à la région hyperbolique (**Figure 5a-5e**).

Képler la décrit ainsi :

« Si l'on veut bien parler analogiquement plutôt que géométriquement, il existe entre ces lignes l'ordre suivant, en raison de leurs propriétés : de la ligne droite, elles vont à la parabole par une infinité d'hyperboles, puis par une infinité d'ellipses jusqu'au cercle. Car la plus obtuse des hyperboles est une ligne droite, et la plus aiguë une parabole. De même, la plus aiguë des ellipses est une parabole ; la plus obtuse, un cercle. La parabole a donc d'un côté deux choses infinies par nature – l'hyperbole et la ligne droite – et de l'autre deux choses finies et revenant sur elles-mêmes – l'ellipse et le cercle. Elle se tient quant à elle à la place médiane, avec une nature médiane ; puisqu'elle est infinie d'un côté, et tolère une limitation de l'autre, car plus elle s'étend, plus elle devient parallèle à elle-même, et n'étend pas ses bras (en quelque sorte) comme l'hyperbole, mais se refuse à embrasser l'infini, recherchant toujours moins bien qu'elle embrasse toujours plus. Avec l'hyperbole, plus elle embrasse entre ses bras, plus aussi elle recherche à embrasser. Donc, les limites opposées sont le cercle et la ligne droite : la première est pure courbure, la seconde pure droiture. Entre eux sont placées l'hyperbole, la parabole et l'ellipse, participant du droit et du courbe, la parabole également, l'hyperbole tendant vers le droit et l'ellipse vers le courbe ».

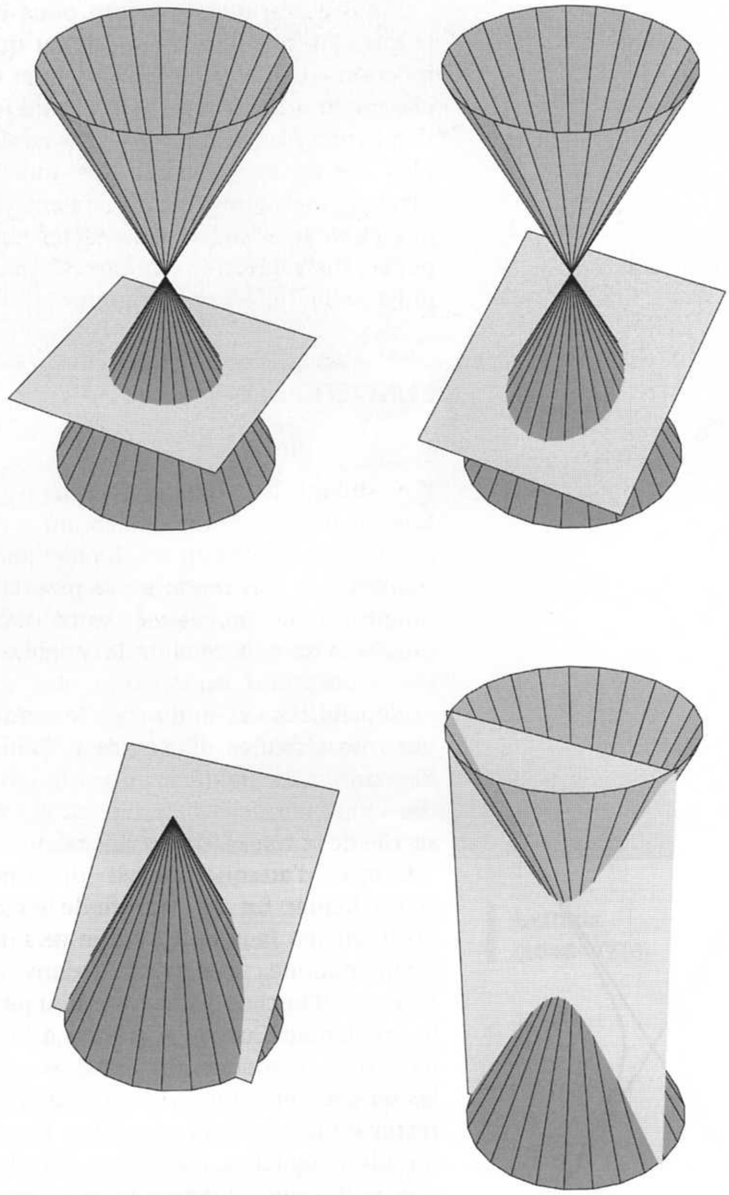
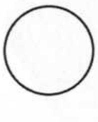
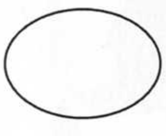


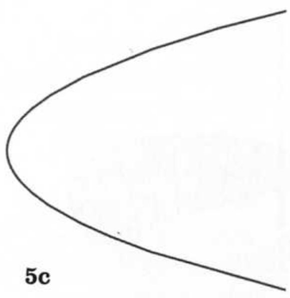
Figure 4

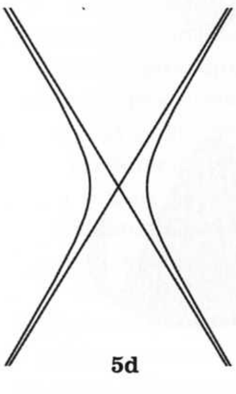
Képler démontra de plus que les implications épistémologiques de ces orbites elliptiques ne s'expriment pas seulement en relation à la lumière et à la vision. C'est notamment dans *Harmonie du Monde* qu'il démontre la congruence entre, d'un côté, les relations entre les vitesses déterminantes minimum et maximum des orbites elliptiques, et, de l'autre, les relations de la polyphonie bien tempérée, que Jean-Sébastien Bach développa subséquemment dans ses compositions. Ici de nouveau apparaît une discontinuité significative d'un point de vue physique : il s'agit de l'existence de l'intervalle lydien formé entre les orbites de Mars, de Jupiter et de la ceinture d'astéroïde, pourtant inconnue du temps de Képler ! Cette discontinuité physique, en tant que point de changement (une sorte de changement de registre), se reflète aussi dans la différence de nature physique des planètes circulant d'un côté ou de l'autre de celle-ci. Cette relation harmonique et la discontinuité qui l'accompagne sont des marques héréditaires du disque de plasma organisé à partir duquel le système solaire s'est développé.

Les découvertes ultérieures des orbites hyperboliques des comètes, et la détermination par Gauss de l'orbite de l'astéroïde Cérès, confirma que la conception keplérienne – selon laquelle les orbites elliptiques sont un cas particulier d'une fonction conique plus générale – était juste. Cette conception généralisée de l'astronomie de Képler fut résumée par Gauss dans *Théorie du Mouvement des Corps célestes, parcourant des Sections coniques autour*


5a


5b


5c


5d

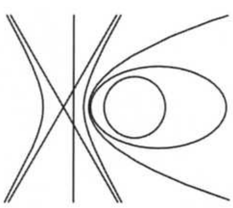

5e

Figure 5a à 5e

du Soleil.

Gauss, et son élève Riemann, poussèrent la question plus loin en spécifiant que la fonction conique générale de Képler était elle-même un cas particulier d'une fonction hypergéométrique, ou hyper-conique, plus élevée et générale. Ces fonctions hypergéométriques exprimeraient non pas les caractéristiques du système solaire per se, mais la forme des caractéristiques universelles qui les ont produites.

L'UNIVERS NON-INFINI

En situant les fonctions coniques du point de vue d'une conception unifiée des domaines physiques, biologiques et cognitifs de l'astronomie, Képler faisait progresser le processus, lancé par le Cusain, visant à rétablir la science sur les conceptions supérieures des grecs pré-euclidiens, et annonçait les réalisations postérieures de Kaestner, Gauss et Riemann. Cela signifiait purger la science des effets pernicieux dus à l'acceptation servile de la géométrie euclidienne.

L'angle d'attaque décisif du Cusain et de Képler fut de démolir le concept aristotélicien faux et arbitraire de l'infini mathématique, enchâssé dans les *Éléments* d'Euclide. Si l'espace était tel que le proclamait Euclide – étendu à l'infini dans trois directions rectilinéaires – seuls les mouvements uniformes circulaires ou rectilinéaires seraient possibles. Dans ce monde imaginaire, les orbites elliptiques non-uniformes, déterminées expérimentalement, n'existeraient que comme aberrations arbitraires dans un univers supposé ne pas changer.

Abraham Kaestner déclara plus tard que la validité formelle de la géométrie euclidienne vit ou meurt, s'élève ou chute, selon qu'est accepté ou non le postulat des parallèles. Euclide était si conscient de cette vulnérabilité qu'il ne mentionna pas directement l'infini dans ses énonciations, et ne présenta le postulat des parallèles qu'autant qu'il était nécessaire dans les preuves des théorèmes qui en découlent. Et pourtant, soulignèrent Gauss et Kaestner, sans la supposition du postulat des parallèles, pas de triangles similaires ; et sans triangles similaires, l'édifice entier de la géométrie euclidienne s'effondre. Gauss alla plus loin que Kaestner, en insistant sur le fait que le postulat des parallèles ne pouvait être vrai que si l'on supposait nulle la courbure de l'espace physique – supposition qui ne saurait être déterminée que par des mesures physiques, et non par le formalisme mathématique de la géométrie euclidienne.

D'un point de vue subjectif, la croyance que la géométrie euclidienne ait une réalité physique nécessite d'admettre l'axiome de Kant selon lequel l'esprit humain est pour ainsi dire câblé pour penser l'univers en termes euclidiens. Cependant, des preuves aussi anciennes que celle d'Archytas, démontrant que le doublement du cube « euclidien » dépend d'une fonction conique supérieure, démontrent immédiatement que la vénération que Kant voue à la géométrie euclidienne est une erreur. La construction projective keplérienne des sections coniques offre une démonstration supplémentaire contre l'illusion de cette idée kantienne.

La construction keplérienne fait apparaître l'infini non pas comme une grandeur indéfinie et inatteignable, mais comme un point de changement, une transition entre les domaines d'actions hyperboliques et elliptiques rassemblés sous une même fonction conique. Ainsi, du point de vue de Képler, l'infini est au milieu – et non à l'extrémité – d'une variété non-infinie autolimitée.

Les raisons expérimentales et épistémologiques d'un tel concept d'univers non-infini avaient d'ores et déjà été présentées par Platon dans le *Timée*. Le Cusain et Képler ravivèrent et étendirent ces discussions dans de nombreuses directions. Dans *De la Docte Ignorance*, Cuse souligne que l'apparemment infini se montre sous la forme « développée » d'un univers autolimité, « enveloppé ». Dans la forme développée, des opposés comme le maximum et le minimum apparaissent différents, alors que dans la forme enveloppée de tels opposés coïncident. En 1610, Képler présenta une raison physique en faveur de ce concept d'autolimitation : si l'univers était infini, le ciel nocturne ne serait pas noir, mais rempli de la lumière d'un nombre infini d'étoiles. Ce paradoxe est aujourd'hui associé au nom d'un proche collaborateur de Gauss, William Olbers, qui près de deux cents ans plus tard le représenta comme un argument direct contre Kant.

Riemann aussi, dans sa dissertation d'habilitation, argumenta en faveur d'un univers non-infini :

« Lorsqu'on étend les constructions de l'espace à l'immensurablement grand,

il faut faire la distinction entre l'illimité et l'infini ; le premier appartient aux rapports d'étendue, le second aux rapports métriques. Que l'espace soit une variété illimitée de trois dimensions, c'est là une hypothèse qui s'applique dans toutes nos conceptions du monde extérieur, qui nous sert à compléter à chaque instant le domaine de nos perceptions effectives et à construire les lieux possibles d'un objet cherché, et qui se trouve constamment vérifiée dans toutes ces applications. La propriété de l'espace d'être illimité possède donc une plus grande certitude empirique qu'aucune autre donnée externe de l'expérience. Mais l'infinité de l'espace n'en est en aucune manière la conséquence ; au contraire, si l'on suppose les corps indépendants du lieu, et qu'ainsi on attribue à l'espace une mesure de courbure constante, l'espace serait nécessairement fini, dès que cette mesure de courbure aurait une valeur positive, si petite qu'elle fut ».

Cette notion anti-euclidienne d'univers autolimité est conforme, soulignait le Cusain, à la nature du monde physique et à celle de l'Homme. À l'instar du monde physique, la vie humaine est finie mais illimitée. Elle commence avec la naissance et finit avec la mort. Du point de vue de cette mortalité, le monde d'avant la naissance et celui d'après la mort semblent être infiniment loin. Mais cette vie finie, de par la transmission de découvertes créatrices à travers la culture, affecte, et est affectée par, ce qui la précède et ce qui la suit. Ces territoires apparemment infinis, au-delà des limites temporelles, ne sont pas hors de portée de la vie mortelle, mais au centre de celle-ci. Ainsi, accorder foi à une géométrie euclidienne revient à rejetter l'immortalité de l'âme humaine.

L'infirmation de la géométrie euclidienne établie par le Cusain et Képler prépare la scène pour le développement d'une conception nouvelle, physiquement déterminée, d'une géométrie non-infinie. Les premiers pas dans cette direction sont dus aux travaux de Girard Desargues (1593-1662), qui jetta à la corbeille la géométrie euclidienne en faveur des idées de relations projectives képlériennes, bannissant ainsi complètement de la science le concept aristotélicien d'infini.

La réalisation d'une expérience simple illustrera la méthode de Desargues : dessinez un large rectangle sur un tableau ; les côtés opposés du rectangle, selon les suppositions de la géométrie euclidienne, devraient apparaître être parallèles et donc ne jamais se rencontrer, quand bien même on les étendrait indéfiniment. Saisissez-vous maintenant d'un plan transparent de plexiglas et posez-le penché à un certain angle contre le plan du tableau. Un œil fermé, recopiez les lignes du rectangle sur le plexiglas. Cette action produit une projection conique du tableau sur le plan transparent, l'œil étant l'apex de ce cône. Par cette projection, les images des côtés opposés du rectangle, qui semblaient être parallèles sur le tableau, sont sécantes sur le plexiglas. Il suffit donc de tourner la tête pour ramener l'infini au fini !

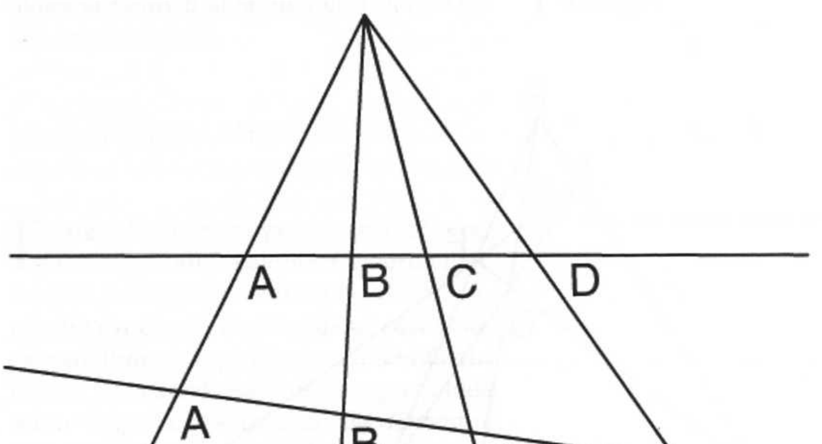
De cette manière Desargues commença à généraliser les développements képlériens de l'idée d'univers non-infini du Cusain, produisant de nombreuses découvertes qui s'avérèrent cruciales pour les développements ultérieurs de la science, l'une d'entre elles étant d'une importance particulière pour la présente discussion.

Desargues démontra que, quoique par la projection les longueurs, les proportions de longueurs et les angles soient en général modifiés, il y a une caractéristique qui reste invariante. Nommée plus tard « rapport croisé », cette caractéristique est le rapport entre deux rapports formés parmi quatre points choisis au hasard (**Figure 6**).

Puisque les sections coniques sont en relation projective les unes par rapport aux autres, l'invariance du rapport croisé est une caractéristique de la fonction conique (**Figure 7**).

Une illustration approfondie de ce même principe peut être tirée d'une autre découverte de Desargues : le quadrilatère complet. Desargues prouva que les intersections de l'extension des côtés et

Figure 6



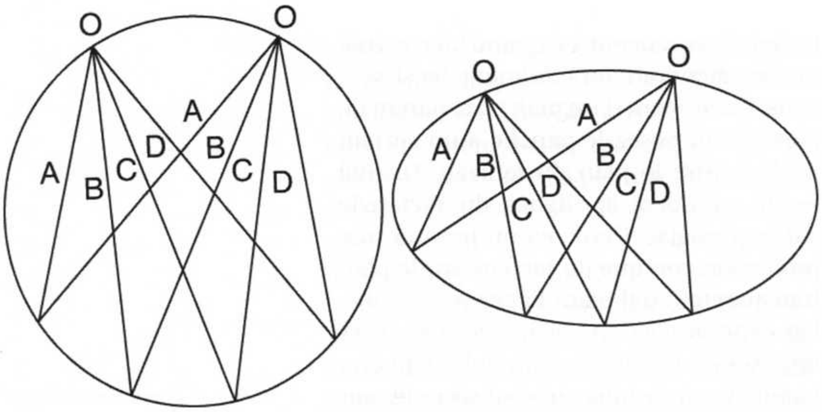


Figure 7

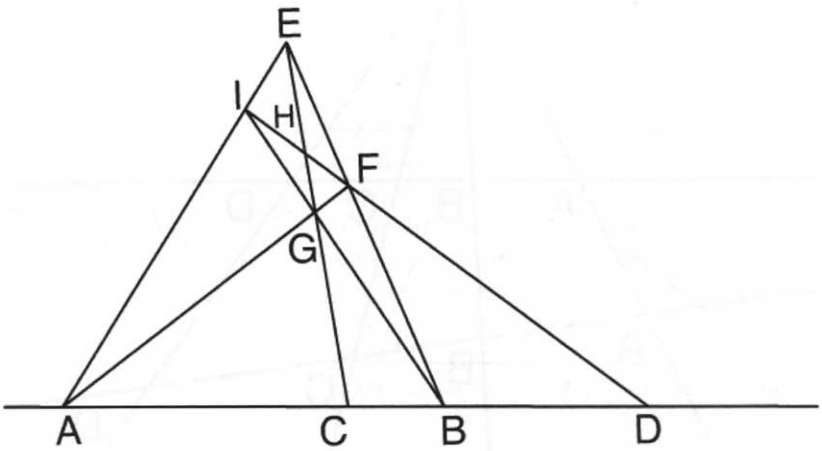
diagonales d'un quadrilatère quelconque forment une configuration projective dans laquelle les rapports croisés sont préservés (**Figure 8**).

Ce type de rapport croisé est un cas spécial, appelé harmonique, car B divise le segment AC dans la même proportion que C divise AD. Si l'on observe maintenant de manière dynamique le quadrilatère complet, et que l'on imagine – dans la tradition de Képler – que le point D s'enfuit vers l'infini dans une direction, la position des points A, B et C doit aussi changer en vertu de la conservation de la relation harmonique entre les quatre points. Ce mouvement changera aussi les angles du quadrilatère (**Figure 9**).

Lorsque que les côtés du quadrilatère deviennent parallèles, le point D touche à l'infini, ou inversement lorsque le point D touche à l'infini, alors les côtés du quadrilatère deviennent parallèles. A ce point, le rapport croisé est encore conservé (**Figure 10**).

Si nous continuons à pencher un peu plus les côtés du quadrilatère, le point D semblera revenir de l'infini par l'autre côté du point A, toujours en conservant les proportions harmoniques avec les points A, B et C (**Figure 11**).

Figure 8



Du point de vue de la géométrie euclidienne, la caractéristique harmonique du quadrilatère complet semble mystique, car en géométrie euclidienne l'infini ne peut avoir aucun effet sur le fini. Mais comme le montre la construction de Desargues, « l'infini » du quadrilatère complet est, de même que dans les projections coniques de Képler, un point unique de changement conservant une relation harmonique avec les parties finies, de la même manière que des points « finis ». Ce type de paradoxe met les sophistes euclidiens à l'agonie : soit ils maintiennent la validité de la géométrie euclidienne et déclarent que les caractéristiques harmoniques du quadrilatère complet sont magiques, soit ils admettent, comme Képler, les preuves expérimentales que les principes physiques expriment de ce type de relations harmoniques et reconnaissent que la géométrie euclidienne est une fraude.

Le quadrilatère complet illustre aussi ce qui sera plus tard appelé par Riemann le « principe de Dirichlet ». Il y a une relation connexe unique entre les points A, B, C et D, et les angles et longueurs des côtés et des diagonales du quadrilatère. Cette relation est un effet du principe harmonique reflété par l'invariance du rapport croisé. C'est ce principe qui est premier, les positions des objets visibles en sont une fonction.

Cette relation harmonique demeure, même si l'un des points semble être infiniment loin, car le point à l'infini n'est pas hors du processus, mais bien dedans. Ce qui paraît être infini n'est en définitive qu'un point de changement, situé cependant à l'intérieur d'une variété autolimitée non-infinie.

Le quadrilatère complet et les coniques képlériennes ne peuvent exister dans un espace euclidien infiniment étendu mais seulement au sein d'une telle variété. Dans celle-ci, le changement est une caractéristique essentielle et ce qui ressemble de prime abord à un infini mathématique est compris comme une des expressions de ce changement.

LA VOIE VERS L'HYPER-CONIQUE.

Après Desargues, la nature et l'expression physique des fonctions coniques képlériennes ont été développées plus avant par Blaise Pascal et Leibniz. Lors du développement du calcul infinitésimal, Leibniz montra que la fonction conique pouvait se présenter sous trois formes distinctes, quoique liées : l'exponentielle, la circulaire et l'hyperbolique. Au travers de sa collaboration avec Bernoulli, il démontra que la chaînette est une expression physique des trois formes de fonctions coniques. Ceci prouva, une fois de plus, que le concept cusien-képlérien de variété non-infinie autolimitée était conforme aux caractéristiques physiques de l'univers. Néanmoins, l'on trouve déjà nichée dans l'astronomie de Képler une preuve expérimentale appelant à développer, au-delà de ces fonctions coniques, un type supérieur de fonction hyper-conique. On lui donna le nom de « problème de Képler », que Gauss étudia et qui le mena à la découverte des transcendantales elliptiques.

Le « problème de Képler » est né des efforts réalisés pour déterminer le mouvement d'une planète sur une orbite elliptique. Képler avait déjà montré qu'il était impossible de décrire complètement le principe de ce mouvement à partir des fonctions de l'action circulaire. Les travaux ultérieurs de Leibniz ne firent pas que confirmer ce point, mais indiquèrent que les autres fonctions associées à l'action conique – l'hyperbolique et l'exponentielle – étaient tout aussi inadéquates à cette description. Dès 1797, Gauss situa la cause de ce problème dans le fait que le mouvement elliptique était gouverné par les transcendantales elliptiques, qui sont une forme distincte et supérieure aux fonctions circulaires, exponentielles et hyperboliques.

À la suite de ces premières découvertes, Gauss continua à explorer la relation entre ces deux domaines transcendantaux. L'une de ses intuitions les plus intéressantes se trouve dans ses recherches sur le pentagramme mirifique qui fut découvert, à l'origine, par un contemporain de Képler, John Napier, dans le cadre de ses études sur la trigonométrie sphérique. Napier remarqua que la nature autolimitée de la sphère était reflétée dans la relation connexe entre les côtés et les angles d'un triangle sphérique. Dans un tel triangle, les longueurs des côtés sont fonction des angles et vice versa. Dans le cas particulier d'un triangle sphérique rectangle, cette relation est exprimée par le pentagramme mirifique.

À la différence d'un triangle euclidien, dans lequel les côtés sont mesurés en tant que longueurs, les côtés et les angles d'un triangle sphérique sont mesurés en tant qu'angles (**Figure 12**).

Napier montra que dans un triangle sphérique rectangle, les trois côtés et les deux angles non-droits sont reliés mutuellement par un rapport entre leurs sinus et leurs cosinus (**Figure 13**).

La relation entre ces cinq composantes peut être ordonnée de manière à former un pentagone sphérique autopolaire, que Napier appela le pentagramme mirifique (**Figure 14**).

Gauss était intrigué par le rapport entre le pentagramme sphérique de Napier et ses transcendantales elliptiques. Il finit par comprendre que le pentagramme mirifique apportait la preuve qu'une surface sphérique possédait une périodicité quintuple, et examina cette périodicité à la lumière d'une découverte bien connue d'Apollonius selon laquelle cinq points suffisent pour déterminer une section conique. Cela différencie la section conique du cercle, pour lequel il n'est besoin que de trois points, et de la droite, où l'on n'en faut que deux. Gauss remarqua que la périodicité quintuple de la sphère et les cinq points de détermination des coniques traduisaient la

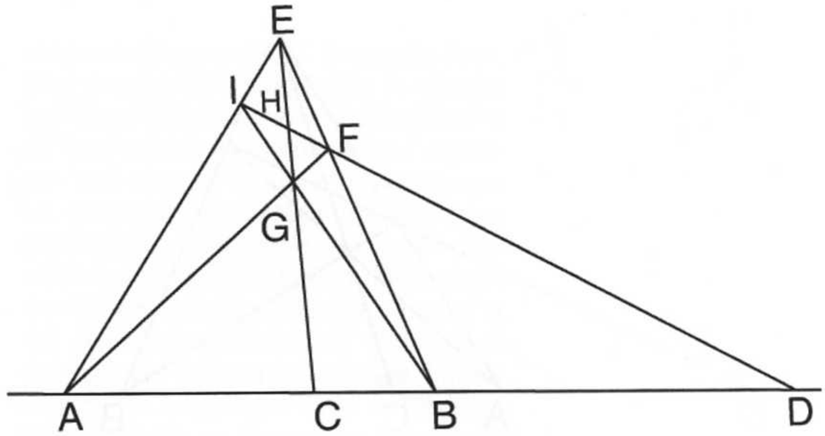


Figure 9

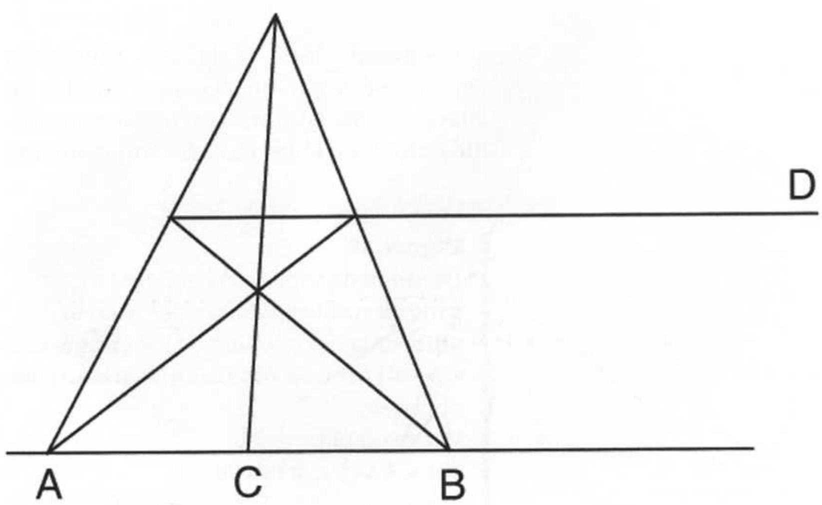


Figure 10

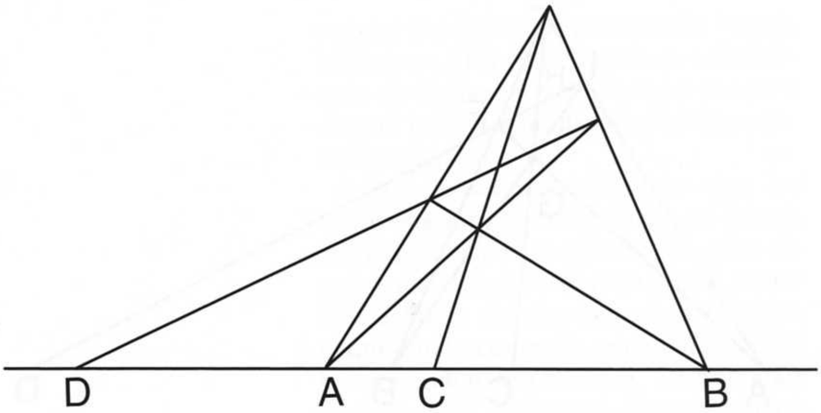


Figure 11

distinction entre la forme supérieure de la transcendantale elliptique, et les formes inférieures de transcendantales associées aux fonctions circulaires, hyperboliques et exponentielles.

Ces transcendantales simples, liées à la fonction conique képlérienne,

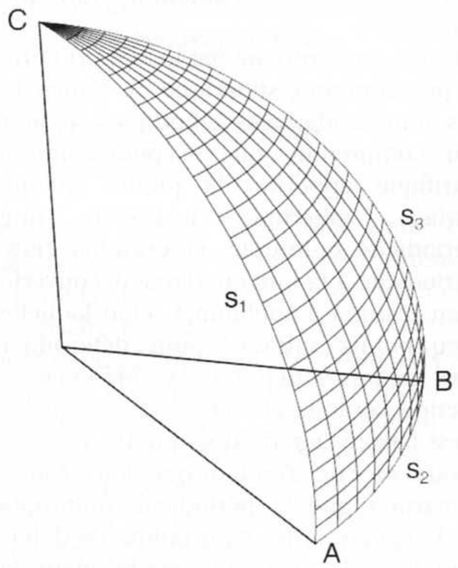


Figure 12

surviennent lors d'actions physiques caractérisées par un principe unique de changement, comme l'incommensurabilité entre l'arc et le sinus des mouvements circulaires uniformes. Gauss montra que les transcendantales elliptiques, de leur côté, étaient caractérisées par deux principes de changement, à l'exemple de la double incommensurabilité – entre le sinus et l'arc et entre le sinus et l'angle – de l'ellipse. Une double incommensurabilité elliptique similaire apparaît avec le pendule circulaire, entre l'angle et le sinus, et entre l'angle et le temps.

Le rapport entre le pentagramme sphérique et les fonctions elliptiques est illustré par la démonstration de Gauss selon laquelle lorsqu'on projette le pentagone sphérique autopolaire sur un plan tangent à la sphère, par un cône dont l'apex est au centre de la sphère, un pentagone rectilinéaire est produit. (**Figure 15**)

Les cinq sommets de ce pentagone plan définissent une seule ellipse. Les hauteurs de ce pentagone se croisent toutes en un point, qui est l'image du point tangent entre la sphère et le plan. (**Figure 16**)

Gauss montra que cette caractéristique provient du fait que les paires sommet – côté opposé du pentagone plan sont les images des pôles et équateurs du pentagone sphérique autopolaire. (**Figure 17**)

Tout ceci reflétait un type de « principe de Dirichlet » en ce que sur la sphère, les hauteurs du pentagramme sphérique peuvent se croiser en n'importe quel point à l'intérieur de celui-ci, alors qu'il n'existe qu'un seul groupe de hauteurs dans le pentagone plan. Ainsi, le pentagone sphérique autopolaire exprime une variété entière de pentagones plans, dont chacun reflète une action elliptique. Le rapport entre ces pentagones plans ne peut être exprimé que par une transcendantale elliptique. Par conséquent, le pentagramme mirifique est la forme enveloppée d'une fonction elliptique.

Dans ses travaux sur le pentagramme mirifique, Gauss entrepris ensuite d'examiner ce pentagone plan inscrit dans une ellipse, à la lumière des déterminations képlériennes de la position d'une planète sur une orbite elliptique. (**Figure 18**)

Il démontra que cette relation – entre le pentagone sphérique et sa projection – était exprimée par sa nouvelle transcendantale elliptique. Ce fait indiquait que les caractéristiques de l'action sphérique étaient implicitement elliptiques, et ne pouvaient être décrites complètement par les fonctions circulaires, contrairement à ce que pouvait témoigner naïvement les sens. À l'inverse, le fait que la preuve expérimentale démontrait que l'orbite

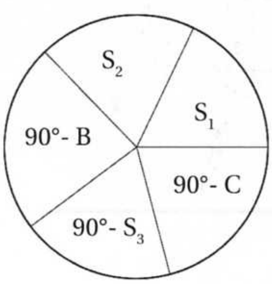


Figure 13
Le sinus de tout angle est égal au produit des tangeantes des angles adjacents. Le cosinus de tout angle est égal au produit des cosinus des angles opposés.
Par exemple
$\sin s_1 = \tan s_2 \times \tan 90° - C$
$\cos s_1 = \cos 90° - B \times \cos 90° - s_3$