Le « principe de Dirichlet » de Bernhard Riemann

BRUCE DIRECTOR

Dans tous ses écrits récents, Lyndon LaRouche insiste sur l'importance fondamentale du principe de Dirichlet, développé par Riemann, aussi bien dans le domaine de la science physique que de la science de l'économie physique. C'est un défi que le LYM (Mouvement des jeunes larouchistes) a relevé avec enthousiasme à l'échelle internationale – en se lançant dans l'étude du principe de moindre action et du principe de Dirichlet.

Bernard Riemann

Dans son essai révolutionnaire de 1857, *Théorie des fonctions abéliennes*, Bernhard Riemann approfondit la signification épistémologique de la notion de domaine complexe, par une application nouvelle et audacieuse d'un principe d'action physique qu'il appela « Principe de Dirichlet ». A l'origine d'une révolution dans la pensée scientifique, cette approche de Riemann, combinée à son discours d'habilitation de 1854, provoqua une contre-réaction de la part de l'école empiriste anglo-vénitienne issue de Galilée, Newton, Euler et Lagrange, tout aussi violente que celles qui avaient été dirigées précédemment, et pour les mêmes raisons, contre Nicolas de Cues, Képler, Fermat et Leibniz. Cette opposition qui perdure encore aujourd'hui dépasse largement, dans ses implications, le contenu formel du texte de Riemann de 1857. Malgré toute l'encre qui a coulé à ce sujet depuis l'époque de Riemann jusqu'à nos jours, un examen honnête de la question montre que Riemann avait raison, et que ses détracteurs étaient des imposteurs, de la même manière que Gauss avait dévoilé précédemment la fraude d'Euler, de Lagrange et d'Alembert dans sa démonstration du théorème fondamental de l'algèbre.

Nous ne savons pas si, lorsqu'il décida de désigner cette méthode sous le nom d'application du «principe de Dirichlet», Riemann s'attendait à provoquer la réaction qui s'ensuivit ou s'il ne faisait qu'énoncer une simple évidence pour toute personne en relation avec le réseau des élèves d'Abraham Kästner. Toujours est-il qu'il est heureux pour nous qu'il ait choisi ce nom, dans la mesure où cela nous permet de retrouver assez précisément les origines scientifiques de la pensée de Riemann, ainsi que le processus historique et politique dont elle est issue.

QUI EST LEJEUNE DIRICHLET ?

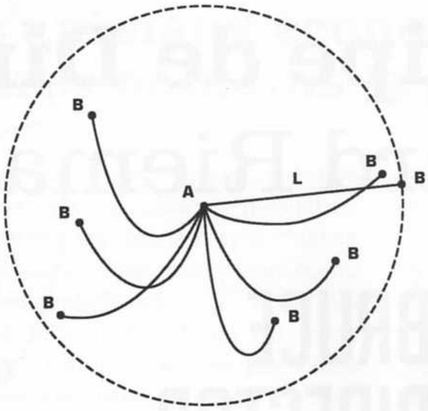
Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet fut un acteur central de la vie scientifique du début du XIX[e] siècle. Né en 1805 d'une famille d'origine belge vivant près d'Aix-la-Chapelle, il est scolarisé à Bonn. A l'âge de seize ans, muni d'un exemplaire de *Disquisitiones Arithmeticae* de Gauss, il se rend à Paris où il assiste à des conférences au Collège de France et à la Faculté des Sciences. Un an après, il est engagé comme précepteur par le général Maximilien Sébastien Foy, député républicain à l'Assemblée nationale, qui le présente à Alexandre Humboldt. Après la mort de Foy en 1825, Humboldt organise le retour de Dirichlet en Allemagne, lui permet d'obtenir un diplôme (malgré le refus de Dirichlet de parler latin) et réussit même à lui assurer un poste d'enseignant à l'université de Berlin. C'est là qu'il rencontre sa future épouse, Rebecca, petite-fille de Moses Mendelssohn et sœur du compositeur Felix Mendelssohn, et développe une collaboration fructueuse avec Karl Jacobi et Jakob Steiner – avec lesquels il fait une tournée en Italie en 1843, sous l'égide d'Alexandre Humboldt.

En 1847, Riemann arrive à Berlin pour y étudier avec Dirichlet, Jacobi et Steiner, après avoir passé deux ans auprès de Gauss. Deux ans plus tard, il retourne à Göttingen pour achever ses études et publie en 1851, sous la direction de Gauss, sa thèse doctorale, *Principes fondamentaux pour une théorie générale des fonctions d'une grandeur variable complexe*, où il applique pour la première fois son principe, sans toutefois mentionner Dirichlet. A la mort de Gauss en 1855, Dirichlet lui succède, et reprend donc contact avec Riemann, qui a obtenu l'autorisation d'enseigner sept mois auparavant, après avoir soutenu sa thèse d'habilitation, *Sur les hypothèses qui servent de base à la géométrie*. En 1857, Riemann publie sa *Théorie des fonctions abéliennes,* dans laquelle il désigne sous le nom de « Principe de Dirichlet » le principe sur lequel reposent ses nouvelles théories. Dirichlet meurt deux ans plus tard et Riemann, alors âgé de 33 ans, reprend sa chaire, qu'il gardera jusqu'à sa mort prématurée, sept ans plus tard.

LE POTENTIEL

Ce que Riemann appelait « Principe de Dirichlet » faisait suite aux applications de Gauss du domaine complexe, à ses recherches sur la géodésie et sur le magnétisme terrestre – les premières ayant été organisées avec Heinrich Schumacher en 1818 et les secondes démarrées par Alexandre Humboldt en 1832. Ces deux projets eurent des retombées pratiques considérables. Ils permirent d'établir des cartographies détaillées de leurs effets physiques respectifs, qui s'avéraient d'une importance vitale pour le développement de l'infrastructure. C'est dans le cadre du projet de Humboldt que fut mis sur pied pour la première fois un réseau international de chercheurs dont la collaboration eut un impact sur le développement de l'économie physique, des Amériques à l'Eurasie, pendant plusieurs générations. Gauss reconnaissait que les deux projets posaient d'importants problèmes épistémologiques pour la science. Dans sa *Théorie générale du magnétisme terrestre* publiée en 1839, Gauss écrit qu'un ensemble complet et précis d'observations n'est pas en soi un objectif convenable pour la science, étant donné qu'*«on n'a que la pierre angulaire, et non pas le bâtiment fini, tant qu'on n'a pas assujetti les phénomènes à un principe fondamental»*. Prenant pour exemple l'astronomie, Gauss affirmait que le fait de reporter sur la sphère céleste les observations des mouvements apparents des corps célestes n'était qu'un début : ce n'est que lorsque le principe sous-jacent de la gravitation fut découvert que l'on a pu déterminer les véritables orbites des planètes.

Pour la géodésie et le géomagnétisme, Gauss reconnaissait qu'il fallait commencer par mesurer les changements dans les effets que ces phénomènes produisaient sur



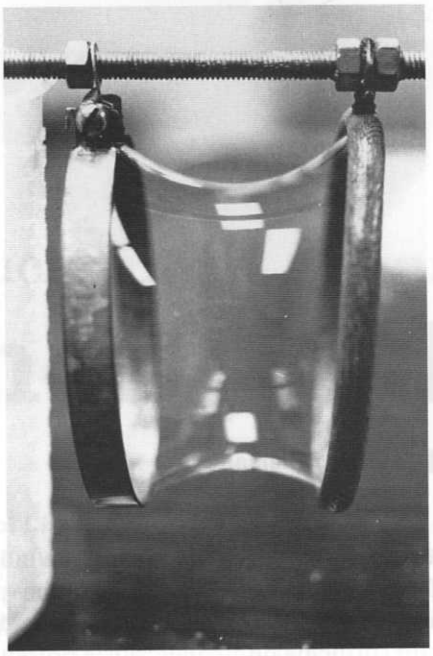


Figure 1
Différentes chaînettes obtenues en changeant le point de suspension B.
Figure 2
Un caténoïde formé par film de savon suspendu entre deux cercles.

les instruments. Pour la géodésie, il s'agissait des changements dans la direction d'un fil à plomb ou d'un niveau à bulle qu'il fallait reporter sur la sphère céleste. Pour le géomagnétisme, les choses étaient plus compliquées. Là, il s'agissait de mesurer les variations de direction de l'aiguille d'une boussole en fonction des trois directions spatiales et du temps. La question générale qui se posait était la suivante : quelle est la nature caractéristique du principe de gravitation, ou du géomagnétisme, qui provoque de tels effets mesurés ? La tâche à accomplir était la suivante : comment, à partir de ces variations infiniment petites dans les effets mesurés, déterminer la caractéristique générale ?

C'est cette deuxième question qui nous conduit directement à ce que Riemann appelait le « Principe de Dirichlet ». Pour faciliter la compréhension de ce principe, il est utile de considérer d'abord le cas élémentaire, mais apparenté, de la chaînette.

Le point important ici est la manière dévastatrice dont Leibniz et Bernoulli ont réfuté Galilée et Newton. Pour Galilée, tout ce que l'on peut ou doit savoir sur la chaînette se résume à la description de sa forme visible. Pour Leibniz et Bernoulli, au contraire, la forme de la chaînette n'est que l'effet visible d'un principe physique fondamental sous-jacent, et il est impossible d'en déterminer la forme correcte tant qu'on ne connaît pas ce principe. Comme nous l'avons décrit par ailleurs, ils commencèrent par déterminer l'effet physique changeant de ce principe dans l'infiniment petit, d'où ils tirèrent par inversion la caractéristique générale du principe. C'est ainsi que Leibniz découvrit que la forme de la chaîne suspendue reflète l'effet de moindre action du principe de gravitation universelle, et que cet effet peut être exprimé en termes géométriques comme la moyenne arithmétique entre deux fonctions exponentielles opposées.

Il faut bien préciser que nous parlons d'une chaîne suspendue physique, et non d'une expression mathématique formelle. Dans une expression mathématique formelle, les courbes exponentielles n'ont pas de limites. La chaîne suspendue en a : les positions des deux points de suspension. Par conséquent, la forme spécifique que prendra la chaîne est déterminée par les positions des points de suspension relativement à la longueur de la chaîne. Si l'on change les positions des points de suspension, la position de chaque maillon de la chaîne changera aussi, mais toujours conformément à la relation citée.

Autrement dit, lorsqu'on change les conditions limites de la chaîne physique, la courbe spécifique que suit la chaîne changera aussi, *mais la forme générale de cette courbe qui est dictée par le principe de moindre action, sera toujours celle de la chaînette.* Elle ne deviendra jamais une parabole ou une autre courbe (**Figure 1**).

Cet exemple illustre un aspect de la méthode que Leibniz appelait *analysis situs* (Gauss et Carnot parleront plus tard de «géométrie de position»), qui nous permet de comprendre le «principe de Dirichlet» de Riemann. La position de chaque maillon de la chaîne est fonction de la relation entre les conditions aux limites (positions des points de suspension, relatives à la longueur de la chaîne) et la courbure caractéristique du principe de gravitation, et non de la relation réciproque des maillons entre eux. Autrement dit, contrairement à ce qu'affirmeraient les cartésiens et les newtoniens, la position de chaque maillon individuel n'est pas déterminée par les distances droite/gauche et haut/bas qui le séparent de ses voisins. Au contraire, la position de chaque lien est une fonction de la caractéristique de changement de l'action physique comme un tout. Tout changement dans les conditions aux limites change la position de chaque lien *comme un tout,* en conformité avec le principe de moindre action de la chaînette. Ainsi, l'effet dans le domaine visible du principe physique invisible s'exprime par la caractéristique de changement dictée par le principe de moindre action. C'est cela qui détermine les positions spécifiques des liens. En d'autres termes, la *position* est une fonction du *changement.*

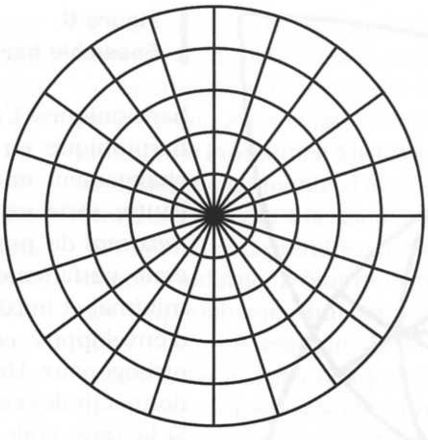


Figure 3
Ensemble harmonique de cercles et de lignes radiales

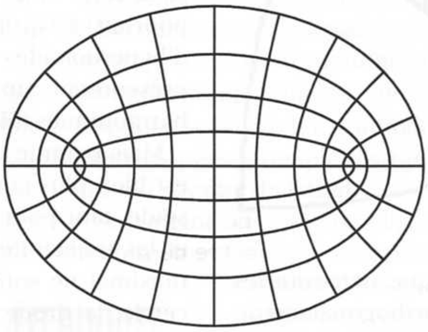


Figure 4
Ensemble harmonique d'ellipses et d'hyperboles

Gauss reconnut qu'il serait possible de comprendre les principes fondamentaux de la géodésie et du géomagnétisme en généralisant la méthode de Leibniz. Il rejetait la méthode populaire mais fausse de Newton, qui tentait d'expliquer ces phénomènes par l'interaction réciproque des corps matériels, suivant la formule algébrique du carré inverse. Pour Gauss, au contraire, il fallait appréhender ces phénomènes, ainsi que la chaînette, comme un processus unifié dans lequel les variations locales de la position du fil à plomb ou de l'aiguille aimantée sont fonction de la caractéristique du principe déterminant le phénomène dans son ensemble. Cet ensemble, Gauss l'appelait «*le potentiel*», qui est l'équivalent latin du grec «*dynamis*», ou du «*kraft*» de Leibniz (ou «*vis viva*» en latin). Gauss inventa l'idée d'une «fonction-potentiel» pour exprimer l'effet de moindre action du principe physique sur une surface ou un volume, reprenant, en l'élargissant, l'approche utilisée par Leibniz pour exprimer l'effet de la gravité dans la formation de la chaîne suspendue. Pour cela, Gauss étendit l'idée de fonction de Leibniz au domaine complexe.

Ainsi, les fonctions de Leibniz – qui caractérisaient une simple trajectoire minimale – devinrent les «fonctions-potentiel» de Gauss, caractérisant toute une classe de trajectoires minimales : en fait, des fonctions de fonctions. En d'autres termes, si l'on comprend la chaînette de Leibniz comme une trajectoire minimale déterminée par un ensemble de deux fonctions, la fonction-potentiel de Gauss doit être comprise comme une fonction qui unit *deux ensembles* (ou plus) de fonctions. Riemann montra plus tard que ces ensembles de trajectoires minimales définissent implicitement des surfaces minimales, comme le caténoïde formé par un film de savon suspendu entre deux anneaux circulaires (**Figure 2**).

Ces ensembles de fonctions ne sont pas arbitraires. Les fonctions sont liées par un type spécial de relations, nommées fonctions «sphériques» ou «harmoniques». Une fonction harmonique ou sphérique est une série de fonctions orthogonales, dont les courbures changent au même rythme.

Prenons quelques exemples géométriques pour illustrer cette idée de manière pédagogique. Une série de cercles concentriques et de lignes

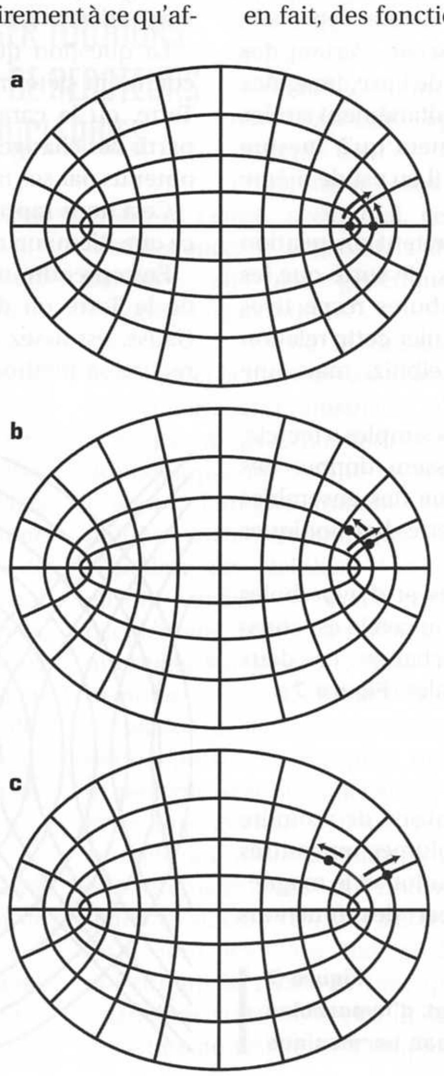
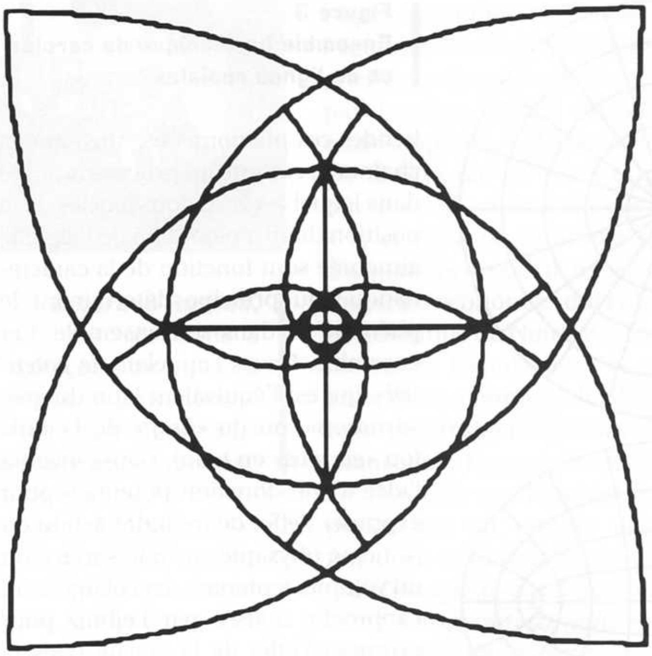


Figure 5
La « vitesse » de changement de la courbure des ellipses et des hyperboles orthogonales est toujours égale.



radiales compose une fonction harmonique, parce que les cercles et les lignes radiales se coupent orthogonalement, et ont une courbure constante (**Figure 3**). Une meilleure illustration est fournie par un ensemble orthogonal d'ellipses et d'hyperboles (**Figure 4**). Pour avoir une intuition de leur relation harmonique, considérons ce qui suit. Chaque ellipse est associée à une hyperbole orthogonale qui a les mêmes foyers qu'elle. Partant des points d'intersection de ces courbes et de l'axe, imaginez une action connexe qui se déplace simultanément sur les deux courbes (**Figure 5**)*. On remarquera qu'à mesure que l'hyperbole devient moins courbe, il en est de même pour l'ellipse, et à la même «vitesse».

Ainsi, les fonctions harmoniques mettent en relation deux ensembles de courbes différentes, de sorte que les vitesses de changement de leurs courbures respectives soient toujours égales (on pourrait calculer cette relation précisément, à l'aide du calcul de Leibniz, mais une compréhension intuitive nous suffit ici).

En outre, il n'y a pas que les courbes « simples » (cercle, droite, ellipse ou hyperbole) qui puissent donner des séries de fonctions harmoniques. Même des ensembles de fonctions compliquées peuvent être harmoniques (**Figure 6**).

En revanche, un ensemble de cercles et d'hyperboles n'est pas harmonique, car la courbure du cercle est constante, tandis que celle de l'hyperbole change : ces deux séries de courbes ne sont pas orthogonales (**Figure 7**).

MESURER LA TERRE

Gauss reconnut que le principe leibnizien de moindre action, appliqué aux surfaces et aux volumes rencontrés dans des phénomènes comme la gravitation et le magnétisme terrestre, pouvait s'exprimer par des fonctions

Figure 6
Ensemble harmonique de courbes cubiques

harmoniques. L'une des séries de courbes de la fonction harmonique en question exprimait les trajectoires de changement *minimal* du potentiel d'action, tandis que l'autre série exprimait les trajectoires de changement *maximal* du potentiel d'action. Par exemple, si la Terre était parfaitement sphérique, ses potentiels d'action minimal et maximal pourraient s'exprimer par une série d'enveloppes concentriques sphériques et de plans orthogonaux. Une coupe d'une configuration de ce type donnerait des cercles et des lignes radiales harmoniques. Si la Terre était parfaitement ellipsoïdale, son potentiel pourrait s'exprimer par un ensemble d'ellipsoïdes et d'hyperboloïdes triplement orthogonaux dont la coupe présenterait un ensemble d'ellipses et d'hyperboles harmoniques (**Figure 4**).

Mais comme Gauss le soulignait, la forme de la Terre est bien plus compliquée qu'une sphère ou qu'un ellipsoïde, tant pour la gravitation que pour le magnétisme, et les trajectoires de ses potentiels d'action minimal et maximal ne sont pas des courbes aussi simples que le cercle, la droite, l'ellipse ou l'hyperbole. Il fallait donc trouver une fonction harmonique plus complexe pour exprimer ces principes. Une telle fonction ne pouvait pas être déterminée *a priori*, mais uniquement à partir des changements mesurés des effets de la gravitation et du magnétisme terrestres.

La question qui se posait à Gauss était la suivante : comment déterminer la véritable forme physique de la Terre, ou la caractéristique du magnétisme terrestre, à partir des changements infiniment petits de son potentiel obtenus par ses mesures géodésiques et magnétiques ?

Ceci nous rapproche d'une première approximation de ce que Riemann appelait le « Principe de Dirichlet ».

Entreprendre une détermination précise de la surface de la Terre ou de son effet magnétique, comme le fit Gauss, est assez compliqué, mais le principe sur lequel repose sa méthode nous est accessible dans le cadre de

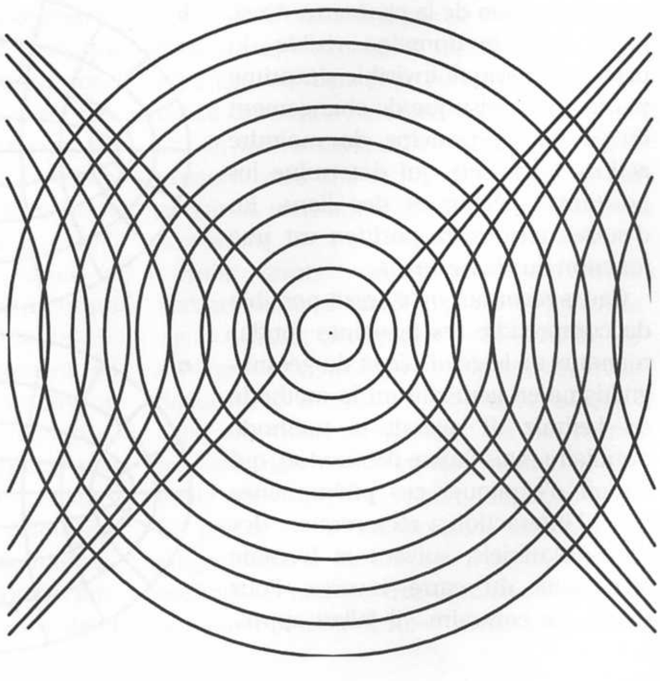


Figure 7
Un ensemble de cercles et d'hyperboles n'est pas harmonique

cette discussion pédagogique. Si l'on reconnaît, comme Gauss, que les changements dans la direction du fil à plomb mesurent des changements dans la direction de la fonction-potentiel, alors la forme physique de la Terre a le même type de relation à ce potentiel que les points de suspension en ont avec la chaînette. Autrement dit, on doit considérer la surface terrestre comme la limite du potentiel ou, comme Gauss l'exprimait : « *La surface physique de la Terre est, au sens géométrique, la surface qui est partout perpendiculaire à l'attraction gravitationnelle* ».

L'exemple du vieux problème pythagoricien du doublement de la ligne, du carré ou du cube peut aider à éclaircir cette idée. La ligne est délimitée par des points, le carré par des lignes et le cube par des carrés. La taille et la position de ces limites sont déterminées par la longueur, la surface ou le volume qu'elles renferment. Par exemple, c'est le carré qui détermine la taille et la position de ses côtés, même si ce sont ces derniers que vous voyez et non le premier. Les côtés du carré sont des lignes, mais elles sont produites par une puissance (potentiel) différente de celle qui produit des lignes à partir d'autres lignes. De même, la taille et la position des carrés formant les limites d'un cube sont produites par une puissance (potentiel) différente des carrés formés par la diagonale d'un autre carré. Ainsi, même si on ne voit pas la puissance en question, on peut la mesurer par l'effet caractéristique unique qu'elle exerce sur les limites de son action.

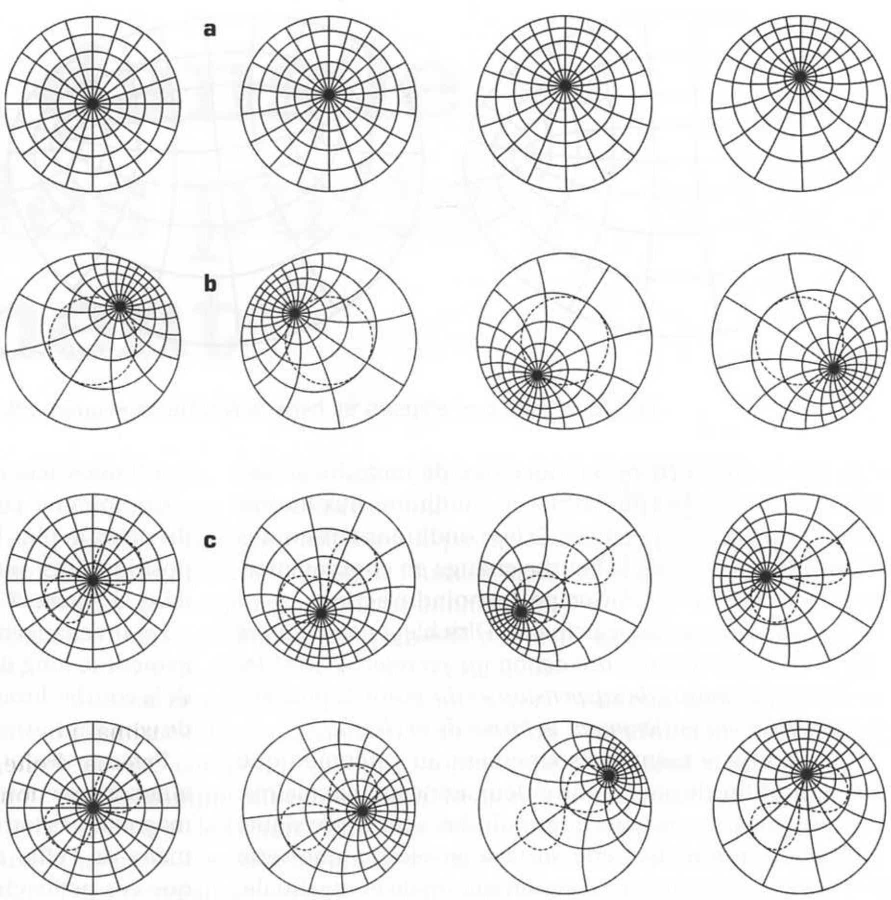


Figure 8. Transformation d'ensembles harmoniques de cercles et de lignes radiales.
a Le point d'intersection des lignes radiales se déplace en ligne droite vers le haut.
b Le point d'intersection des lignes radiales se déplace selon un cercle.
c Le point d'intersection des lignes radiales se déplace selon une lemniscate.

Appliquons donc la même méthode de pensée aux principes physiques discutés ci-dessus. La chaînette est une courbe dont les limites sont des points. Un caténoïde est une surface dont les limites sont des courbes. La surface de la Terre est la limite d'un volume gravitationnel. L'effet magnétique de la Terre est encore plus compliqué et nous n'y entrerons pas ici.

C'est cette relation entre les conditions aux limites d'un processus physique et l'expression du principe de moindre action propre à ce processus physique que Riemann appelle le « principe de Dirichlet ».

DE GAUSS À DIRICHLET, ET DE DIRICHLET À RIEMANN

Successeur de Gauss à Göttingen en 1855, Dirichlet commença à donner des cours sur la théorie du potentiel élaborée par son prédécesseur, tandis que Riemann préparait sa *Théorie des fonctions abéliennes*. Gauss, Dirichlet et Riemann reconnurent tous trois que les fonctions complexes, en tant qu'extension du concept leibnizien de chaînette et de logarithme naturel, permettaient d'exprimer au mieux les trajectoires de moindre action des fonctions-potentiel.

Gauss l'avait déjà démontré dans sa preuve de 1799 du théorème fondamental de l'algèbre, où il montrait qu'une expression algébrique complexe produit deux surfaces dont les courbures sont en relation harmonique. Riemann attribua à Dirichlet le principe selon lequel, étant donnée une certaine condition aux limites, la fonction qui minimise l'action dans ces limites est une fonction harmonique complexe.

Considérons cette idée dans le domaine familier de la chaînette. Ici, ce sont les positions des points de suspension qui représentent les conditions aux limites. L'« intérieur » de cette limite est la courbe elle-même. Le long de cette courbe se trouve un point singulier : le point le plus bas. Si les conditions aux limites changent, en raison du déplacement des positions des points de suspension, la position du point le plus bas change aussi. Pour énoncer le principe de Dirichlet dans ce contexte simplifié, on

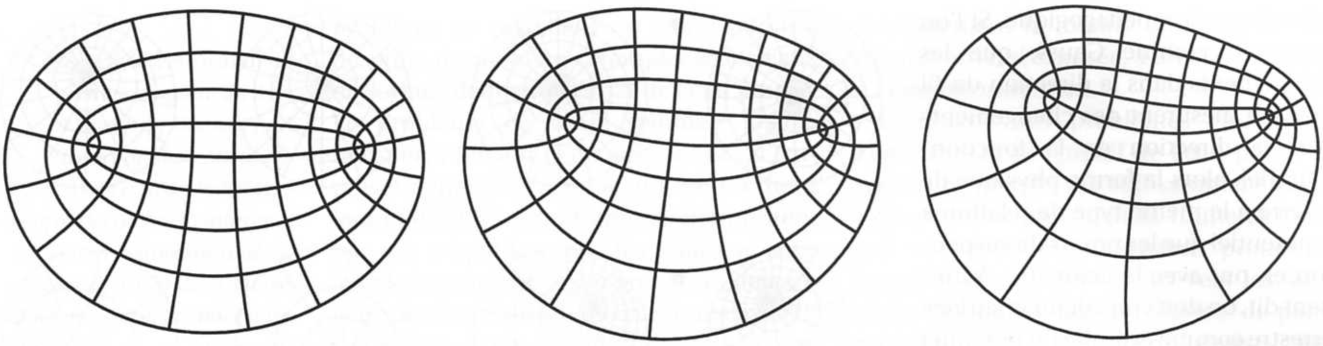


Figure 9
Les foyers de ces ellipses et hyperboles harmoniquement liées se déplacent le long d'un cercle.

dira que la chaînette est la trajectoire de moindre action d'une chaîne suspendue avec ces conditions aux limites et cette singularité spécifiées. Si les conditions aux limites changent, la forme de la courbe change en conséquence, de façon à préserver le principe de moindre action.

Riemann inversa le principe de Dirichlet : *étant donné que le principe de moindre action est premier, ce sont les positions des points de suspension et du point le plus bas qui déterminent entièrement la forme de la chaîne !*

Appliquons le même raisonnement au caténoïde que forme un film de savon entre deux anneaux circulaires. Ce caténoïde représente une moindre action physique, ou surface minimale. Cette surface enveloppe une série de courbes orthogonales d'action minimale et maximale. (Riemann montra plus tard que ces courbes sont en relation harmonique). On peut changer la forme de ces limites : au lieu de cercles, on peut utiliser des ellipses, des formes irrégulières lisses ou encore des polygones. Lorsqu'on change la position ou la forme des limites de cette surface, la forme de celle-ci et des courbes enveloppées change en conséquence, mais le principe de moindre action est préservé.

On peut ensuite généraliser cette idée avec quelques autres exemples pédagogiques, illustrés dans les figures suivantes, obtenues par animations informatiques. Dans la **Figure 8**, nous voyons comment un ensemble harmonique de cercles et de lignes radiales qui se croisent au centre des cercles, subit des transformations tout en maintenant une relation harmonique. Si l'on change la position du point d'intersection des lignes radiales, elles doivent se transformer en arcs circulaires, et leurs extrémités se déplacent le long de la limite circulaire afin de maintenir la relation harmonique. Cet effet est mis en évidence par le déplacement du point d'intersection, en l'éloignant du centre (**Figure 8a**), en lui faisant décrire un cercle autour du centre (**Figure 8b**) et enfin, en lui faisant décrire une lemniscate (**Figure 8c**). Ce mouvement fait changer toutes les positions à l'intérieur de la limite *comme un tout*. Ce qui ne change pas, c'est la relation harmonique, c'est-à-dire la relation de moindre action.

Ceci peut également être pensé d'un point de vue inverse : le changement des intersections des lignes radiales avec la limite circulaire, provoque le déplacement de leur point d'intersection selon un arc circulaire, et ces lignes droites deviennent des arcs circulaires.

Ou que les changements infiniment petits de la courbure des trajectoires sont déterminés par les conditions aux limites liées à la position de la singularité.

Comparons cette action au changement de position du point le plus bas de la chaînette lorsque changent les positions des points de suspension, comme on le voit dans la **Figure 1**.

Là, un changement des points-limites produit un changement le long d'une simple courbe. Ici, un changement de la courbe-limite produit un changement d'un ensemble de courbes harmoniquement liées sur une surface.

Passons maintenant au problème auquel Gauss s'est attaqué pour déterminer, par exemple, la position des pôles magnétiques terrestres, à partir de changements infinitésimaux de l'effet magnétique terrestre. Gauss comprenait que ces petits changements étaient liés à la position des singularités de l'effet magnétique terrestre, c'est-à-dire les pôles magnétiques. Cependant, les emplacements exacts, et même le nombre de ces pôles, n'étaient pas encore connus à son époque. Gauss a déterminé les endroits où devaient se situer ces pôles à partir des mesures obtenues par les collaborateurs de Humboldt. La fameuse expédition américaine de Wilkes en 1837 fut lancée en partie pour confirmer, avec succès, les résultats de Gauss.

Le même effet est illustré par la **Figure 9** mais la forme de la limite a été changée en ellipse, ce qui transforme à son tour les courbes orthogonales en hyperboles et le point d'intersection en deux foyers. Ici les foyers des ellipses se déplacent le long d'un cercle. Notez ici encore comment le changement de la position de la singularité change les conditions aux limites, de telle sorte que les relations résultantes restent harmoniques. Bien sûr, on peut dire aussi que les lignes radiales sont transformées en hyperboles et que, par conséquent, les cercles deviennent des ellipses et que le point d'intersection devient deux foyers. Ou que le point d'intersection est transformé en deux foyers, transformant la limite en ellipse et les lignes radiales en hyperboles.

En résumé : *Un processus physique de moindre action est une action connexe. Si l'on change un aspect quelconque du processus, tout le reste change en conséquence, de façon à préserver la caractéristique de moindre action du processus. C'est le principe physique de moindre action qui est premier.*

Le génie de Riemann fut de reconnaître, à travers cette application du «Principe de Dirichlet», qu'on peut comprendre totalement le principe de moindre action d'un processus physique à partir de la relation entre les conditions aux limites et les singularités, et que cette relation s'exprime de manière unique par le concept géométrique riemannien de fonctions complexes. En outre, Riemann a montré que l'on ne peut changer, fondamentalement, la caractéristique de moindre action d'un processus physique qu'en y ajoutant un nouveau principe. Un tel changement de principe s'exprime dans une fonction complexe par un accroissement correspondant du nombre de singularités. Riemann l'a démontré dans sa *Théorie des fonctions abéliennes*, en appliquant le « Principe de Dirichlet » aux fonctions transcendantales, supérieures, d'Abel.

Nous ne pouvons que mentionner ici la signification plus profonde de cette découverte. On peut cependant l'illustrer dans la **Figure 10**, qui exprime le principe de moindre action selon une fonction elliptique. Riemann a démontré que toutes les fonctions elliptiques, étant des fonctions formées par l'interaction de deux principes connexes, s'expriment dans le domaine complexe comme des surfaces ayant deux limites [les deux « yeux » sur cette figure]. Chaque limite a son changement propre, mais lié à l'autre, produisant des changements correspondants des trajectoires minimales, tout en préservant constamment la relation harmonique globale de la fonction. Autrement dit, la courbure caractéristique de ces trajectoires de moindre action est déterminée, ici, par l'interaction connexe de deux principes distincts.

Une comparaison entre ceci et les exemples précédents met en évidence ce que soulignait Riemann : la seule manière de changer fondamentalement la caractéristique d'action d'un processus physique, c'est d'y ajouter l'action d'un nouveau principe.

On peut également illustrer ce principe par un exemple tiré de l'économie. Quelle est la relation entre l'ensemble des relations caractérisant une économie physique et les conditions aux limites économiques de l'infrastructure physique et du développement culturel ? Et quelle est la relation entre ces conditions aux limites et la singularité que représente l'introduction de nouvelles technologies ? Quel est l'effet sur toutes ces relations économiques, d'un changement, positif ou négatif, dans ces conditions aux limites d'économie physique ?

Quatre ans après la mort de Riemann, Karl Weierstrass critiqua son application du « principe de Dirichlet » sur des bases de mathématique formelle. Selon Weierstrass, il était inapproprié de parler de moindre action sur le plan mathématique, sans avoir fourni la démonstration mathématique formelle de l'existence d'un minimum, ou d'un maximum, mathématique. Bien qu'il soit effectivement possible de produire un exemple mathématique formel qui n'a pas de minimum, tous les processus *physiques* sont caractérisés par une moindre action délimitée. A titre d'exemple, comme l'a montré Nicolas de Cues, il ne peut y avoir de polygone maximum ou minimum absolu, car le polygone est délimité du côté maximal par un cercle (qui n'est pas un polygone) et du côté minimal par une ligne (qui n'est pas non plus un polygone). Ou encore : bien que la chaînette mathématique soit étendue à l'infini, la chaînette physique est toujours délimitée par les points de suspension. Pour Riemann, comme pour Gauss et Dirichlet, la demande de Weierstrass de fournir une preuve mathématique formelle du minimum est pire qu'inutile : c'est un sophisme ! Le principe physique universel de moindre action suffit.

La critique de Weierstrass a cependant réjoui les formalistes qui voulaient revenir sur les réalisations de Kästner, Gauss, Dirichlet, Jacobi, Abel, Riemann, etc., et faire régresser la science à la tradition d'Euler, Lagrange et d'Alembert. Ainsi, l'aspect formel des découvertes de Riemann a été largement discuté bien que la substance de sa pensée ait été en grande partie éliminée, jusqu'à ce que Lyndon LaRouche lui donne un nouveau souffle à un niveau plus avancé. 6001

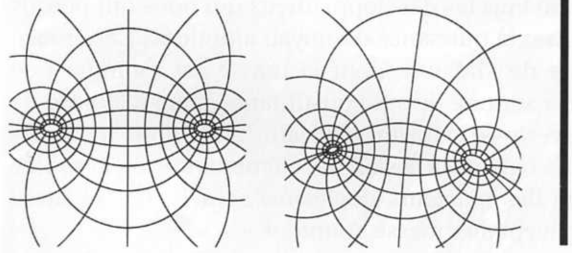
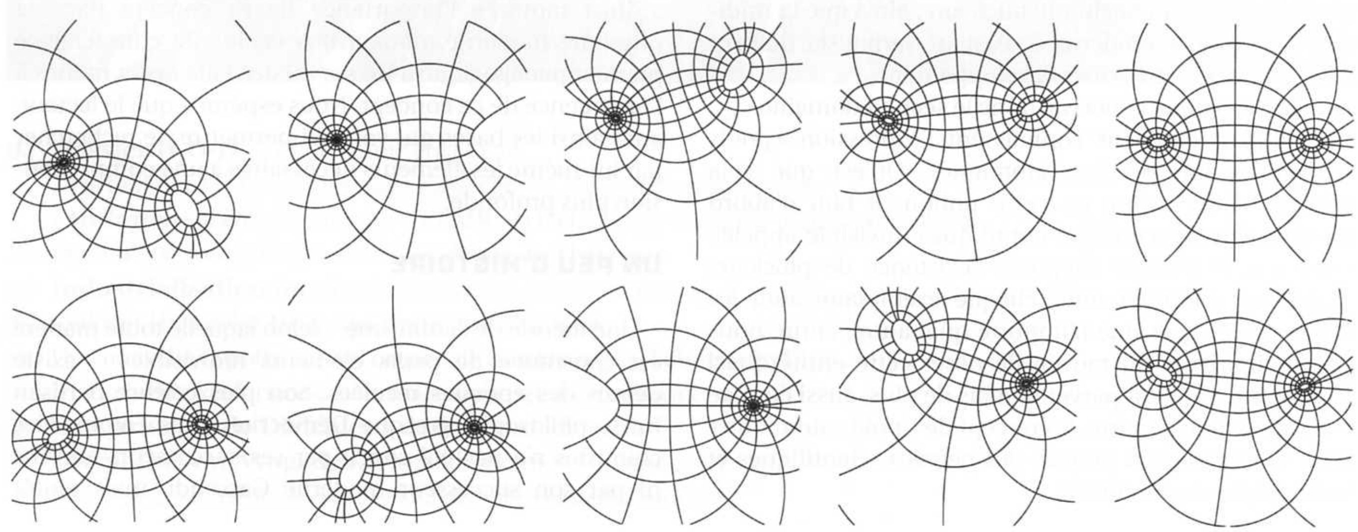


Figure 10
Un ensemble de courbes harmoniques doublement périodiques, typiques des fonctions harmoniques. Ici, les courbes sont harmoniques selon deux principes de limite. Les deux conditions aux limites subissent une transformation.



Vous pouvez voir des animations informatiques, en couleur, correspondant à toutes ces Figures sur http://wlym.com/antidummies/part58.html.