# Les polyèdres archimédiens
# Le chaînon manquant

## 1ère Partie

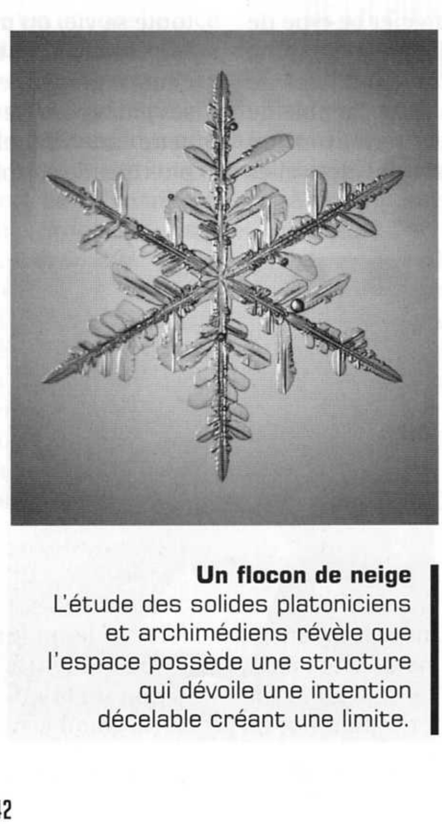
*« La Géométrie est une et éternelle, une réflexion de l'esprit de Dieu. Que l'humanité s'intéresse à la géométrie vient de ce que l'homme est à l'image de Dieu. »*

Johannes Kepler [1]

HAL VAUGHAN

Conservons à l'esprit cette citation (**Figures 1 et 2**). Nous allons développer à travers une analyse des solides platoniciens et archimédiens une approche des limites qui contraignent l'espace physique. Je prétends que l'existence des limites, démontrées par la construction des solides platoniciens, ne peut être complètement appréhendée sans prendre aussi en compte les polyèdres archimédiens. Cette démarche n'occulte en rien les études antérieures ayant pour socle les découvertes de Carl Gauss ou Bernard Riemann, mais permet de remplir un vide évident dans la pédagogie existante. Les polyèdres archimédiens sont en grande partie une zone d'étude inexplorée, et sur cette base, mon sous-titre est souligné pour que tous puissent découvrir le « chaînon manquant ». Tout au long de cet article, nous construirons ensemble l'équivalent géométrique d'une boite à outil imaginaire qui comprendra deux collections d'outils. La première, réalisée à partir de la surface de trois sphères, se conçoit quelque part « à l'intérieur » des sphères. La seconde est conçue en deux dimensions bien qu'elle soit développée à partir d'une matrice en trois dimensions. Je n'ai rien inventé ici, ces outils existent depuis des décennies pour certains, d'autres remontent à quelques millénaires, à l'aube de la civilisation (Voir www.georgehart.com/virtual-polyedra/art.html). Ces outils n'ont jamais été utilisés suivant la méthode présentée, ce qui leur procure une fonction nouvelle qui pourra servir dans la poursuite d'une démarche intellectuelle sur ce sujet.

**Il y a plus dans la structure de l'espace que ce que nous laisse voir nos yeux. Nous le verrons dans cette aventure géométrique qui nous conduira aux limites de notre univers.**



**Un flocon de neige**
L'étude des solides platoniciens et archimédiens révèle que l'espace possède une structure qui dévoile une intention décelable créant une limite.

### POURQUOI DES POLYÈDRES ARCHIMÉDIENS ?

L'étude des solides platoniciens révèle que l'espace n'est pas un échiquier sans fin. Il a une structure dévoilant une intention que l'on peut découvrir et qui crée une limite.

Il existe cinq formes, et seulement cinq, de polyèdres convexes possédants des faces régulières congruentes et dont les angles aux sommets, ainsi que la longueur des cotés, sont égaux : les solides platoniciens (**Figure 3**). Il n'est possible de fabriquer que ces cinq formes en prenant en compte ces contraintes d'égalités et ainsi déceler une limite physique. Si l'on essaie de fabriquer d'autres solides réguliers, par exemple en prenant six triangles ou quatre carrés se rejoignant au même sommet, il est impossible d'obtenir un solide, même en y mettant beaucoup d'ardeur. Le grand projet de produire des polyèdres réguliers prend fin au terme de cinq réussites, c'est dire s'il y a plus dans l'univers que ne peut en dévoiler notre vision. Il existe quelque chose dans la formation de tout ce que l'on voit qui diffère de ce que l'on voit. Voilà où réside l'importance des solides platoniciens. Ils sont la preuve que nous ne connaissons pas ce que nous voyons.

L'unicité des solides platoniciens prouve que nous ne vivons pas du tout sur un échiquier sans limite, mais plutôt dans un bocal à poissons. Les limites sont réelles. Mais la plupart des gens passent leur temps à observer les cailloux et les bulles, ou font une partie d'échecs sur un échiquier inexistant en se demandant dans combien de temps ils vont manger.

Pour ma part, j'ai souhaité connaître la forme de notre bocal. Déterminer le rapport entre les solides platoniciens et cette limite, et comment cela fonctionne. L'univers visible est-il lancé à travers l'infini comme un bateau sur l'océan ? Dans

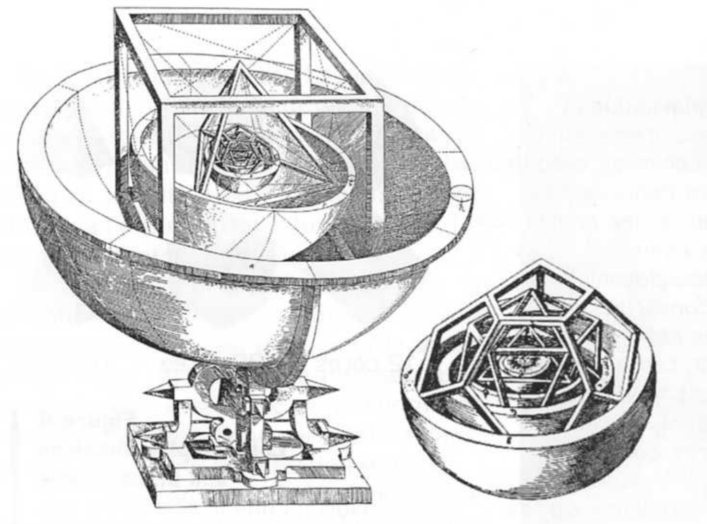


**Figure 1**
**Ordonnancement des planètes de Kepler**
Johannes Kepler (1571-1630), qui a découvert le principe de la gravitation au cours de ses recherches sur les mouvements des planètes dans le système solaire, vit une cohérence entre l'ordonnancement harmonique des planètes sur leurs orbites et l'ordonnancement harmonique des solides platoniciens imbriqués.
La gravure extraite du Mysterium Cosmographicum, représente la manière dont Kepler a déterminé les orbites des planètes. L'ordonnancement part du centre vers l'extérieur, il débute avec Mercure et suit cet ordre : octaèdre, icosaèdre, dodécaèdre (dont la sphère inscrite est la Terre, et la sphère circonscrite est Mars), tétraèdre et cube.

ce cas, les polyèdres réguliers en sont-ils le sillage ? La variété discrète se jette-elle contre la variété continue comme une particule subatomique dans un cyclotron ?

Depuis dix ans, j'observe les solides platoniciens, espérant qu'ils me renseigneront sur la structure de l'univers. J'ai mis des cubes dans des dodécaèdres, des tétraèdres dans des cubes, des octaèdres dans des tétraèdres ; j'ai rassemblé les complémentaires (**Figure 4**), étoilé ce qui pouvait être étoilé, découpé des cubes et des tétraèdres pour voir ce qu'ils avaient dans le ventre. Aucun de ces « interrogatoires » n'a abouti, les solides platoniciens ne voulaient rien me dire.

Je connaissais les solides archimédiens, mais je ne voulais rien avoir à faire avec eux. D'un côté j'avais les cinq jolis solides platoniciens, de l'autre les treize solides archimédiens, ce qui, déjà était assez suspect. De plus, comme l'avait démontré Képler, il existait une infinité de prismes archimédiens et une autre infinité d'anti-prismes archimédiens. Et pour couronner le tout, les archimédiens, les prismes et les anti-prismes possèdaient tous des complémentaires, et ils n'étaient pas non plus complémentaires entre eux comme nos bons vieux solides platoniciens ! Chacun des treize solides archimédiens possèdaient un complémentaire qui n'est pas un solide archimédien, et tous les prismes et anti-prismes avaient eux aussi des complémentaires uniques qui ne font pas partie de leur famille (**Figures 5 et 6**). Il était donc question de quatre groupes infinis et de treize couples d'archimédiens. Cela faisait beaucoup trop pour ma petite personne, les archimédiens n'étaient pas pour moi ; les cinq solides platoniciens faisait bien l'affaire et ils étaient à ma portée.

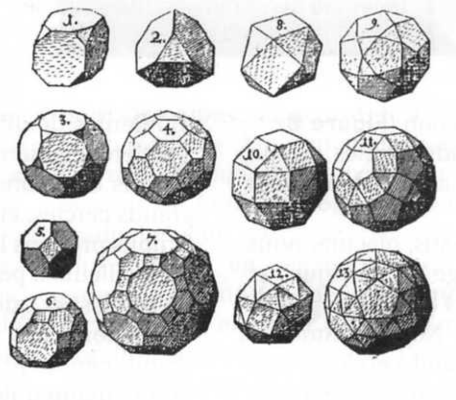



**Figure 2**
**Les solides archimédiens**
Kepler a fait des études approfondies sur les polyèdres, et réalisa ces dessins des solides archimédiens, qui font partie de sa boîte à outils géométrique.

## LES SPHÈRES PROVOQUÈRENT MA CHUTE

Vous pouvez aisément constater que les sommets de chaque solide platonicien peuvent toucher l'intérieur d'une sphère, on dit qu'ils sont inscrits dans une sphère (la sphère circonscrite). Le centre de chacune de leurs faces est aussi en contact avec une autre sphère, et le milieu de leurs arêtes également. Une sphère différente peut être en contact avec chacun de ces endroits sur chacun des cinq polyèdres, cela provient de la régularité des solides platoniciens. Les sphères sont importantes parce qu'elles représentent le principe de moindre action dans l'espace, elles possèdent le plus grand volume pour la plus faible surface (comme le fait le cercle dans le plan, avec la plus grande surface pour le plus petit périmètre).

Les sphères représentent l'origine de la limite que l'on rencontre lorsque l'on tente de fabriquer plus de cinq solides platoniciens. La sphère est le plus haut niveau d'expression du principe de moindre action que nous puissions appréhender par nos seuls sens. Les arêtes d'un solide platonicien ne définissent pas forcément une sphère, mais la sphère (ou la nature de l'espace qui confère à la sphère son unicité) est la limite des solides platoniciens. C'est vraisemblable, car si nous sommes attentifs, les sphères sont ce à quoi ressemble la limite.

C'est là une partie importante de l'étude de la géométrie. Comment s'exprime l'infini dans notre univers visible ? Où le domaine complexe rencontre-t-il notre domaine ? C'est difficile à voir. Si quelqu'un vivant au « pays plat »[2] regarde un cercle il n'y voit qu'un segment de droite ; il n'a pas idée de la sphère qui a produit le cercle (qui lui apparaît sous la forme d'un segment de droite) de par ses limitations sensorielles. Nous n'avons rien à lui envier lorsque nous tentons de regarder des sphères. Sans la bonne projection, elles nous apparaissent comme des cercles.

Sur une sphère, une ligne droite est un cercle, la plus longue ligne droite sur une sphère est un grand cercle dont le centre est celui de la sphère, comme l'équateur de la Terre. Puisque nous parlons de géométrie (géo = terre, métrie = mesure), regardons un globe terrestre (**Figure 7**). Les grands cercles expliquent pourquoi Charles Lindbergh, dans son trajet de New York à Paris, vola au-dessus de l'Irlande. Il n'y a pas de ligne droite parallèle sur une sphère. Deux grands cercles quelconques se croisent l'un l'autre, non pas une fois, mais deux fois sur des points exactement opposés.

Vous pouvez faire un joli tour avec le principe de moindre action sur la sphère. Si vous coupez un grand cercle par un autre grand cercle, ils se coupent chacun en deux parties