

Une solution képlérienne au problème des quasi-cristaux

La découverte, en 1984, d'un alliage d'aluminium - manganèse dévoilant la symétrie pentagonale « interdite » créa une crise, dans le monde de la cristallographie et implicitement dans toute la science physique, qui n'a pas encore été résolue de manière satisfaisante.

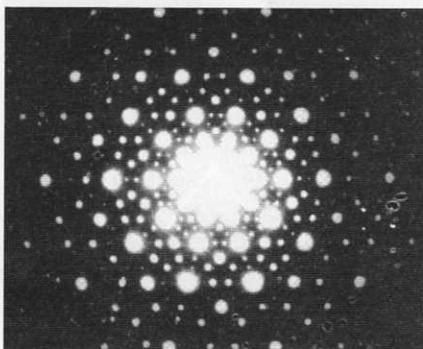
Jusqu'à présent, pour expliquer la possibilité d'existence d'un réseau cristallin avec une symétrie quasi-périodique, on a recours soit à une structure faite de plusieurs types de cellules unitaires, soit à des modèles mathématiques d'espace multidimensionnel. Aucune de ces deux possibilités n'est satisfaisante pour expliquer une croissance basée sur une symétrie d'ordre 5.

En réexaminant une des hypothèses fondamentales de la cristallographie dans la méthode de Johannes Kepler que l'on trouvera dans son livre *L'étranne, ou la neige sexangulaire*, j'ai découvert un moyen simple de construire un réseau en trois dimensions de symétrie pentagonale. En modifiant un des axiomes traditionnels de la cristallographie pour permettre l'interpénétration des cellules, une cellule unitaire de forme dodécaédrique ou icosaédrique régulièrement répétée peut remplir l'espace, produisant un agrandissement auto-similaire d'un dodécaèdre ou d'un icosaèdre. À partir de là, il est possible de concevoir comment peut croître un cristal de symétrie d'ordre 5. N'ayant pas les moyens de vérifier si chacune des variétés connues de quasi-cristaux correspond à cette construction, je mets en avant cette hypothèse pour contribuer à la recherche de l'explication de cet intéressant phénomène. Dans tous les cas, elle servira de construction intéressante géométriquement.

« PAVAGE » PENTAGONAL

Ma solution dérive d'une construction permettant de créer des pentagones plans auto-similaires.

LAURENCE HECHT



La preuve d'une symétrie d'ordre 5 est apparue en 1984 dans l'échantillon d'un alliage aluminium-manganèse obtenu par trempage rapide par Dany Schetman. Cela produit un « motif » de diffraction comme celui-ci, dans lequel 10 points entourent le point central suivant un motif décagonal.

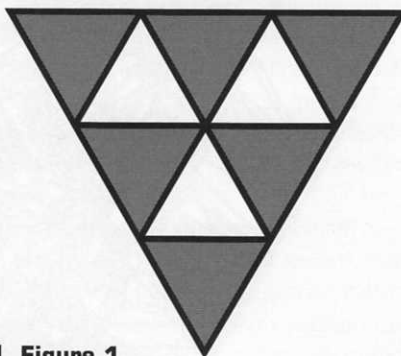


Figure 1

« 3-Triangle »

Notez les vides triangulaires laissés dans le pavage des triangles gris formant le « 3-Triangle ».

J'ai découvert cette construction un jour où je réfléchissais sur le sens d'un fragment des travaux perdus de Diophante *Les nombres polygonaux*, qui décrit une proposition faite par Hypsiclès (géomètre grec classique) :

« Il a été aussi prouvé que ceci a été établi par Hypsiclès dans cette définition : s'il y a autant de nombres que nous voulons commençant par 1 et croissant de la même différence, alors lorsque la différence vaut 1, la somme de tous les nombres (de la série NDT) donne un nombre triangulaire, quand elle vaut 2, la somme donne un nombre carré, quand elle vaut 3, la somme donne un nombre pentagonal (et ainsi de suite...). Le nombre des angles se trouve à partir du nombre-différence auquel nous ajoutons 2, et la longueur du côté à partir du nombre de terme incluant 1 »¹.

Le problème des quasi-cristaux est apparenté au problème dit de « pavage » (comment recouvrir un plan à partir d'un motif répétitif). Cependant, la solution se dévoile si l'on considère le problème cristallographique du point de vue de Diophante : comment créer des figures ayant une croissance auto-similaire? Des triangles et des carrés auto-similaires peuvent être produits à partir de cases triangulaires et carrées d'une manière très facile à visualiser : les carrés recouvrent complètement la surface qu'ils enferment. Les triangles laissent des vides qui ont aussi une forme triangulaire, et ainsi le principe habituel du pavage (qui est de recouvrir totalement le plan) est modifié. (Figure 1).

Pour construire des pentagones auto-similaires, il est nécessaire de modifier le principe du pavage dans la direction opposée, c'est-à-dire, de permettre que les pentagones se chevauchent et ainsi de « sur-remplir » le plan. En suivant ce principe, une succession de pentagones auto-similaires formés par 1, 5, 12, 22, 35, etc. pentagones unitaires

pourraient être construits (**Figure 2**). La différence de second ordre de la série des nombres pentagonaux ainsi construite est égale, comme Hysiclès l'avait noté, à 3; pour les nombres carrés, à 2; et pour les nombres triangulaires à 1.

L'expression géométrique qu'Hysiclès utilise pour les nombres (triangles, carrés, pentagones) me laisse à penser qu'il devait faire des recherches sur les cinq solides réguliers (platoniciens) dont les faces se limitent à ces trois seuls polygones. À partir de cette considération, j'ai vu qu'il existait des fonctions mathématiques constructibles, analogues à nos fonctions connues que sont le « carré » et le « cube » pour chacun des solides platoniciens.

Ainsi, sur la base de la figure plane « 2-triangle », il est possible de construire le solide « 2-tétraèdre », qui a la charmante caractéristique d'avoir, en son centre, un vide de forme octaédrique. Comme le « 2-cube », le « 2-tétraèdre » est un tétraèdre dont la longueur des côtés est le double de la longueur du tétraèdre unitaire. Cependant, sa valeur numérique, correspondant au nombre de cellules unitaires qui le forme, est 4, et non 8. Sur une base formée par le « 2-triangle », il est possible de construire le « 2-octaèdre » et le « 2-icosaèdre ». Ce dernier solide, qui consiste en 12 unités icosaédrales, « sur-rempli » l'espace à trois dimensions en faisant s'interpénétrer chacune des cellules unitaires (**Figure 3**).

Finalement, sur la base du « 2-pentagone », il est possible de construire le « 2-dodécaèdre », un dodécaèdre dont la longueur des côtés est le double de la longueur originale, et qui consiste en 20 cellules unitaires interpénétrées (**Figure 4**). Ces figures solides peuvent être poursuivies indéfiniment, produisant toujours un solide plus grand, auto-similaire à la cellule unitaire d'origine.

Je pense que l'arrangement des atomes placés sur les sommets de

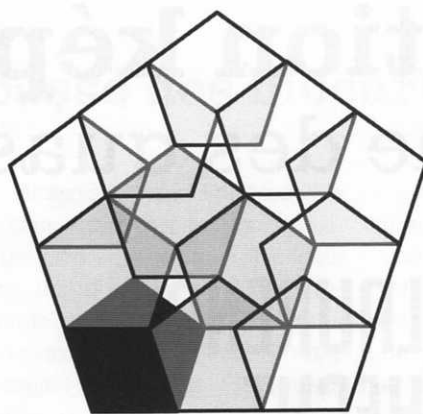


Figure 2

« 3-pentagone »

5 cellules unitaires pentagonales s'interpénètrent pour former le « 2-Pentagone », il en faut 12 pour former le « 3-Pentagones ».

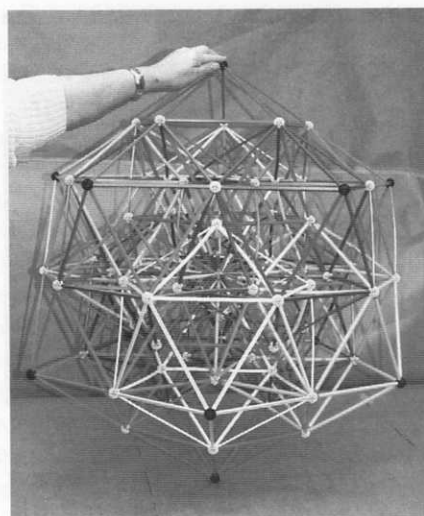


Figure 3

« 2-Icosaèdre »

Le grand icosaèdre enveloppe les 12 cellules unitaires icosaédriques interpénétrées.

la figure « N-dodécaèdre » pourrait correspondre à un réseau d'un quasi-cristal qui se présenterait sous la forme d'un cristal de forme dodécaédrique, tel que les alliages AlFeCu et AlPdMn produits pour la première fois en 1988 et 1990. Le réseau de points de ces modèles s'arrange par lui-même suivant un motif décagonal autour d'un centre donné, comme élaboré ci-dessus, qui peut se voir par les études de diffraction de ces quasi-cristaux. Cela correspond aussi à la preuve donnée par les images de la diffraction : l'espacement du réseau « N-dodécaèdre » suit, dans certaines directions, la section d'or.

HEXAGONAL CONTRE PENTAGONAL

La cristallographie moderne prend ses racines dans les études de Kepler sur le « co-assemblage » (congruent ou harmonique) de figures en deux et trois dimensions. Son étude sur le remplissage par les sphères est d'une importance capitale pour le développement de la cristallographie. Sur une couche plane de sphère, placée de manière à obtenir la compacité

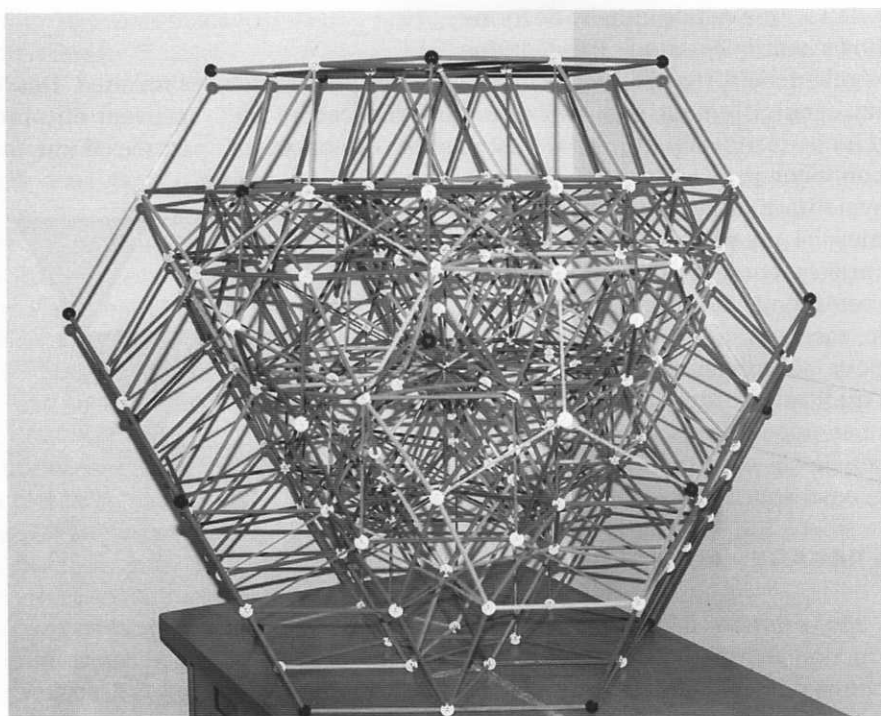


Figure 4

« 2-dodécaèdre »

Le « 2-dodécaèdre » enveloppe les 20 cellules unitaires dodécaédriques interpénétrées. Chaque face est un « 2-Pentagone »

la plus grande, chaque sphère est en contact avec 6 sphères voisines. Cet arrangement hexagonal se poursuit dans une configuration en trois dimensions pour l'empilement compact de sphères.

Comme Kepler l'a montré dans *L'étrenne ou la neige sexangulaire*, quand 12 sphères sont placées autour d'une sphère centrale suivant l'empilement le plus compact, les positions des centres de ces 12 sphères forment un cuboctaèdre, un solide qui peut aussi être obtenu par les intersections de quatre grands cercles, chacun étant divisé en 6 parties égales (**Figure 5**). D'où l'ordre 6 ou symétrie hexagonale, (les formes dérivant du cube, de l'octaèdre et du tétraèdre sont généralement considérées de symétrie hexagonale, mais d'un type inférieur).

Kepler se demanda si ce type d'arrangement, au niveau microscopique, ne serait pas la raison de la symétrie hexagonale toujours présente dans les flocons de neige.

Il remarqua aussi que les choses non vivantes tendaient vers une symétrie hexagonale, tandis que les plantes et les animaux tendaient, eux, vers une symétrie pentagonale et dévoilaient la présence de la section d'or, autrement appelée divine proportion et qui est l'expression d'un rapport entre la longueur d'un côté et de la diagonale d'un pentagone formant la face d'un dodécaèdre.

Son court travail sur les flocons de neige, écrit sur un ton enjoué et offert en guise d'étrennes à son protecteur ducal, expose son génie créatif de la manière la plus concise, et se place parmi les documents les plus fondamentaux de la science moderne. Sa description d'un nouveau solide, le tricontaèdre rhombique, est d'un intérêt tout particulier pour la cristallographie puisque c'est la forme sous laquelle se présentaient les premiers grains de quasi-cristaux, découverts en 1986.

Le développement de la cristallographie débuta avec les rêveries de Kepler au sujet du flocon de neige, et se poursuivit avec de nombreux auteurs. Parmi les travaux les plus remarquables des successeurs de Kepler se trouvent les travaux de l'abbé Haüy à la fin du XVIII^e siècle, fournissant une explication des angles et des formes régulières des cristaux comme étant le résultat de la répétition d'une forme initiale ; ceux de Mitscherlich qui fit des recherches sur l'isomorphisme des cristaux ; ceux de Pasteur avec sa découverte des cristaux hémédrique de symétrie miroir ; ceux de Von Federov qui

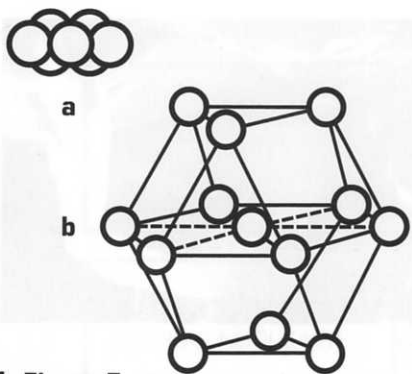
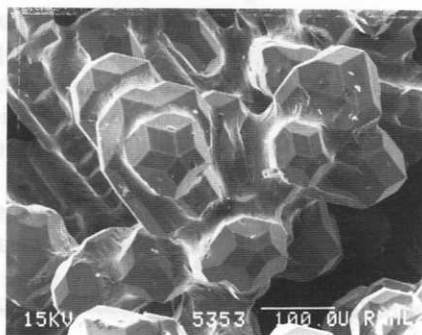


Figure 5
Empilement de sphères

Dans un plan, 6 sphères entourent une sphère centrale suivant une grille hexagonale (a). En trois dimensions, s'ajoutent 3 sphères au dessus et 3 sphères en dessous qui touchent la sphère centrale en se positionnant dans les creux de la grille hexagonale. Les 12 sphères entourant la sphère centrale ont l'apparence du solide archimédien : le cuboctaèdre (b)

parallélépipèdes, de formes différentes pour chaque substance. Cette dernière approche atteint un haut niveau de développement au début du XIX^e siècle quand les études géométriques montrèrent qu'il existait seulement 32 types de symétrie cristalline. Alors Frankenheim (1842) et Bravais (1848) établirent le concept de cellule unitaire : une façon de représenter le réseau de points par rapport aux autres points sous la forme de 14 types différents de briques solides unitaires, comportant un point du réseau à chaque sommet, qui pouvait être répétées pour représenter toutes les formes cristallines possibles –c'était pensé à peu près comme cela.

On supposait, au début, que les points du réseau pouvaient correspondre à la molécule de la substance chimique du cristal. Mais le développement de la cristallographie par rayons X tendait vers l'idée que le cristal était composé d'atomes individuels, et le réseau de points des cristallographes devint synonyme de réseau d'atomes ou d'ions. Les cristaux composés de plusieurs substances commencèrent à être expliqués par une combinaison d'interpénétrations des formes basiques des réseaux spatiaux. Avec le développement de la théorie électronique, la colle qui permet au cristal de se tenir était supposée être l'interaction électronique, bien qu'un problème persiste pour les cristaux métalliques. Ainsi, essentiellement des forces d'émanations individuelles à chaque point du cristal semblent



Les cristaux de l'alliage de Aluminium-Cuivre-Lithium (Al₆CuLi₃) obtenus en 1986 prennent la forme du tricontaèdre rhombique, avec un grain de près d'1 mm. Cette figure découverte par Kepler, consiste en 30 losanges dont la diagonale suit la section d'or.

permettre au cristal de se tenir. Si chaque atome agissait conformément à ses instincts, l'affaire serait faite.

Mais ces visions furent mises à l'épreuve après 1984, suite à la découverte par le métallurgiste israélien, Dany Shechtman, d'un alliage métallique dévoilant la symétrie interdite d'ordre 5 accompagnée d'un ordonnancement quasi-périodique du réseau de point dans les motifs de diffraction. Il semble qu'il n'y ait aucune façon, en se basant sur les règles de la cristallographie connues actuellement, d'expliquer comment une telle structure peut exister.

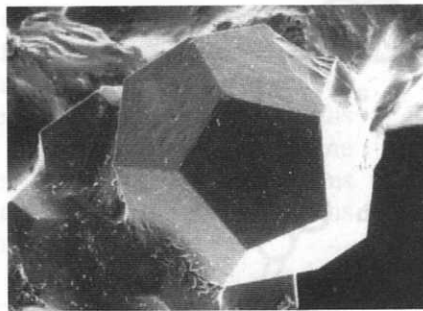
LE PRINCIPE D'HOMOGENÉITÉ

Je crois avoir montré à l'aide de la construction du « N-dodécaèdre », une manière d'étendre les lois de la cristallographie actuelle afin de pouvoir prendre en compte le cristal de symétrie d'ordre 5. En modifiant de manière significative les axiomes acceptés de la cristallographie, une cellule unitaire régulière peut produire un cristal de forme dodécaédrique ou icosaédrique. La modification requise est que nous devons accepter une interpénétration qui produise un « sur-remplissage » de l'espace plutôt que des cellules qui remplissent l'espace sans laisser de vide.

J'ai passé quelques temps à essayer d'imaginer comment cette variation pourrait altérer les relations d'un point du réseau à un autre. Est-il toujours possible de décrire la structure comme le résultat d'une action individuelle de chacun de ses constituants (atomes ou ions), ou est-il nécessaire de supposer une sorte d'action ou de champ collectif déterminant la croissance ? Si le quasi-cristal peut être décrit comme le résultat de forces émanant de chaque atome individuel, alors géométriquement chaque point du réseau est indiscernable des autres ; c'est-à-dire que chaque atome doit être ordonné de la même manière que tous les autres. C'est le principe d'homogénéité en cristallographie.

Dans le réseau du « N-dodécaèdre », 30 côtés protubérants à partir de chacun des sommets dans les 30 directions des sommets d'un icosidodécaèdre. (Les sphères préfabriquées dans les kits de construction ZomeTool procurent juste assez de positions pour cet arrangement). Dans un modèle du « 2-dodécaèdre », 20 cellules unitaires dodécaédriques se rejoignent au sommet central, et forment ces 30 directions. En faisant croître le modèle, chaque sommet se conformerait à cet arrangement. Comme l'icosidodécaèdre peut être produit par l'intersection de 6 grands cercles, chacun étant divisé en 10 parties égales, il est possible de voir qu'il existe 6 plans pour lesquels un décagone entoure un point central.

Cependant, alors que le réseau du « N-dodécaèdre » grandit, une chose nouvelle se produit. À cause du chevauchement des cellules, un sommet provenant d'une cellule dodécaédrique adjacente venant d'interpénétrer une cellule déjà présente, coupe le côté initial suivant la



Un grain d'une taille de presque 1 mm de l'alliage AlCuFe. Les cristaux dodécaédriques d'Aluminium Fer Cuivre furent obtenus à partir de 1988, suivi par l'alliage Aluminium-Palladium-Manganèse en 1990. Ils s'obtiennent par des méthodes regular slow casting et demeurent stables.

section d'or. Ainsi, autour de chaque sommet, il y a un groupe des 30 plus proches sommets provenant de l'interpénétration des cellules. Cependant, une inspection plus poussée montre que chaque sommet n'est pas identique. Par le fait que les côtés sont coupés suivant la section d'or, il semble qu'il y ait des sommets qui soient distants de la plus petite part de la section, et d'autre qui soient distants de la plus grande part de la section par rapport au plus proche sommet.

Ainsi le principe d'homogénéité, nécessitant que chaque atome soit ordonné de la même manière que tous les autres, est violé.

Cette conclusion, apparemment cohérente avec les résultats des études de diffractions à rayon X, nécessite de poursuivre ces recherches géométriques.

Si cela s'avère vrai, il semblerait que le quasi-cristal ne peut pas être le résultat d'une force uniforme émanant de chacun des centres des atomes. Nous serions obligés, à la place, de supposer que l'unité fonctionnelle de formation est le dodécaèdre. Il semble que nous devions revenir à l'idée d'unité cellulaire en tant qu'unité fonctionnelle, plutôt que d'en rester à l'unité descriptive mise en œuvre dans la cristallographie moderne.

Cependant, il sera alors nécessaire d'expliquer la raison pour laquelle les cellules dodécaédriques s'assemblent comme elles le font. L'explication la plus simple serait que le cristal recherche la forme dodécaédrique, et la trouve dans la seule façon permise par la géométrie d'une croissance auto-similaire.

Une telle hypothèse serait répugnante pour les extrémistes mécanistes et réductionnistes, qui pensent pouvoir expliquer le monde et tous ses événements à partir des supposées particules élémentaires et de leurs forces d'attraction et de répulsion. Pour l'instant, nous n'avons pas trouvé d'explications plus claires. Nous espérons discuter de cet aspect de la matière dans une publication ultérieure. Nous n'avons pas non plus abordé les implications de l'apparition de la forme dodécaédrique dans nos études sur le modèle du noyau atomique du professeur Robert J. Moon. L'apparence des éléments aluminium (Z=13), manganèse ou fer (Z=25,26) et palladium (Z=46) est des plus révélatrices à cet égard. ☞

NOTES

1. Traduction par Ivor Thomas, Selections Illustrating the History of Greek Mathematics, (Cambridge, Mass. Harvard university Press, 1993).

Le traducteur conseille grandement de construire les modèles de solides en vrai à l'aide de cet outil plutôt que d'en rester à une image en trois dimensions. « Jouer » avec un modèle réel permet toujours plus de découverte que de regarder des images.