Les polyèdres archimédiens Le chaînon manquant

1ère Partie

« La Géométrie est une et éternelle, une réflexion de l'esprit de Dieu. Que l'humanité s'intéresse à la géométrie vient de ce que l'homme est à l'image de Dieu. »

Johannes Kepler¹

onservons à l'esprit cette citation (Figures 1 et 2). Nous allons développer à travers une analyse des solides platoniciens et archimédiens une approche des limites qui contraignent l'espace physique. Je prétends que l'existence des limites, démontrées par la construction des solides platoniciens, ne peut être complètement appréhendée sans prendre aussi en compte les polyèdres archimédiens. Cette démarche n'occulte en rien les études antérieures ayant pour socle les découvertes de Carl Gauss ou Bernard Riemann, mais permet de remplir un vide évident dans la pédagogie existante. Les polyèdres archimédiens sont en grande partie une zone d'étude inexplorée, et sur cette base, mon sous-titre est souligné pour que tous puissent découvrir le « chaînon manquant ». Tout au long de cet article, nous construirons ensemble l'équivalent géométrique d'une boite à outil imaginaire qui comprendra deux collections d'outils. La première, réalisée à partir de la surface de trois sphères, se conçoit quelque part « à l'intérieur » des sphères. La seconde est conçue en deux dimensions bien qu'elle soit développée à partir d'une matrice en trois dimensions. Je n'ai rien inventé ici, ces outils existent depuis des décennies pour certains, d'autres remontent à quelques millénaires, à l'aube de la civilisation (Voir www.georgehart.com/virtualpolyedra/art.html). Ces outils n'ont jamais été utilisés suivant la méthode présentée, ce qui leur procure une fonction nouvelle qui pourra servir dans la poursuite d'une démarche intellectuelle sur ce sujet.

HAL VAUGHAN

Il y a plus dans la structure de l'espace que ce que nous laisse voir nos yeux.
Nous le verrons dans cette aventure géométrique qui nous conduira aux limites de notre univers.



Un flocon de neige L'étude des solides platoniciens et archimédiens révèle que l'espace possède une structure

qui dévoile une intention décelable créant une limite.

POURQUOI DES POLYÈDRES ARCHIMÉDIENS ?

L'étude des solides platoniciens révèle que l'espace n'est pas un échiquier sans fin. Il a une structure dévoilant une intention que l'on peut découvrir et qui crée une limite.

Il existe cinq formes, et seulement cinq, de polyèdres convexes possédants des faces régulières congruentes et dont les angles aux sommets, ainsi que la longueur des cotés, sont égaux : les solides platoniciens (Figure 3). Il n'est possible de fabriquer que ces cinq formes en prenant en compte ces contraintes d'égalités et ainsi déceler une limite physique. Si l'on essaie de fabriquer d'autres solides réguliers, par exemple en prenant six triangles ou quatre carrés se rejoignant au même sommet, il est impossible d'obtenir un solide, même en y mettant beaucoup d'ardeur. Le grand projet de produire des polyèdres réguliers prend fin au terme de cinq réussites, c'est dire s'il y a plus dans l'univers que ne peut en dévoiler notre vision. Il existe quelque chose dans la formation de tout ce que l'on voit qui diffère de ce que l'on voit. Voilà où réside l'importance des solides platoniciens. Ils sont la preuve que nous ne connaissons pas ce que nous vovons.

L'unicité des solides platoniciens prouve que nous ne vivons pas du tout sur un échiquier sans limite, mais plutôt dans un bocal à poissons. Les limites sont réelles. Mais la plupart des gens passent leur temps à observer les cailloux et les bulles, ou font une partie d'échecs sur un échiquier inexistant en se demandant dans combien de temps ils vont manger.

Pour ma part, j'ai souhaité connaître la forme de notre bocal. Déterminer le rapport entre les solides platoniciens et cette limite, et comment cela fonctionne. L'univers visible est-il lancé à travers l'infini comme un bateau sur l'océan ? Dans

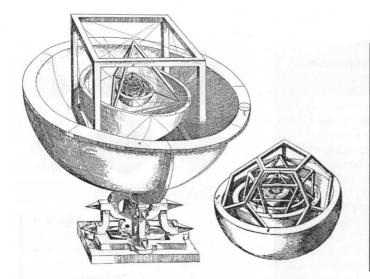


Figure 1 Ordonnancement des planètes de Kepler

Johannes Kepler (1571-1630), qui a découvert le principe de la gravitation au cours de ses recherches sur les mouvements des planètes dans le système solaire, vit une cohérence entre l'ordonnancement

harmonique des planètes sur leurs orbites et l'ordonnancement harmonique des solides platoniciens imbriqués.

La gravure extraite du Mysterium Cosmographicum, représente la manière dont Kepler a déterminé les orbites des planètes. L'ordonnancement part du centre vers l'extérieur, il débute avec Mercure et suit cet ordre : octaèdre, icosaèdre, dodécaèdre (dont la sphère inscrite est la Terre, et la sphère circonscrite est Mars), tétraèdre et cube.

ce cas, les polyèdres réguliers en sont-ils le sillage? La variété discrète se jette-elle contre la variété continue comme une particule subatomique dans un cyclotron?

Depuis dix ans, j'observe les solides platoniciens, espérant qu'ils me renseigneront sur la structure de l'univers. J'ai mis des cubes dans des dodécaèdres, des tétraèdres dans des cubes, des octaèdres dans des tétraèdres ; j'ai rassemblé les complémentaires (**Figure 4**), étoilé ce qui pouvait être étoilé, découpé des cubes et des tétraèdres pour voir ce qu'ils avaient dans le ventre. Aucun de ces « interrogatoires » n'a abouti, les solides platoniciens ne voulaient rien me dire.

Je connaissais les solides archimédiens, mais je ne voulais rien avoir à faire avec eux. D'un côté j'avais

les cinq jolis solides platoniciens, de l'autre les treize solides archimédiens, ce qui, déjà était assez suspect. De plus, comme l'avait démontré Képler, il existait une infinité de prismes archimédiens et une autre infinité d'anti-prismes archimédiens. Et pour couronner le tout, les archimédiens, les prismes et les anti-prismes possèdaient tous des complémentaires, et ils n'étaient pas non plus complémentaires entre eux comme nos bons vieux solides platoniciens! Chacun des treize solides archimédiens possèdaient un complémentaire qui n'est pas un solide archimédien, et tous les prismes et antiprismes avaient eux aussi des complémentaires uniques qui ne font pas partie de leur famille (Figures 5 et 6). Il était donc question de quatre groupes infinis et de treize couples d'archimédiens. Cela faisait beaucoup trop pour ma petite personne, les archimédiens n'étaient pas pour moi; les cinq solides platoniciens faisait bien l'affaire et ils étaient à ma portée.

LES SPHÈRES PROVOQUÈRENT MA CHUTE

Vous pouvez aisément constater que les sommets de chaque solide platonicien peuvent toucher l'intérieur d'une sphère, on dit qu'ils sont inscrits dans une sphère (la sphère circonscrite). Le centre de chacune de leurs faces est aussi en contact avec une autre sphère, et le milieu de leurs arêtes également. Une sphère différente peut être en

Figure 2
Les solides archimédiens
Kepler a fait des études

approfondies sur les polyèdres, et réalisa ces dessins des solides archimédiens, qui font partie de sa boîte à outils géométrique. contact avec chacun de ces endroits sur chacun des cinq polyèdres, cela provient de la régularité des solides platoniciens. Les sphères sont importantes parce qu'elles représentent le principe de moindre action dans l'espace, elles possèdent le plus grand volume pour la plus faible surface (comme le fait le cercle dans le plan, avec la plus grande surface pour le plus petit périmètre).

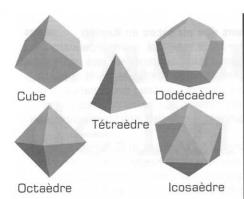
Les sphères représentent l'origine de la limite que l'on rencontre lorsque l'on tente de fabriquer plus de cinq solides platoniciens. La sphère est le plus haut niveau d'expression du principe de moindre action que nous puissions appréhender par nos seuls sens. Les arêtes d'un solide platonicien ne définissent pas forcément une sphère, mais la sphère (ou la nature de l'espace qui confère à la

sphère son unicité) est la limite des solides platoniciens. C'est vraisemblable, car si nous sommes attentifs, les sphères sont ce à quoi ressemble la limite.

C'est là une partie importante de l'étude de la géométrie. Comment s'exprime l'infini dans notre univers visible ? Où le domaine complexe rencontre-t-il notre domaine ? C'est difficile à voir. Si quelqu'un vivant au « pays plat »² regarde un cercle il n'y voit qu'un segment de droite ; il n'a pas idée de la sphère qui a produit le cercle (qui lui apparaît sous la forme d'un segment de droite) de par ses limitations sensorielles. Nous n'avons rien à lui envier lorsque nous tentons de regarder des sphères. Sans la bonne projection, elles nous apparaissent comme des cercles.

Sur une sphère, une ligne droite est un cercle, la plus longue ligne droite sur une sphère est un grand cercle dont le centre est celui de la sphère, comme l'équateur de la Terre. Puisque nous parlons de géométrie (géo = terre, métrie = mesure), regardons un globe terrestre (**Figure 7**). Les grands cercles expliquent pourquoi Charles Lindbergh, dans son trajet de New York à Paris, vola au-dessus de l'Irlande. Il n'y a pas de ligne droite parallèle sur une sphère. Deux grands cercles quelconques se croisent l'un l'autre, non pas une fois, mais deux fois sur des points exactement opposés.

Vous pouvez faire un joli tour avec le principe de moindre action sur la sphère. Si vous coupez un grand cercle par un autre grand cercle, ils se coupent chacun en deux parties



égales, comme nous l'avons déjà dit. Visualisons par exemple, sur notre globe terrestre, l'équateur et le « méridien de Greenwich ». Les deux grands cercles ne se croisent pas forcément à angles droits, chacun d'eux peut

tourner autour des points à leur intersection (**Figure 8**). Si l'on continue à diviser les grands cercles en un

Si l'on continue à diviser les grands cercles en un plus grand nombre de parties égales, alors cela devient amusant.

Prenons nos deux cercles cités ci-dessus, plaçons-nous à l'endroit de leur intersection au large de l'Afrique; et de là, déplaçons-nous vers l'Ouest sur l'équateur jusqu'à notre destination, les îles Galápagos. Nous sommes, à présent, prêts à créer le troisième grand cercle. Il faut alors prendre, à droite, la direction du Nord, passer par le Guatemala, puis par le Minnesota, le Pôle Nord où nous croisons le deuxième grand cercle, la Sibérie, la Chine, l'Océan Indien, à nouveau l'équateur, l'Antarctique, le Pôle Sud est le deuxième point de rencontre avec le deuxième cercle, et de là, rejoindre le point de départ aux Galápagos en ayant croisé deux fois l'équateur et deux fois le méridien de Greenwich/changement de date.

Qu'obtenons-nous? L'équateur est divisé en quatre parties égales par deux grands cercles, ainsi que pour le méridien de Greenwich/changement de date et notre nouveau grand cercle. Ces trois grands cercles se divisent mutuellement chacun en quatre parties égales. La sphère terrestre vient ainsi d'être divisée en huit triangles équilatéraux rectangles sphériques par nos trois grands cercles

Figure 3 Les 5 solides platoniciens

Les solides platoniciens sont des polyèdres convexes avec des faces régulières congruentes dont les arêtes et les angles aux sommets sont égaux. Seuls les solides platoniciens peuvent être construits en respectant ces conditions : cube, octaèdre, tétraèdre, dodécaèdre, icosaèdre. Le cube et l'octaèdre sont des paires complémentaires comme le dodécaèdre et l'icosaèdre. Les paires de complémentaires ont interverti leur nombre de faces et de sommets mais ont le même nombre d'arêtes.

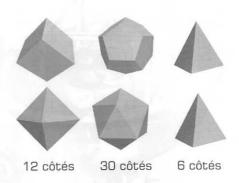


Figure 4 Les complémentaires des platoniciens

Notons que le tétraèdre est son propre complémentaire.

(**Figure 9**). Les grands cercles ont six points d'intersection. Je me demande combien il existe de façons

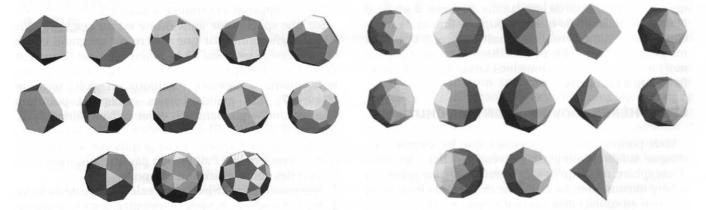
différentes de diviser des grands cercles entre eux d'une manière régulière ?

Nous obtenons quatre divisions identiques avec trois grands cercles, et avec trois divisions que se passerait-il? Si nous prenons l'équateur comme grand cercle d'origine (et d'ailleurs à partir de maintenant parlons uniquement de cercles) et que nous le divisons en trois parties, nous n'obtenons pas trois parties mais six! Parce que les grands cercles pris deux par deux se rencontrent en deux points diamétralement opposés sur la sphère. Il n'existe pas de division impaire d'un grand cercle par un autre grand cercle. Voyons cela plus précisément. Tout d'abord, soyons sûrs que les trois grands cercles divisant le premier sont eux-mêmes divisés en six segments par chacun des autres grands cercles, et voyons ce que nous obtenons : les quatre cercles sont divisés en six parties égales, des triangles sphériques équilatéraux alternent avec des carrés sphériques au-dessus et en dessous de notre cercle originel et les triangles entourent chaque pôle.

Six carrés et huit triangles; cela ne vous fait-il pas penser à quelque chose? Mais je vous préviens: nous avons presque atteint une nouvelle limite physique.

L'unique autre façon pour des grands cercles de se diviser d'une manière identique sur une sphère se produit

Figure 5 Les 13 solides archimédiens et leurs complémentaires Les ennuis commencent ! La famille des polyèdres s'agrandit Il existe treize polyèdres archimédiens et ils ont tous leur complémentaire.



Les solides archimédiens

Les complémentaires des archimédiens

avec six grands cercles se divisant chacun en dix segments. Essayons de diviser un grand cercle en cinq parties égales: c'est impossible. On obtiendra dix divisions, de la même façon que trois entraîne six. C'est très difficile à voir si vous ne l'avez pas tenté par vous-même, donc, vérifiez le en construisant des maquettes. Le résultat est très joli. C'est une métaphore que vous pouvez tenir entre vos mains.

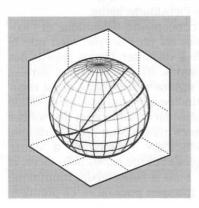
Donc, avec six cercles, nous obtenons douze pentagones sphériques et vingt triangles sphériques. Cela ne vous fait-il pas encore penser à quelque chose?

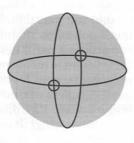
Trois cercles, quatre cercles, six cercles, c'est tout. Il n'y a pas d'autre combinaison pour diviser de manière identique des grands cercles. Ceci est une autre limite physique, comparable à celle qui limite le nombre des solides platoniciens (**Figure 9**). Maintenant, voici l'os sur lequel je suis tombé: regardons la construction à quatre cercles, on voit douze intersections. Il y en a six sur le cercle du milieu, trois au-dessus et trois en dessous.

Pour mieux comprendre, jouons aux billes : on peut entourer une bille avec six autres sur une surface plane et faire en sorte que chacune de ces six billes soient, elles aussi entourées de six billes. Couvrons de cette façon le fond d'une boîte. On obtient une couche régulière de billes formant le premier niveau de l'empilement. Construisons la deuxième couche où l'on mettra

trois billes autour de chacune des billes de la première couche, soit dans les positions à douze, quatre et huit heures, soit dans celles à deux, six et dix heures. Choisissons un de ces arrangements et remplissons complètement la deuxième couche, qui ressemblera alors à la première.

Pour la troisième couche, posons les billes au-dessus des billes du premier niveau, c'est-à-dire selon l'arrangement qui n'avait pas servi pour le deuxième niveau. En faisant ce dernier choix, et en continuant cette succession de couches, nous constaterons que la boîte est remplie avec le plus grand nombre possible de billes et, en observant à quels endroits chaque bille touche ses voisines, nous verrons qu'elle en touche six par son «équateur», trois





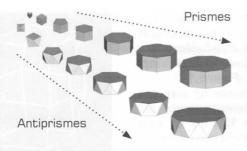


Figure 6 Prismes et antiprismes

Il existe une série infinie de prismes et d'antiprismes, qui ont tous, eux aussi des complémentaires.

Figure 7 Notre planète Terre

La sphère représente le principe de moindre action en « trois dimensions ». Un grand cercle est une ligne droite dans une géométrie sphérique.



au-dessus et trois en dessous. Comme les intersections des quatre grands cercles! L'égale division de quatre grands cercles génère la même singularité à l'endroit où les cercles se croisent que l'empilement optimal des sphères (**Figure 10**). Je ne voulais pas construire les solides archimédiens, et pourtant nous y arrivons.

Les faces sphériques de la construction à quatre cercles représentent un solide archimédien appelé cuboctaèdre (cube-octaèdre) comprenant six carrés et huit triangles. Le complémentaire du cuboctaèdre se nomme le dodécaèdre rhombique. Dodécaèdre signifie qu'il a douze faces comme le solide platonicien régulier dodécaèdre, et rhombique signifie que les faces sont en forme de losange, c'est-à-dire que nous avons une coupe en diamant à la place de la coupe pentagonale que nous connaissons au dodécaèdre. Le dodécaèdre rhombique est la forme des cellules des ruches des abeilles que Képler a mentionnées dans son texte L'étrenne ou la neige sexangulaire3. Le dodécaèdre rhombique remplit l'espace, et son complémentaire, par définition, aussi. Cela signifie que si on les empile, il ne restera aucun vide entre eux. Puisque les sphères se rangent au plus serré, d'une manière qui produit les sommets du cuboctaèdre, alors son complémentaire, par définition, peut remplir l'espace. Tout cela ne serait pas bien extraordinaire, si ce n'était qu'il n'existe qu'un seul autre

polyèdre dans tout l'univers qui possède des faces identiques et qui puisse aussi remplir l'espace: c'est le cube. Ce sont en effet les deux seuls solides, qui remplissent l'espace⁴ (**Figure 11**).

J'ai alors compris qu'il me fallait construire les solides archimédiens parce que le complémentaire de l'un des solides archimédiens exprimait une relation suivant le même type de limite que celles que l'on rencontre avec les solides platoniciens. C'est la même limite que celle exprimée par les grands cercles quand ils se divisent l'un l'autre. Ce ne sont que les facettes de la même et unique problématique. Les sphères m'avaient eu.

CONNAISSANCES DE BASE SUR LES SOLIDES ARCHIMÉDIENS

Voici la liste des treize solides archimédiens: deux d'entre eux, dont nous avons déjà parlé, sont plus réguliers que les autres et sont ainsi appelés « quasi-réguliers », il s'agit du cuboctaèdre et l'icosidodécaèdre, qui

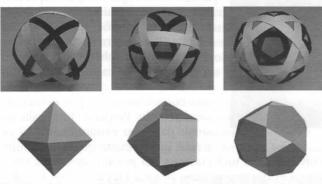
Figure 8 Le croisement de deux grands cercles

Le croisement de deux grands cercles sur une sphère divise toujours chacun d'eux en deux parties égales. Cela est lié au le principe de moindre action. f 108

sont définis par les constructions à quatre et six cercles. Le cuboctaèdre a six faces carrées comme le cube et huit faces triangulaires comme l'octaèdre. L'icosidodécaèdre a douze faces pentagonales comme le dodécaèdre et vingt faces triangulaires comme l'icosaèdre (**Figure 12**).

Les cinq prochains solides archimédiens ne sont pas plus difficiles à visualiser, je les ai appelés le groupe des solides platoniciens tronqués (**Figure 13**). Il y en a un pour chacun des solides platoniciens, dont le plus connu, l'icosaèdre tronqué, est communément appelé ballon de foot!

Pour faire un de ces solides platoniciens tronqués, partons d'un solide platonicien. Pour chacune des faces de ces solides, il existe une face avec deux fois le nombre de côtés de l'original. Par exemple, le cube tronqué a six faces octogonales à la place des six faces carrées du cube. Là où le solide platonicien a un sommet, il y a une face semblable à la face du complémentaire du solide platonicien originel. Le cube tronqué a donc huit faces triangulaires... (à la place occupée auparavant par les sommets du cube) situées dans le même axe que les faces d'un octaèdre. Cette démarche de construction fonctionne aussi pour les quatre autres solides. L'octaèdre tronqué a huit faces hexagonales et six faces carrées. Le tétraèdre tronqué a quatre faces hexagonales et quatre triangles du tétraèdre (son propre complémentaire). Le dodécaèdre tronqué a douze faces décagonales (à dix côtés) et vingt faces triangulaires, et enfin l'icosaèdre tronqué a vingt



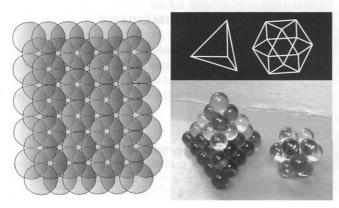
3 / Octaèdre 4 / Cuboctaèdre

6 / Icosidodécaèdre

Figure 9 Les grands cercles et les polygones sphériques Il existe seulement trois façons de diviser de manière

régulière des grands cercles entre eux, le résultat est la création de polygones sphériques. Les sphères à 3, 4, 6 grands cercles représentent les sphères qui contiennent les « figures des grands cercles » du dessous : octaèdre, cuboctaèdre et icosidodécaèdre.

Figure 10 Meilleure occupation du volume avec des sphères



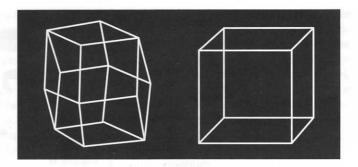
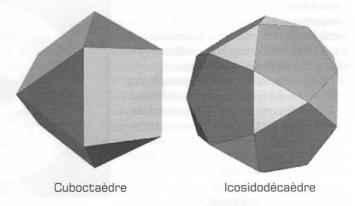


Figure 11 Les polyèdres qui remplissent l'espace

Un solide platonicien, le cube, et le complémentaire d'un archimédien, le dodécaèdre rhombique, sont les deux seuls polyèdres à faces identiques qui peuvent remplir l'espace. Le dodécaèdre rhombique est la forme des alvéoles de la ruche des abeilles. Pouvezvous deviner les hexagones implicites dans la figure?

Figure 12 Les polyèdres quasi réguliers

Les polyèdres quasi réguliers sont les figures des grands cercles dont le nom renferme le noms des solides platoniciens complémentaires.



faces hexagonales et douze faces pentagonales. Ce qui nous en fait sept.

A partir d'ici, l'originalité prend place. Dans l'ordre d'étrangeté croissante, on a une paire de solides, que j'ai appelé des quasi tronqués (quasi pour petit) parce que ce sont des versions tronquées des « quasi réguliers ». Il s'agit du cuboctaèdre tronqué et l'icosidodécaèdre tronqué. Là où le cuboctaèdre a des carrés et des triangles, le cuboctaèdre tronqué a des octogones et des hexagones. Là où le cuboctaèdre a douze sommets, le cuboctaèdre tronqué a douze faces carrées (**Figure 14**). Là où l'icosidodécaèdre a des pentagones et des triangles, l'icosidodécaèdre tronqué a des faces décagonales et des hexagones, auxquels s'ajoutent les trente faces carrées correspondant aux sommets initiaux de l'icosidodécaèdre.

La paire suivante, le cuboctaèdre rhombique et l'icosidodécaèdre rhombique, est plus simple, bien que le second soit plus difficile à visualiser. On les appelle des quasi-polyèdres rhombiques, ils ont des faces carrées construites à partir des sommets des solides quasi-réguliers suivant le même principe que pour la paire de solide précédente, mais les autres faces sont celles des solides quasi-réguliers eux-mêmes mais pas en nombre doublé (**Figure 15**). L'icosidodécaèdre rhombique a douze pentagones, vingt triangles et trente carrés pour faces, et ressemble à ce qu'il est, mais le cuboctaèdre rhombique a dix-huit carrés et huit triangles pour faces. La première

fois où je l'ai vu, j'en fus tout confus, car les carrés, bien qu'ils fussent tous identiques, étaient issus de deux processus différents (les faces carrées du cube et les carrés construits à partir des sommets du cuboctaèdre). C'est le type d'ambiguïté qui peut rendre fou, jusqu'à ce que l'on réalise que ce que l'on fait, dans le domaine géométrique, est justement de découvrir à quel type de puzzle on a à faire.

En parlant d'ambiguïté qui peut mener à la folie, nous arrivons aux deux derniers solides archimédiens qui sont le cube adouci et le dodécaèdre adouci. Ils ont une ceinture de triangle autour de chacune des faces initiales. Le cube adouci possède heureusement six faces carrées, c'est

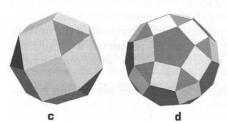
un bon point de repère. Mais il a aussi trente faces triangulaires. Le dodécaèdre adouci a les douze faces pentagonales attendues et quatre-vingt faces triangulaires. Si vous trouvez que c'est difficile, permettez-moi de vous préciser qu'en plus, il existe deux sortes de cubes adoucis et deux sortes de dodécaèdres adoucis. Ils sont constitués des mêmes éléments, mais la façon dont ils sont disposés fait que l'un tourne à droite et l'autre à gauche (**Figure 16**). Voilà, le compte y est ; nous avons décrit les treize solides archimédiens.

Ces solides sont traditionnellement classés par leur nom. Il y a trois types de familles basées sur les paires de complémentaires: le tétraèdre qui est son propre complémentaire, le cube/octaèdre et le dodécaèdre/icosaèdre. La première famille ne contient que le tétraèdre tronqué. La seconde comprend le cube tronqué, l'octaèdre tronqué, le cuboctaèdre, le cuboctaèdre rhombique, le cube adouci et le cuboctaèdre tronqué. La dernière comprend le dodécaèdre tronqué, l'icosaèdre tronqué, l'icosidodécaèdre, l'icosidodécaèdre rhombique, le dodécaèdre adouci et l'icosidodécaèdre tronqué.

A présent, nous allons chercher pourquoi la famille du tétraèdre est si peu nombreuse comparée aux autres.

Figure 15 Les solides quasi réguliers rhombiques

On peut faire des transformations sur les figures des grands cercles (les solides quasi réguliers) amenant aux figures des grands cercles rhombiques : le cuboctaèdre rhombique (c) et l'icosidodécaèdre rhombique (d).



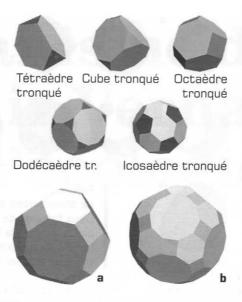


Figure 13 Le groupe des platoniciens tronqués

Ce sont les solides archimédiens qui semblent résulter de la troncation des solides platoniciens correspondants.

Figure 14 Les solides quasi réguliers tronqués

Les figures des grands cercles (les solides quasi réguliers) peuvent aussi être tronquées, donnant ainsi le cuboctaèdre tronqué (a) et l'icosidodécaèdre tronqué (b).

QU'EST CE QU'UN POLYÈDRE ARCHIMÉDIEN ?

Pour comprendre ce que sont les solides archimédiens, je les ai construits et je recommande fortement au lecteur d'en faire autant. On pourrait se contenter de regarder des images ou de télécharger un fichier complet des solides en trois dimensions, mais ce n'est pas du tout la même chose que de prévoir combien de faces vont être nécessaires, de les construire et de les assembler de la manière adéquate. Je me souviens, par exemple, avoir été excédé par l'anomalie dont est frappé le tétraèdre. Non seulement il est son propre complémentaire mais, là où les autres paires de complémentaires de solides platoniciens produisent une famille de six ou sept solides archimédiens (si l'on compte les adoucis droitiers et gauchers, cela donne pour chacun une famille de sept), le tétraèdre n'en produit qu'un : le tétraèdre tronqué.

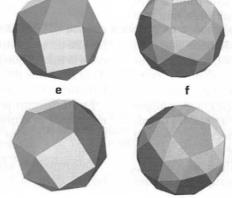
Il me fallait étudier ce paradoxe, mais par où commencer? Je n'allais pas commencer par la famille du dodécaèdre: quatre-vingt triangles pour le dodécaèdre adouci, c'était trop. Je débutai donc par la famille du cube.

Le cuboctaèdre tronqué me semblait trop peu clair pour ne pas être certain de m'y casser les dents. Je choisis le cube tronqué comme base de mon étude du tétraèdre car il me semblait plus facile à visualiser. Je posai ainsi le problème: qu'obtiendrais-je si je faisais au tétraèdre tronqué ce qui avait été fait pour passer du cube tronqué au cuboctaèdre tronqué? A est à B ce que C est à X, quoi de plus simple ? (**Figures 18 à 21**).

Le cube tronqué a six faces octogonales, il en va de même pour le cuboctaèdre. Le cuboctaèdre tronqué a huit faces hexagonales là où le cube tronqué a huit triangles. Il a aussi douze faces carrées là où le cube a douze sommets. Voilà la relation de A à B. Maintenant, comment passer de C à X? Le tétraèdre tronqué a quatre faces hexagonales, ainsi X aura aussi quatre faces hexagonales. Les quatre faces triangulaires du tétraèdre

Figure 16 Les adoucis à droite et à gauche

Il y a deux jeux de solides adoucis dans le classement courant des archimédiens : le cube adouci à droite/à gauche (e) et le dodécaèdre adouci à droite/à gauche (f).



tronqué donneront aussi quatre faces hexagonales, et les six sommets du tétraèdre donneront six faces carrées pour X. Qu'obtenons-nous? Quatre plus quatre faces hexagonales donnent huit faces hexagonales avec six faces carrées. Voici la description du solide obtenu.

Un nouveau polyèdre vient de naître dans la famille du tétraèdre; je viens d'inventer un nouveau solide archimédien: huit hexagones et six faces carrées. A quoi ressemble-t-il ? Nous avons déjà vu un solide avec huit faces hexagonales et six faces carrées! et si cela est un solide archimédien avec des faces régulières, et tout ce qui va avec, ils doivent alors



Tétraèdre tronqué

tous les deux avoir la même forme : l'octaèdre tronqué.

Vérifions. L'octaèdre tronqué (huit hexagones et six carrés), fait partie de la famille du tétraèdre ayant les caractéristiques d'un quasi-tronqué que nous pourrions nommer un tétritétraèdre tronqué. La famille du cube a donc un point commun avec la famille du tétraèdre. La forme de l'octaèdre tronqué est semblable à un tétrité-

Figure 18 Le cube tronqué

Le cube tronqué a six faces octogonales là où se situaient les six faces du cube, et huit faces triangulaires là où le cube avait ses huit sommets.

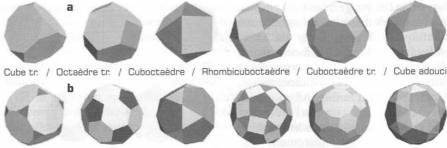
Figure 19 La transformation du cube tronqué en cuboctaèdre tronqué

Le cuboctaèdre tronqué conserve les huit faces octogonales du cube tronqué, mais, en plus, huit faces hexagonales remplacent les huit faces triangulaires. Pour finir, s'ajoutent douze faces carrées là où se trouvaient les arêtes du cube.

traèdre tronqué de la même manière que, sur un piano, le fa dièse correspond à la même couche que le sol bémol, ce sont des « formes enharmoniques ».

Pour clore ce travail, je fabriquai un poster coloré affublé d'un nom prétentieux : « la forme de l'espace » où j'arrangeai les solides platoniciens et archimédiens dans les familles symétriques cube/octaèdre et dodécaèdre/ icosaèdre, recentrées autour de leur polyèdre quasirégulier respectif; et le tétritétraèdre tronqué était relié à la famille du cube par des pointillés (Figures 22 et 23). Il était très joli et cela me prit d'ailleurs un certain temps pour le réaliser, mais ce poster ignorait complètement le fait que le tétraèdre avait encore une longue route à faire pour parvenir à l'égalité de droits qu'il mérite en tant que solide archimédien en titre et père de famille.

C'est à cette époque que Lyndon LaRouche sort son étude On the Subject of Metaphor⁶ (Au sujet de la métaphore), dans laquelle il insiste impérativement sur cette question des grands cercles. Cette étude me remit sur le chemin de la réflexion. La sphère devait être l'étape obligée pour construire les solides platoniciens ; les solides quasiréguliers (le cuboctaèdre et l'icosidodécaèdre) étaient clairement produits par les divisions égales de grands cercles sur une sphère. Et Lyndon LaRouche n'hésitait pas à affirmer que la manière de construire les solides



Le classement courant des archimédiens

Deux familles de polyèdres sont liés aux solides platoniciens : la famille du cube / octaèdre (a) et la famille du dodécaèdre / icosaèdre (b). Le tétraèdre trongué est seul dans la famille du tétraèdre (c).

platoniciens était celle des grands cercles. Mais pourquoi, alors, ce qui est synonyme du principe de moindre action génère-t-il un panier garni bigarré de deux solides archimédiens et d'un solide platonicien ? (Figure 24).

J'étais tracassé par l'apparente inégalité du motif de mon schéma « forme de l'espace ». La famille du tétraèdre n'était pas encore complète.

> Je savais que, tandis que le complémentaire du cube était l'octaèdre et que le complémentaire du dodécaèdre était l'icosaèdre, le tétraèdre était son propre complémentaire. Dans le but d'examiner ces anomalies, j'ai regardé si la famille du tétraèdre pouvait être agrandie pour se conformer au schéma défini par les deux autres familles.

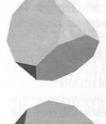
Si le tétraèdre est son propre complémentaire, alors le tétraèdre tronqué devait apparaître sur le schéma une deuxième fois. C'était raisonnable.

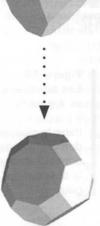
La production de l'élément quasirégulier des autres familles pouvait être imaginée ainsi : en prenant les six faces carrées du cube et les huit faces triangulaires de l'octaèdre, nous obtenons le cuboctaèdre; en prenant les douze faces pentagonales du dodécaèdre et les vingt faces triangulaires de l'icosaèdre, nous obtenons l'icosidodécaèdre (Figure 25). Ainsi pour la famille du tétraèdre, on prend les quatre triangles du tétraèdre et les quatre triangles de l'autre tétraèdre et l'on obtient... le polyèdre quasirégulier suivant mon hypothèse de la

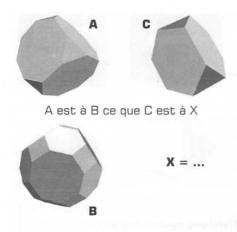
famille du tétraèdre, qui est l'octaèdre (ou tétritétraèdre), celui là même que j'avais construit un peu plus tôt à l'aide de la méthode des grands cercles préconisée par Lyndon LaRouche. C'était stupéfiant et même électrisant.

En un instant je passai de la perception d'un univers encombré et d'une jolie théorie proprette, à un univers ordonné et une théorie vouée à être entièrement repensée.

Désormais je savais que je pouvais remplir les blancs laissés dans la famille du tétraèdre. Il me restait deux







dernières choses à faire. Le cuboctaèdre rhombique était formé en prenant le cuboctaèdre en y ajoutant des carrés là où se trouvaient ses sommets (Figure 26). L'icosidodécaèdre rhombique est formé d'un icosidodécaèdre auquel on ajoute des carrés là où se trouvaient ses sommets. Dans la famille du tétraèdre il faut partir de l'octaèdre (ou comme nous pourrions l'appeler dans cette famille, le tétritétraèdre) et ajouter des carrés à ses sommets. Qu'obtient-on? Le résultat est une forme composée de huit triangles et de six carrés que nous connaissons déjà (un cuboctaèdre ou tétritétraèdre rhombique) dans cette nouvelle incarnation enharmonique.

La tournure devenait intéressante. J'avais maintenant trois polyèdres formés à partir de la famille du cube faisant double emploi dans la famille du tétraèdre, et il ne manquait plus qu'un élément : le « tétraèdre adouci », s'il existe. Les solides de type adouci (le cube adouci et le dodécaèdre adouci) n'étaient pas ceux que je préférais. Ils faisaient désordre; ils n'avaient pas le même nombre de faces que le reste de la famille. Le cube adouci a six carrés, d'accord, mais il a aussi trente-deux triangles! Le dodécaèdre adouci a bien les douze pentagones attendus, mais quatre-vingt triangles, et il n'était pas évident de savoir ce qu'ils faisaient et pourquoi. C'était à peu près la dernière fois qu'une anomalie comme celle là m'embêtait. Je me mis à les étudier plus profondément, après avoir fait le travail résumé dans le prochain paragraphe.

Pour faire un cube adouci, on entoure les faces carrées du cube avec un treillis alternant de triangles. Il y a un triangle pour chaque sommet de chaque face du cube, et un triangle pour chaque face du complémentaire du cube, l'octaèdre.

Figure 20 Une autre transformation pour donner...

Le tétraèdre tronqué (en haut à droite) a quatre faces hexagonales à la place des faces triangulaires du tétraèdre, et quatre faces triangulaires là où se trouvaient les sommets du tétraèdre. Reprenons ici la transformation qui permet de passer du cube tronqué au cuboctaèdre tronqué. Conservons les quatre faces hexagonales du tétraèdre tronqué, et ajoutons-y quatre faces hexagonales supplémentaires pour remplacer ses faces triangulaires, puis ajoutons encore six carrés, un pour chaque arête du tétraèdre. Qu'obtenons-nous alors ?

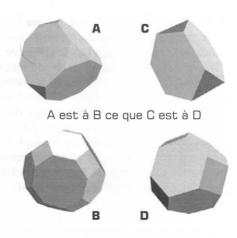


Figure 21 ...Un tétritétraèdre tronqué Huit hexagones, six carrés! Le tétritétraèdre tronqué: un nouveau rôle pour le solide archimédien connu aussi en tant qu'octaèdre tronqué.

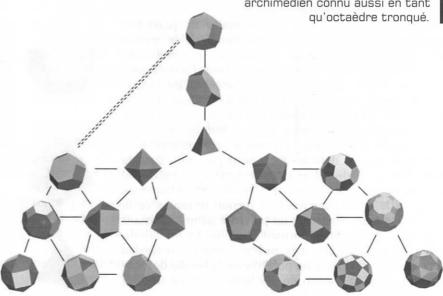


Figure 23
La forme de l'espace
Une autre présentation de l'ordonnancement des solides archimédiens.

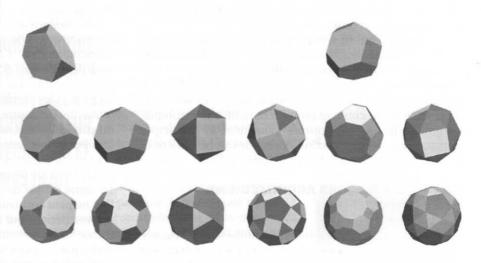


Figure 22 Un ajout à l'ordonnancement des solides archimédiens La famille du tétraèdre (1º ligne) se compose à présent de deux membres.

f 108

Six faces carrées de chacune quatre côtés nous donnent vingt-quatre triangles, plus les huit triangles de l'octaèdre ce qui fait trente-deux triangles (**Figure 27**).

De la même façon, pour le dodécaèdre adouci, on entoure les pentagones suivant le même principe. Pour créer le prétendu tétraèdre adouci l'on devra entourer quatre triangles avec ce même type de treillis alterné de triangles. C'est à dire quatre faces de trois côtés chacune, ce qui donnera douze triangles auquel il faut ajouter les quatre triangles de son complémentaire (le tétraèdre lui-même) qui serviront à entourer nos quatre faces du tétraèdre de départ pour obtenir ainsi:

4 + 4 + 12 = 20 triangles.

Existe-t-il quelque chose qui ressemblerait à cette description? Oui, évidemment, vingt faces triangulaires, cela nous donne l'icosaèdre! L'icosaèdre est aussi le tétraèdre adouci et l'icosaèdre est de la famille du dodécaèdre et non de celle du cube. La famille du dodécaèdre participe aussi de façon enharmonique avec la famille du tétraèdre! Tout à coup, les adoucis ne me semblaient plus si désagréables. Ils avaient permis de compléter la famille du tétraèdre. Le schéma était complet.

Nous avons, à présent, trois familles de polyèdres totalement symétriques. Chaque famille a le même nombre d'éléments que les deux autres, accomplissant les mêmes fonctions dans chacune d'elles. En commençant par l'égale partition de la sphère par les grands cercles, avec trois, quatre et six cercles; chaque famille possède un polyèdre directement calqué sur les intersections des grands cercles. Chaque famille comprend deux solides platoniciens qui sont les complémentaires l'un de l'autre, et dont les faces sont présentes dans le précédent polyèdre. Il existe une version tronquée de chaque solide platonicien, une version rhombique de la figure de grands cercles, une version tronquée de la figure de grands cercles, et un polyèdre adouci tournant à gauche et un autre tournant à droite. La famille du tétraèdre est connectée avec trois polyèdres de la famille du cuboctaèdre et avec un polyèdre de la famille de l'icosidodécaèdre, et chacun de ces liens crée une relation « enharmonique » entre les familles.

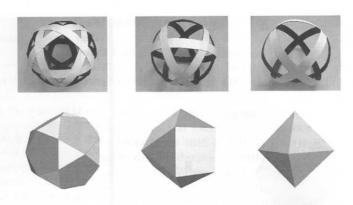
C'est un jalon qui venait d'être construit, mais je n'avais pas encore terminé. Je prévoyais une grosse charge de travail supplémentaire pour déterminer de quelle manière ranger les familles pour que soit visibles à la fois les symétries et les interconnexions. Cela représentait une mise à jour plus précise de mon affiche.

Le problème qui fit surface peu après, fut que chaque solide archimédien possède un complémentaire. Comment les intégrer eux aussi dans le schéma?

Apparut un autre gros problème: à l'évidence, le compositeur de l'univers n'avait pas coupé les sommets du cube avec un couteau pour en faire un cube tronqué. Comment les grands cercles pouvaient-ils participer directement à la construction des solides archimédiens et platoniciens pour résoudre cette question ?

QUAND LES SOLIDES ARCHIMÉDIENS SE REJOIGNENT

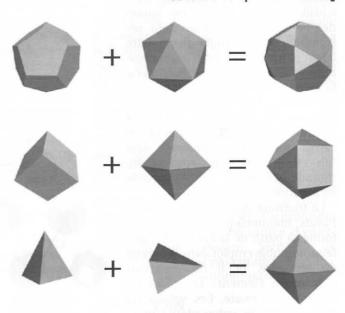
Nous avons commencé selon l'hypothèse que l'espace n'est pas juste un échiquier sans fin. En enquêtant sur les limites de l'espace visible, nous avons débuté par les solides platoniciens qui représentent symboliquement les formes déterminées par la création, et nous avons



Les divisions égales des grands cercles
L'illustration claire du principe de moindre action
(égale partition de la sphère) apparaît
dans ce fourre-tout composé de deux solides
archimédiens et d'un solide platonicien.

Figure 25 Les figures des grands cercles et leurs complémentaires

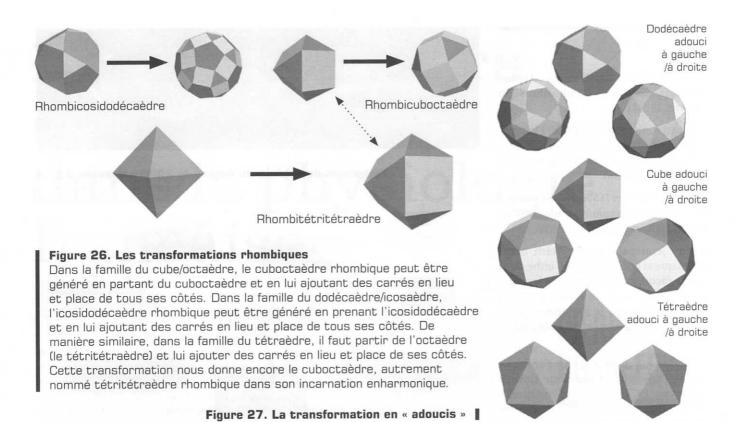
Figure 24



façonné trois familles de polyèdres symétriques et ordonnées, chacune contenant des solides platoniciens et archimédiens.

Les familles du cuboctaèdre et du tétraèdre sont connectées par le partage de trois polyèdres de formes enharmoniques. Ces polyèdres semblent identiques, mais leur genèse et leur usage les rendent différents. De même, un membre de la famille de l'icosidodécaèdre est aussi partagé « enharmoniquement » avec la famille du tétraèdre. Par contre, il n'existe pas de lien entre les familles du cuboctaèdre et de l'icosidodécaèdre, alors que ces deux familles sont en relation avec la famille du tétraèdre.

La signification de cet arrangement remonte à l'appréciation très ancienne de l'unicité des solides platoniciens. La limite édifiée dans l'univers se manifeste par le fait que l'on ne peut construire que cinq formes qui se conforment aux restrictions qui définissent les solides platoniciens. La même limite restreint le nombre de combinaisons existant pour que les grands cercles se divisent l'un l'autre d'une manière identique. Il n'y a que trois façons de le faire. Une fois reconnue la manière dont les familles s'interpénètrent, on réalise que l'on regarde trois familles symétriques, qui



contiennent trois paires de solides platoniciens, générées par les trois jeux de sphères aux grands cercles 7.

Après avoir entièrement reconstruit tous les solides platoniciens et archimédiens avec un code de couleur pour chaque fonction des faces, j'ai développé une pédagogie qui permettrait à des personnes de visualiser à la fois la symétrie des familles et la manière dont elles s'interconnectent. J'ai ainsi choisi ma palette de couleur en fonction des types de faces partageant les mêmes orientations et fonctions.

Type de face	Couleur
Face de type « Cube »	Vert
Face de type « Octaèdre »	Jaune
Face de type « Tétraèdre »	Rouge
Face de type « Tétraèdre complémentaire »	Orange
Face de type « Dodécaèdre »	Bleu foncé
Face de type « Icosaèdre »	Bleu clair
Face générée sur les intersections des grands cercles	Blanc, noir ou gris suivant le nombre de faces de leur complé- mentaire Archimédien

Une telle palette permet de montrer les symétries des familles d'une manière brillante, mais ne permet pas de montrer les liens entre les familles autrement que par l'imagination. Ma première tentative pour visualiser les liens entre les familles se présenta sous la forme d'un modèle de molécule, une molécule bien étrange s'il en est! (**Figure 28**). Un anneau de six sphères représentait les membres de chaque famille. Ces sphères représentaient les solides platoniciens, l'ensemble des solides platoniciens tronqués, les solides des grands cercles, les solides des grands cercles rhombiques, les solides platoniciens adoucis, tout cela autour du modèle de grands cercles correspondant. Quant aux figures adoucies, une queue pendait à l'un des solides.

J'ai réalisé trois jeux complets de ces systèmes à partir de boules de polystyrène et de cure dents. Il est possible de positionner tout cela de telle sorte que les familles soient jointes par les connexions faites par les solides enharmoniques, avec l'octaèdre touchant le tétritétraèdre, le cuboctaèdre touchant le tétritétraèdre rhombique, l'octaèdre tronqué touchant le tétritétraèdre tronqué et finalement l'icosaèdre touchant le tétritétraèdre adouci.

Je l'ai fait, mais la construction était fragile et difficilement compréhensible! Cela ne correspondait pas à
ce que je voulais. La beauté absolue des grands cercles
sur la sphère: les chemins de moindres actions sur
une surface de moindre action, se divisant également
pour créer d'une manière symétrique les familles de
polyèdres et qui, se croisant de façon ironique, nous offre
le type de certitude, cachée, qu'on ne trouve que dans
une métaphore et qui est certainement la seule façon
de dire la vérité. Cette vérité représente l'image visible
des limites cachées placées dans l'espace physique par
la force créatrice de l'univers. Je ne pensais pas que des
boules de polystyrène soient la meilleure manière de le
démontrer. Puis j'eus une idée: et si je présentais l'ironie
d'une manière ironique...

NOTES

- 1. Max Casper (1880-1956), *Kepler*, (Mineola, New York: Pulications du Douvre. 1993) p380.
- 2. Edwin A.Abbot (1839-1926), Flatland, *A Romance of many Dimensions*, illustré parl'auteur, http://www.geom.uiuc.edu/>blanchoff/Flatland.
- 3. Johannes Kepler (1571-1630) *L'étrenne* ou la neige sexangulaire, traduction de Robert Halleux (CNRS Vrin Paris).
- 4. Mon jeune ami Jacob Welsh m'indiqua que si l'on travaille un cube de la bonne façon, pour obtenir des faces en forme de diamant, la forme remplira elle aussi l'espace. Je maintiens qu'un cube travaillé demeure un cube, ainsi, le débat reste ouvert.
- 5. Magnus J Wenninger, *Polyedron Models* (New York: Cambridge University press, 1971) pp 12-13. Wenninger donne quelques notes brèves sur les techniques de construction que j'ai suivi scrupuleusement, bien qu'au début, j'utilisai du scotch transparent très large pour couvrir chacune des faces puis je les assemblai l'une avec l'autre.
- 6. Lyndon H. LaRouche, Jr. On the Subject of Metaphor, Fidelio, Vol.1, $N^{\circ}3$.
- 7. Trois familles symétriques; trois paires de solides platoniciens; trois jeu de sphères à grands cercles: pourquoi dans chacun de ces cas, il en y a trois? Lorsque l'on dit que le cube a 6 faces, il ne s'agit pas de «6» dans la ronde des nombresmais que les 6 faces sont orientés d'une certaine manière: haut, bas, droite, gauche, devant, derrière. Ce 6, n'est pas un nombre mort, c'est le processus qui permet d'aller d'un endroit à un autre. Il est impossible d'avoir ces notions de direction sans une référence telle que le cube. En fait, la structure de l'univers, à laquelle nous nous intéressons ici, détermine la position et la forme de ces 6 faces et la raison pour laquelle elles sont uniques. De la même façon, les trois familles de polyèdres archimédiens ne sont pas « trois » comme quand on dit « trois ». Le passé n'est pas le futur, et ne comporte certainement pas de ressemblance topographique avec le présent. Passé, présent, futur, toute l'existence est façonnée par cette idée de trois, mais ce n'est pas juste un « trois ».



Sculptures de sphériques datant de 2000 ans avant J.C.

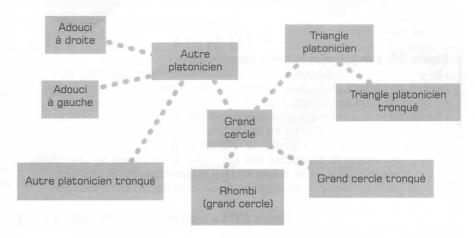


Figure 28. Les relations entre les familles de polyèdres Voici une façon de se représenter les relations entre les différentes familles de polyèdres.

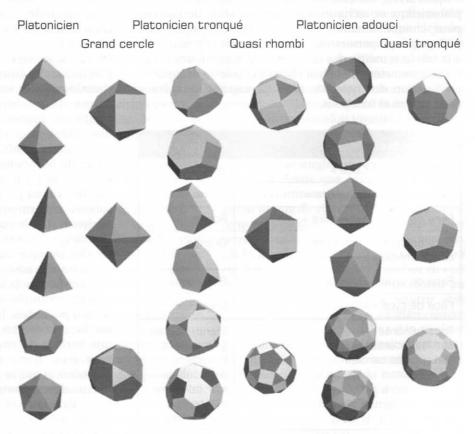


Figure 29. Le jeu complet des solides archimédiens

Voici une façon de se représenter les relations entre les différentes familles de polyèdres.

Vous pouvez adresser vos remarques à **menuet.daniel2@wanadoo.fr** qui transmettra le cas échéant à l'auteur américain.