Le Géoïde de Gauss

Les origines de la géométrie différentielle

BRUCE DIRECTOR

Cinquante deux ans après sa dissertation sur le théorème fondamental de l'Algèbre de 1799, Carl Friedrich Gauss se vit soumettre par son élève Bernard Riemann une dissertation doctorale tout aussi révolutionnaire, qui étendait sa découverte initiale vers un domaine nouveau et d'ordre supérieur.

La thèse de Riemann, intitulée « Fondements d'une théorie générale des fonctions d'une seule grandeur variable complexe », basées sur les travaux de Gauss, établit une généralisation des principes de la géométrie physique différentielle lancée par Kepler 250 ans plus tôt.

Mais avant de plonger dans les travaux de Riemann (ce que nous nous réservons de faire dans un article ultérieur), nous allons nous concentrer ici sur trois découvertes exemplaires de principes physiques qui, prises dans leur ensemble, tracent le développement historique des idées menant aux résultats obtenus par Riemann : 1) les principes de Kepler sur le mouvement des planètes ; 2) la découverte par Leibniz et Bernoulli du principe de la chaînette et ; 3) les travaux de Gauss sur la géodésie.

Les trois découvertes, malgré leur diversité, sont, en fait étroitement reliées. Elles se rapportent toutes, d'une manière ou d'une autre, aux recherches sur la nature de la gravitation et constituent, lorsqu'elles sont mises ensembles, une succession de concepts de généralisation et de puissance croissante.

Revenons brièvement sur Kepler. Considérés dans leur ensemble, du *Mysterium Cosmographicum* à l'*Harmonice Mundi*, les travaux de Kepler démontrent que l'action gouvernant n'importe quelle planète à tout moment est régie par un principe qui organise le Système solaire dans son ensemble : le principe de gravitation universelle. Kepler découvrit que ce principe a une caractéristique harmonique qui détermine la nature elliptique, et non circulaire, des orbites. La forme unique de chaque orbite elliptique individuelle est déterminée non pas par la planète en tant que telle, ni par une interaction biunivoque entre la planète et le Soleil, mais par une relation harmonique entre les vitesses minimales et maximales de toutes les planètes. En d'autres termes, l'action de la planète à tout moment est déterminée par ces extrêmes, entre lesquel, pour ainsi dire, elle est « suspendue ». Les grandeurs associées à ces « points de suspension » ne sont pas arbitraires, mais sont conformes, considérées ensemble, à l'ordonnancement harmonique de la gamme musicale.

L'excentricité des orbites planétaires posait un défi à Kepler car il ne disposait d'aucun outil mathématique lui permettant de calculer la position exacte, la direction et la vitesse de chaque planète à tout moment. Kepler demanda alors que l'on invente une forme nouvelle de mathématique. Il précisa qu'un tel outil mathématique devrait être capable de calculer comment le principe harmonique déterminant les vitesses extrêmes des planètes s'exprime sur l'ensemble de l'orbite, et en posa même les premiers pierres. (Voir Fusion n° 97, *Kepler et la découverte de la fonction régissant le système solaire*.)

Leibniz et son collaborateur, Jean Bernoulli, répondirent à la demande de Kepler en développant le calcul différentiel, comme leur effort commun sur la chaînette l'illustre si bien. Tout d'abord, le principe de la chaînette est similaire à celui de l'orbite planétaire, dans le sens où la forme de la courbe semble déterminée par la position des points auxquels la chaîne est suspendue. Lorsque la position de ces points varie la chaînette se réoriente d'elle-même, de façon à garder une forme de la même nature. De ce point de vue, la relation entre ces points de suspension et les autres points de la chaînette semble analogue à celle existant entre les vitesses extrêmes d'une planète et les autres points de son orbite. Mais comme Bernoulli le montra dans son livre sur le calcul différentiel, tous les points de la chaînette, à l'exception de celui situé tout en bas, sont, à tout moment, des points de suspension. (Voir *Fusion* N° 100, *Pourquoi l'espace n'est pas euclidien : l'exemple de la chaînette*.)[1] Ceci est en fait une inversion du principe exprimé par les orbites de Kepler. Dans le cas d'une planète, l'orbite « pend » entre ses deux extrêmes (aphélie et périhélie). Pour la chaînette, l'extrême, qui est le point le plus bas, est celui à partir duquel rien ne pend. Bernoulli détermina, à l'aide du calcul de Leibniz, que la chaînette se développe à partir de son point le plus bas.

Leibniz démontra ensuite que ce principe physique reflétait la caractéristique exprimée par une fonction logarithmique (exponentielle). La chaînette est caractérisée par le même principe transcendantal qui sous-tend l'engendrement des puissances algébriques et qui se manifeste dans d'autres processus physiques tels que la croissance biologique et la gamme musicale. Il démontrera donc que les caractéristiques de la fonction logarithmique (exponentielle) sont l'expression d'un principe physique, et non pas mathématique.

LES TRAVAUX DE GAUSS SUR LA GÉODÉSIE

Comparons ces exemples à la découverte du géoïde par Gauss. (Voir encadré.) De 1818 à 1832, Gauss effectua un relevé topographique du Royaume de Hanovre. Il fallait pour cela déterminer les distances le long de la surface terrestre, en disposant des triangles et en mesurant les angles formés par les côtés constituant la « ligne de vision ». Le paradoxe auquel Gauss se trouva confronté fut que la relation entre la longueur des côtés des triangles et leurs angles, est déterminée par la forme de la Terre, tandis que la forme de la Terre ne pouvait être connue avant que les mesures ne soient effectuées.[2] Le problème se trouvait compliqué par le fait que toutes les mesures étaient effectuées selon la direction de la gravité, elle-même obtenue à l'aide d'un fil à plomb. Comme pour la relation entre les angles d'un triangle et la longueur de ses côtés, la direction de la gravité dépend de la forme de la Terre ! Par exemple, si la Terre avait une forme sphérique, le fil à plomb pointerait toujours vers son centre. Mais si la Terre avait une forme ellipsoïdale, il pointerait vers des endroits différents, selon l'emplacement à partir duquel on effectue la mesure à la surface. Gauss montra que le problème était encore compliqué, par la forme très irrégulière de la Terre.

Gauss se trouvait confronté exactement au même type de problème que Kepler et Leibniz avant lui : les mathématiques existantes étaient incapables de mesurer une telle forme irrégulière. Toutes les approches antérieures partaient d'un *a priori* sur la forme de la Terre, conforme aux connaissances mathématiques du moment. (Ceci nous rappelle l'insistance de Galilée, pour qui la chaînette devait être une parabole parce que c'était la forme à laquelle elle ressemblait le plus parmi les courbes mathématiques connues à l'époque. Mais la chaînette refusait obstinément de se conformer aux manuels préférés de Galilée.) Gauss abandonna tout tentative de faire rentrer la Terre dans une forme prédéterminée, déclarant que la forme de la Terre était celle qui était partout perpendiculaire à la direction de la gravité. Autrement dit, plutôt que de présumer l'existence d'une forme imaginaire, et de mesurer la Terre réelle en tant que déviation par rapport à la forme imaginaire, Gauss rejeta complètement le monde des fantaisies. La forme physique mesurée par Gauss est connue depuis comme le Géoïde.

Même si le géoïde est une surface irrégulière, sa forme est « accordée », pour ainsi dire, au mouvement de la Terre sur son axe. Comme pour l'orbite planétaire ou la chaînette, le mouvement détermine ici aussi l'emplacement de deux « points de suspension », en l'occurrence les pôles nord et sud, le « géoïde est suspendu ». Toutefois, le géoïde étant une surface, la relation qu'il entretient avec ses pôles est différente de celle existant entre l'orbite planétaire et ses deux extrêmes, ou celle existant entre la chaînette et son point le plus bas. Les deux dernières expriment l'interaction entre des singularités et une action le long d'une courbe. La première exprime l'interaction entre des singularités et une action sur une surface, à partir de laquelle est dérivée une action le long d'une courbe .

Carl Friedrich Gauss.

Le problème auquel Gauss se trouvait confronté était que, puisque les triangles physiques qu'il avait mesurés sur la surface du géoïde étaient irréguliers, comment les longueurs de leurs côtés pouvaient-elles être déterminées à partir des angles, sans que l'on connaisse au préalable la relation entre les côtés et les angles ou, ce qui revient au même, la forme de la surface ? Pour résoudre le problème, Gauss reconnut que puisque toutes les mesures étaient des angles, il pouvait se libérer de toute présupposition concernant la forme de la Terre, s'il pouvait projeter ces angles d'une surface sur une autre, depuis le géoïde, par exemple, vers un ellipsoïde, ou bien une sphère, et vice-versa. Comme Kepler et Leibniz avant lui, Gauss ne pouvait pas accomplir cette tâche avec les outils mathématiques alors à sa disposition. Il inventa par conséquent une nouvelle mathématique.

Gauss décrit les débuts de sa nouvelle mathématique à plusieurs endroits, mais plus particulièrement dans son mémoire de 1822 sur les projections conformes, pour lequel il reçut un prix de la Société Royale des Sciences de Copenhague. Riemann s'inspira fortement de ce travail pour jeter les fondements de sa propre dissertation doctorale.

La « projection conforme » est un terme inventé par Gauss. Il fait référence à des transformations d'une surface vers une autre, pour lesquelles les angles entre les courbes sont préservés. Dans son mémoire, Gauss décrit les projections conformes comme étant des transformations où *« les longueurs des lignes indéfiniment courtes tirées à partir d'un point quelconque sur la deuxième surface sont proportionnelles aux longueurs des lignes correspondantes sur la première surface et, deuxièmement, tout angle formé par deux lignes intersectées sur la première surface est égal à l'angle formé par les lignes correspondantes sur la seconde*

Le Géoïde de Gauss

Entre 1818 et 1832, Gauss entreprit le relevé topographique géodésique du Royaume de Hanovre. Cette tâche était l'exemple même d'un grand projet. Sa mise en œuvre présentait des difficultés technologiques majeures, qui ne pouvaient être vaincues que par le développement de nouvelles technologies basées sur des principes scientifiques nouveaux. Un succès dans cette entreprise devait toutefois permettre de jeter les bases d'une transformation, par le développement économique, de l'univers physique. Mais peut-être encore plus important pour Gauss, était que cette entreprise lui donnerait l'opportunité de faire de la science à nouveau, c'est-à-dire qu'elle lui permettrait de démontrer que ce que tout le monde croyait connaître de l'univers était faux.

Pendant ces relevés, Gauss conduit l'expérience cruciale suivante : il mesura l'angle formé par l'étoile polaire par rapport à l'horizon, à partir de son observatoire à Goettingen. Son collaborateur, Schumacher, mesura le même angle à partir de son observatoire à Altona, situé sur le même méridien que Goettingen. De la différence entre ces deux mesures angulaires, Gauss calcula la distance le long de la surface terrestre entre ces deux observatoires.

Ensuite, avec beaucoup d'effort, Gauss construisit une grille triangulaire couvrant l'ensemble du Royaume de Hanovre. Gauss utilisa ces triangles pour calculer une seconde fois les distances le long de la surface de la Terre entre ces deux observatoires. La différence entre les deux modes de calcul était de 16 secondes d'arc de cercle. Une erreur somme toute faible, selon les normes utilisées aujourd'hui par les soixante-huitards, particulièrement lorsqu'elle est comparée aux fréquentes révisions (souvent à la baisse) des économistes concernant la croissance, l'évolution des bourses et les bilans d'entreprises. (C'est pourquoi les soixante-huitards aiment le consensus. Tout le monde peut changer d'opinion en même temps, de façon à ce que personne ne soit embarrassé lorsque l'opinion dominante s'avère être fausse.)

Pour Gauss pourtant, une différence de 16 secondes d'arc de cercle, tout comme la différence de 8 minutes à laquelle Kepler se trouva confronté en son temps, représentait l'occasion de démontrer que la manière de penser de la majorité des gens était fausse. Non pas que ce que les gens pensaient était faux mais, plus important encore, que leur manière de penser était fausse. (Une caractéristique du génie est d'être capable de reconnaître quand une petite différence est une question de principe et pas une simple erreur.)

Ce que Gauss arriva à démontrer à partir de ces 16 secondes d'arc, comme le firent Kepler, Fermat et Leibniz avant lui, c'est que l'esprit humain doit être libre de tout *a priori*, ou de tout préjugé de « tour d'ivoire », tels les axiomes, postulats et définitions de la géométrie euclidienne. Pas simplement libre des axiomes, postulats et définitions d'Euclide en tant quel tels, mais libre de tout *a priori.*

Revenons maintenant sur la tâche entreprise par Gauss et déterrons les présupposés. Premièrement, l'angle que forme l'étoile polaire avec l'horizon, est mesuré à partir de … l'horizon. Mais, qu'est-ce que l'horizon ? Celui-ci n'est pas déterminé mathématiquement mais plutôt physiquement, par la perpendiculaire à la gravité, telle qu'elle est mesurée avec un niveau de menuisier ou un fil de plomb. Un horizon défini de cette façon sera tangent à la surface de la Terre à l'endroit ou la mesure est effectuée. Par conséquent, la direction de la gravité est elle-même une fonction de la forme de la Terre. Pour calculer une distance le long de la surface terrestre à partir de

---

surface.» Pour vous faire une idée de ce que cela signifie, faites l'expérience suivante : prenez un hémisphère de plastique transparent et dessinez un triangle sphérique, avec des lignes noires bien épaisses. Rendez-vous dans une pièce très sombre et, en utilisant une lampe de poche, projetez le triangle sur un mur. Si vous tenez la lampe de poche au centre de l'hémisphère, les lignes courbes formant le triangle sphérique seront transformées en lignes droites. Si vous déplacez la lampe de poche du centre vers un pôle de l'hémisphère (vers le côté, le long d'un rayon imaginaire), les lignes droites sur le mur de projection deviendront courbes à nouveau, et les angles se trouvant entre elles seront égaux aux angles entre les côtés du triangle sphérique original sur l'hémisphère. Afin de découvrir, par l'expérience, la différence entre ces deux projections, collez des cercles en carton de différentes tailles sur l'hémisphère. (La taille de ces cercles devrait varier fortement.) Refaites maintenant, avec la lampe de poche, la même projection que précedemment. Lorsque la lampe de poche est au centre de l'hémisphère, les projections des cercles donnent des ellipses. Lorsque la lampe de poche est déplacée vers l'un des pôles de l'hémisphère, les projections des cercles sont plus rondes, et ce, d'autant plus que les cercles sont petits. Dans le premier cas, la transformation du cercle en ellipse indique que la proportion par laquelle les figures sont transformées change selon la direction de la transformation par rapport au pôle. Le second cas montre que les transformations sont proportionnelles dans toutes les directions.

Ainsi, la projection conforme d'une surface sur une autre implique un changement dans la rotation et l'étendue. Après avoir travaillé l'essai de Gauss sur le théorème fondamental de l'algèbre (celui de 1799), vous devriez être capables de reconnaître, comme Gauss, que ce type de changement ne peut être représenté que dans le domaine complexe. (Voir *Fusion* n° 95, *Le Théorème de l'algèbre de Carl Gauss.*)

PUISSANCE ET COURBURE

Dans sa dissertation de 1854, Bernhard Riemann fit référence à la tâche permettant de lever le voile d'obscurité qui s'est abattu sur la science depuis plus de 2000 ans. « *Depuis Euclide jusqu'à Legendre, pour ne citer que le plus illustre des réformateurs modernes de la géométrie, personne, parmi les mathématiciens ni parmi les philo-*

cette variation angulaire, on doit supposer *a priori* ce que doit être la forme de la Terre : si elle est de forme sphérique, la mesure se fera le long d'un cercle ; si elle est de forme ellipsoïdale, la mesure se fera le long d'une ellipse. (Dessinez un cercle et une ellipse, puis des tangentes à différents endroits. Dessinez ensuite les perpendiculaires aux points de tangence. Dans quelle direction les perpendiculaires pointent-elles ? Sur un cercle, elles pointent vers le centre. Sur une ellipse, ce n'est pas le cas.)

De le même manière, les calculs effectués à partir de mesures triangulaires dépendent de la forme sur laquelle les triangles sont situés. (Comparez des triangles tracés sur une sphère à d'autres tracés sur un ellipsoïde ou une forme irrégulière comme une pastèque.)

Peut-on par conséquent trouver deux formes pour lesquelles les méthodes de mesure seraient concordantes ?

Gauss a rejeté toute forme de pensée cherchant à ajuster la réalité à une courbe prédéterminée et fit une découverte révolutionnaire, que la forme de la Terre est celle qui est partout perpendiculaire à la direction de la gravité, une forme que nous appelons aujourd'hui « géoïde ». La géoïde n'est pas une forme géométrique, elle est déterminée par un processus physique. Une telle forme est non seulement non-uniforme, mais en plus irrégulière, changeant même avec le temps.

Une telle surface irrégulière et non-uniforme, comme les orbites de Kepler, ou le trajet de moindre-temps parcouru par les rayons de lumière réfractés de Fermat, ou encore la chaînette de Leibniz et Bernouilli, existaient bien d'un point de vue physique mais ne pouvaient être reconnus par les mathématiques généralement acceptées à l'époque. Ayant déjà été provoqué par son professeur, Abraham Kaestner, Gauss avait depuis bien

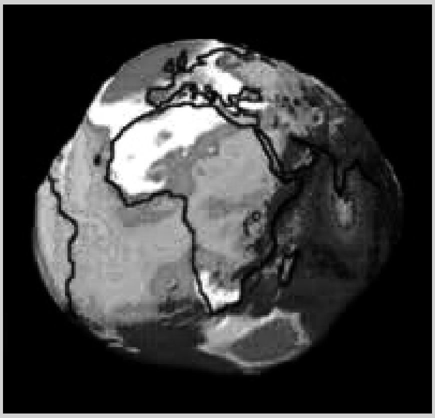


Figure 1.
Une représentation du géoïde de Gauss.

longtemps refusé de laisser ce type de mathématique dicter sa manière de pensée. Il inventa plutôt, comme Leibniz avant lui, une nouvelle mathématique. Cette extension du calcul différentiel de Leibniz ne reposait pas sur des présupposés *a priori* sur la forme, mais était plutôt une mathématique de transformations. Tout comme Leibniz, dont le calcul faisait de la position le long d'une courbe une fonction de transformations, Gauss, et plus tard Riemann, firent de la forme une fonction de transformations et des courbes une fonction de la forme. Le changement déterminant la position le long d'une courbe est lui-même déterminé par la transformation qui a généré la surface. Cette nouvelle mathématique exigeait toutefois un nouveau type de nombres, les nombres complexes.

La méthode suivie par Gauss pour inventer cette nouvelle mathématique tire son origine de Nicolas de Cues, auquel Kaestner accorda une grande importance dans son *Histoire des mathématiques*. Dans *De Ludo Golbi*, de Cues écrit :

« Et l'esprit invente des branches du savoir telles que l'arithmétique, la géométrie, la musique et l'astronomie, et reconnaît qu'elles sont enchâssées dans ses capacités ; car elles sont inventées, puis déployées, par l'homme… C'est seulement dans l'âme rationnelle et dans ses capacités que sont enchâssées les branches mathématiques du savoir ; et c'est par ses seules capacités qu'elles peuvent être extirpées et déployées. [Cela est vrai] à tel point que si l'âme rationnelle n'existait pas, ces branches du savoir ne pourraient en aucune façon exister. »

sophes, n'est parvenu à éclaircir ce mystère. La raison en est que le concept général des grandeurs de dimension multiples, comprenant comme cas particulier les grandeurs étendues, n'a jamais été l'objet d'aucune étude. En conséquence, je me suis posé d'abord le problème de construire, en partant du concept général de grandeur, le concept d'une grandeur de dimensions multiples. Il ressortira de là qu'une grandeur de dimensions multiples est susceptible de différents rapports métriques, et que l'espace n'est par suite qu'un cas particulier d'une grandeur de trois dimensions. Or, il s'ensuit de là nécessairement que les propositions de la géométrie ne peuvent se déduire des concepts généraux de grandeur, mais que les propriétés, par lesquelles l'espace se distingue de toute autre grandeur imaginable de trois dimensions, ne peuvent être empruntées qu'à l'expérience. De là surgit le problème de rechercher les faits les plus simples aux moyens desquels puissent s'établir les rapports métriques de l'espace, problème qui, par la nature même de l'objet, n'est pas complètement déterminé ; car on peut indiquer plusieurs systèmes de faits simples, suffisants pour la détermination des rapports métriques de l'espace. Le plus important, pour notre but actuel, est celui qu'Euclide a pris pour base. Ces faits, comme tous les faits possibles, ne sont pas nécessaires ; ils n'ont qu'une certitude empirique, ce sont des hypothèses… ».

Afin de saisir l'importance du plan d'enquête établi par Riemann, nous devons d'abord reconnaître que cet obscurantisme de 2000 ans n'était pas du tout nécessaire, tout comme les fondements de la géométrie euclidienne. Le culte selon lequel les définitions, axiomes et postulats d'Euclide étaient les conditions *a priori*, immuables, fixes et nécessaires de l'univers n'a jamais eu de fondement légitime. Il s'agissait là d'une fausse doctrine, imposée par un système, basée sur une acceptation répandue de la croyance selon laquelle l'univers était gouverné par des forces dépassant la compréhension et le contrôle de l'homme, (qu'on appelle communément magie) et que ces forces ne pouvaient être administrées que par une élite auto-proclamée. Les édits de cette élite, comme les axiomes et postulats de la géométrie euclidienne, étaient donnés comme préétablis, ne requérant ou n'étant soumis à aucune preuve : « *Il en est tout simplement ainsi et pas autrement* ».

Cette façon de voir les choses était exprimée très simplement par l'astronome grec Claudius Ptolémée, celui qui a imposé la conception géocentrique figée (pourtant reconnue fausse à l'époque) du Système solaire. Ptolémée, en accord avec Aristote, justifia cette attaque sur la conception héliocentrique d'Aristarque, une conception dont la preuve pouvait être faite, comme conséquence nécessaire de sa vision de l'homme. Dans l'introduction de son *Almagast*, Ptolémée affirme que la connaissance simultanée de Dieu et de l'univers physique est impossible. La seule forme de connaissance accessible à l'homme était ce qu'il appelait la « connaissance mathématique », c'est-à-dire celle qui dérive logiquement d'un ensemble donné d'axiomes, définitions et postulats qui ne peuvent jamais être prouvés. Par conséquent, leur autorité réside, non pas dans des vérités démontrables, mais dans la puissance arbitraire de celui qui décrète leur primauté. Le mal ne réside pas dans les axiomes, postulats et définitions en tant que tels, mais dans l'acceptation de la méthode selon laquelle la connaissance peut être dérivée d'eux seuls.

L'hypothèse selon Platon

Dans sa célèbre métaphore de la ligne divisée (sixième livre de la *République*), Platon expose la différence, dans le domaine de l'intelligible, entre les objets prédéfinis, tels les axiomes et les postulats, et ce que nous pourrions *a contrario* qualifier d'hypothèse libre.

Socrate pose d'abord l'existence de deux domaines distincts, celui du visible et celui de l'intelligible :

« Représente-toi bien, en suivant notre manière de nous exprimer, qu'il existe deux souverains : l'un règne sur le genre intelligible et sur le lieu intelligible, l'autre, de son côté, règne sur l'oratos, c'est-à-dire sur le visible. (...) Tu vois bien de toute façon qu'il y a là deux genres différents, le visible [oratos, particule du verbe voir] et l'intelligible [noetos, particule du verbe connaître avec l'esprit]. »

Il examine ensuite en détail ces deux types, oratos et noetos, divisant chacun d'entre eux en objets et en images de ces objets :

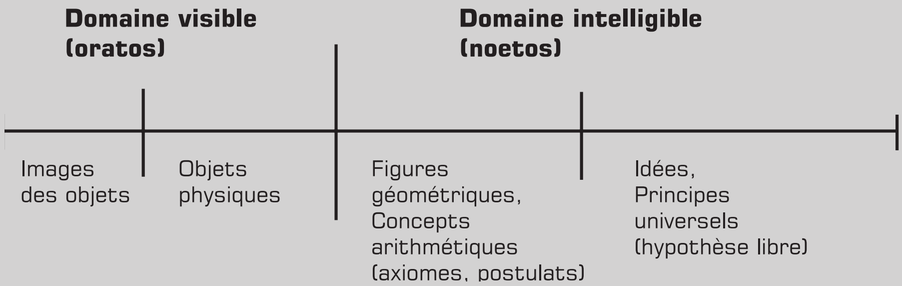
« Sur ce, prends, par exemple, une ligne coupée en deux segments d'inégale longueur ; coupe de nouveau, suivant la même proportion que la ligne, chacun des deux segments – celui du genre visible et celui du genre intelligible – et tu obtiendras ainsi, eu égard à un nouveau rapport réciproque de clarté et d'obscurité dans le monde visible, le second segment, celui des images. J'entends par images d'abord les ombres, ensuite les reflets qui se produisent sur l'eau ou encore sur les corps opaques, lisses et brillants, et tous les phénomènes de ce genre. (...)

« Pose alors l'autre segment auquel celui-ci ressemble, les animaux qui nous entourent, et tout ce qui est soumis à la croissance, aussi bien que l'ensemble du genre de qui est fabriqué. (...)

« Examine aussi comment il faut couper la section de l'intelligible. Dans une partie de cette section l'âme, traitant comme des images des objets qui, dans la section précédente, étaient les objets imités, se voit contrainte dans sa recherche de procéder à partir d'hypothèses [devant être ici comprises dans le sens d'axiomes, définitions et postulats] ; elle ne chemine pas vers un principe, mais vers une conclusion. Dans l'autre section toutefois, celle où elle s'achemine vers un principe anhypothétique, l'âme procède à partir de l'hypothèse et sans recourir à ces images, elle accomplit son parcours à l'aide des seules formes prises en elles-mêmes. »

la recherche de chacun, et qu'ils traitent ces hypothèses comme des choses connues ; quand ils ont confectionné ces hypothèses, ils estiment avoir à en rendre compte d'aucune façon, ni à eux-mêmes ni aux autres, tant elles paraissent évidentes à chacun [Socrates pense ici aussi aux axiomes, définitions et postulats acceptés comme étant soi-évidents] ; mais ensuite, en procédant à partir de ces hypothèses, ils parcourent les étapes qui restent et finissent par atteindre, par des démonstrations progressives, le point vers lequel ils avaient tendu leur effort de recherche. (...)

« Et maintenant, comprends-moi bien quand je parle de l'autre section de l'intelligible, celle qu'atteint le raisonnement lui-même par la force du dialogue ; il a recours à la construction d'hypothèses, c'est-à-dire des points d'appui et des tremplins pour s'élancer jusqu'à ce qui est anypothétique, jusqu'au principe du tout. (...) »



Etant donnée la difficulté de Glaucon à comprendre ce que Socrates veut dire, ce dernier reprend son explication de façon plus détaillée :

« Eh bien, reprenons. Tu comprendras mieux ce que je vais dire maintenant. Tu sais bien, je pense, que ceux qui s'occupent de géométrie, de calcul et d'autres choses du même genre font l'hypothèse du pair et de l'impair, des figures et des trois espèces d'angles, et de toutes sortes de choses apparentées selon

Socrate parle ici de ce que Lyndon LaRouche appelle aujourd'hui la découverte de principes physiques universels, non accessibles par les sens et le raisonnement logico-déductif appliqué à des axiomes et postulats prédéfinis, mais seulement par l'hypothèse libre.

EUCLIDE VU À L'ENVERS

L'acceptation populaire de l'obscurantisme résultant de la domination de la méthode aristotélicienne, provoqua une dégénérescence tragique du concept élevé de l'homme et de l'univers, développé dans la Grèce antique, depuis Pythagore jusqu'au meurtre d'Archimède. Les *Eléments* d'Euclide, d'une étrange manière, illustrent très bien ce problème. Lus dans l'ordre habituel, les *Eléments* procèdent à partir des définitions du point, de la ligne, de la surface et du solide comme objets de dimension 0, 1, 2 et 3, et de postulats posant le caractère illimité de ces objets. Puis de là, un ensemble de théorèmes est développé, décrivant les actions possibles dans un univers se conformant aux restrictions contenues dans les axiomes, définitions et postulats de départ.

Pourtant, lorsqu'ils sont lus à l'envers, les *Eléments* d'Euclide commencent à révéler une compréhension complètement différente de l'univers. Les *Eléments* se terminent là où ils devraient commencer – avec la construction des cinq solides réguliers (platoniciens), à partir des caractéristiques de l'action sphérique. Cette façon de procéder mène à la découverte des grandeurs de différentes puissances, telles qu'elles se manifestent lors du doublement de la ligne, du carré et du cube. De cette relation entre les différentes puissances émerge les proportions appelées « moyenne arithmétique », « géométrique » et « harmonique » de même que les nombres premiers et les différentes relations existant entre eux. C'est alors seulement que les recherches peuvent être limitées à la réflexion de ces relations dans le plan ; et c'est après cela seulement que nous devrions arriver, à la fin, au point, à la ligne, à la surface et au solide. Vus de cette manière, ces objets sont des concepts émergeant d'un principe supérieur – l'action qui a produit les cinq solides réguliers de la sphère -, et non pas comme des objets créés par un décret arbitraire d'en bas, dans la forme d'axiomes, de définitions et de postulats. (C'est de ce point de vue que Kepler commence son *Harmonie du Monde* en dénonçant fortement Petrus Ramus, le principal aristotélicien de son temps, qui avait cherché à faire bannir les livres 10 à 13 des *Eléments* d'Euclide.)

Ce principe peut encore être illustré par les recherches d'inspiration pythagoricienne et platonicienne concernant le doublement de la ligne, du carré et du cube. Comme nous l'avons souligné dans des articles précédents, chaque objet est engendré par des grandeurs de puissances successivement croissantes. La relation entre ces puissances supérieures est reflétée par les proportions arithmétiques et géométriques. Au départ, il semble que chaque puissance soit associée à un simple accroissement de l'étendue. Par exemple, la grandeur qui permet de doubler le carré est incommensurable avec la grandeur permettant de doubler la ligne, mais elle est malgré tout produite à l'intérieur même du carré. Pourtant, lorsque le problème du doublement du cube est considéré, la grandeur recherchée n'est engendrée nulle part à l'intérieur du cube. Les deux constructions connues, celles d'Archytas et de Menaechmus, démontrent que la grandeur ayant le pouvoir (dans le sens de puissance, ndt) de doubler le cube est celle produite par une forme supérieure d'action, représentée par une cône, un tore et un cylindre. Même si l'action agit sur le cube, elle n'est produite nulle part dans le cube. En d'autres termes, elle n'est pas produite par un accroissement dans l'extension, c'est-à-dire par le passage de deux à trois dimensions.

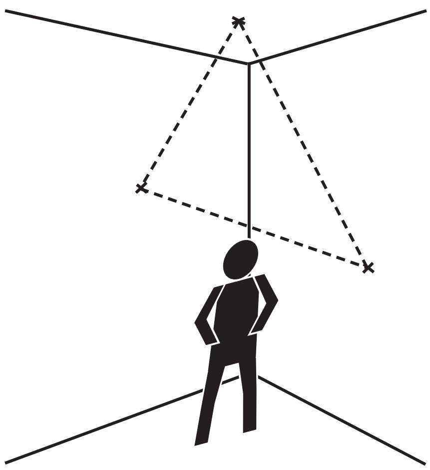


Figure 2.

LE CHANGEMENT DE COURBURE

Un autre principe est ici mis en œuvre. Le principe permettant d'engendrer la grandeur capable de doubler le cube s'exprime par un changement de « courbure ». Comme Riemann l'affirme dans sa dissertation d'habilitation, la détermination de l'extension n'est que le premier pas :

« Après avoir construit le concept d'une variété de n dimensions, et trouvé pour caractère essentiel d'une telle variété cette propriété que la détermination de lieu peut s'y ramener à n déterminations de grandeur, nous arrivons au second des problèmes posés plus haut, à savoir l'étude des rapports métriques dont une telle variété est susceptible, et des conditions suffisantes pour la détermination de ces rapports métriques ».

Afin d'illustrer ce point de manière plus pédagogique, faites l'expérience suivante : tenez-vous debout dans le coin d'une pièce et marquez du regard un point au-dessus de votre tête, puis un second point sur le mur situé sur votre droite et un autre sur le mur situé sur votre gauche **(Figure 2)**. Maintenant, par un mouvement de l'esprit, connectez ces trois points. Si vous pointez du doigt ces points successivement, le mouvement décrit par votre bras sera formé de trois angles droits, impliquant que ces trois points sont situés sur la surface d'une sphère. Par contre, si vous connectez ces trois points par votre esprit avec trois lignes droites, les points semblent alors reposer sur une surface plane, formant la face plane d'un octaèdre. Ou encore, si vous connectez ces trois points à l'aide de trois chaînettes, la surface obtenue sera de courbure négative. Ces points forment trois triangles différents qui sont, dans les trois cas, des grandeurs doublement étendues ; elles sont pourtant très différentes les unes des autres. La différence n'est pas tant dans le nombre de dimensions, mais dans la courbure de la surface sur laquelle le triangle se trouve. Ainsi, les lignes qui forment les côtés de ces triangles sont définies par la nature de la surface dans laquelle elles existent. La définition euclidienne d'une ligne, « une longueur sans largeur », ne nous permet pas de distinguer le côté du triangle sphérique de celui du triangle plat ou du triangle de courbure négative. De la même manière, la définition euclidienne de la surface, « ce qui est doté de longueur et de largeur », ne nous permet aucunement de distinguer ces trois triangles entre eux.

La courbure de ces trois surfaces peut être mesurée par la somme des angles des triangles formés sur chacune d'entre elles. Dans le triangle sphérique, la somme des angles est plus grande que 180 degrés. Dans le triangle plat, la somme est égale à 180 degrés. Dans le « triangle-chaînette », la somme est plus petite que 180 degrés.

Pensez maintenant, comme le firent Gauss et Riemann, à une variété capable d'envelopper ces trois courbures. Commencez avec une surface de courbure positive comme une sphère. Ici la somme des angles dans n'importe quel triangle est toujours supérieure à 180 degrés. Plus le triangle est grand, plus grande est la somme des angles, jusqu'à ce qu'un maximum soit atteint, là où le triangle recouvre toute la sphère. Dans le sens inverse, lorsque le triangle devient de plus en plus petit, la somme des angles se rapproche de 180 degrés, sans toutefois jamais l'atteindre. Car lorsque la somme des angles est égale à 180 degrés, la surface devient plate. Sur la surface négative, c'est exactement le contraire qui se produit. Lorsque le triangle devient de plus en plus petit, la somme des angles s'accroît encore et encore, approchant mais n'atteignant jamais les 180 degrés.

Ces trois surfaces forment une variété d'action, au sein de laquelle le plan plat euclidien n'est qu'un moment de transition entre les surfaces de courbure positive et négative. Gauss vit ici la possibilité d'une détermination physique de la géométrie : « *Il est facile de démontrer que si la géométrie d'Euclide n'est pas vraie, il n'y a pas de figures similaires. Les angles d'un triangle de côtés égaux varient selon la grandeur des côtés, ce que je ne trouve pas du tout absurde. Les angles sont bel et bien une fonction des côtés et les côtés une fonction des angles et, en même temps, une ligne constante émerge naturellement dans une telle fonction. Il semble que ce soit en quelque sorte un paradoxe, qu'une ligne constante puisse même exister, pour ainsi dire, a priori ; mais je ne vois en cela rien de contradictoire. Il serait même désirable que la géométrie d'Euclide ne soit pas vraie, parce nous aurions alors, a priori, un étalon de mesure universel, par exemple, l'on pourrait utiliser comme unité d'espace [Raumeinheit] le côté d'un triangle équilatéral, dont l'angle est 59 degrés, 59 minutes et 59,9999… secondes* ».

Johannes Kepler.

L'ESPRIT EN TANT QUE GÉNÉRATEUR DE PUISSANCE

Gottfried Leibniz, écrivant à Molanus, vers 1679, souligna dans ces termes les effets délétères du cartésianisme : « *Les cartésiens sont incapables de découvrir quoi que ce soit ; ils n'entreprennent que des tâches d'interprétation et ne font que commenter les écrits de leur maître, comme le faisaient les scolastiques avec Aristote. Il y a eu des découvertes splendides et multiples depuis Descartes mais, pour autant que je sache, aucune d'entre elles ne fut faite par un vrai cartésien. (…) Descartes lui-même avait un esprit plutôt limité* ».

La méthode de Descartes est impuissante. Elle manque de punch. Réétudiez les recherches des pythagoriciens, d'Archytas, de Menæchmus et de Platon, concernant le doublement de la ligne, du carré et du cube. Ces découvertes ont démontré la relation entre les objets et les principes à partir desquels ils sont engendrés. Chaque principe possède une puissance caractéristique. La succession d'objets – ligne, carré et cube – est produite par une succession de puissances toujours plus élevées (*dunamis*). Elles ne sont pas définies par les objets. Les objets sont produits par les puissances. Elles ne peuvent être connues par les sens. Les caractéristiques des puissances physiques sont néanmoins rendues sensibles par leur harmonie, que seul l'esprit à la capacité d'appréhender.

Comme nous pouvons le constater à partir des solutions développées par Archytas et Menaechmus permettant de doubler le cube, la relation harmonique entre les puissances reflète une courbure caractéristique qui, lorsqu'elle est projetée sur des lignes droites, produit des relations de type différent, que les pythagoriciens nommèrent « moyenne arithmétique », « géométrique » ou « harmonique ». La moyenne arithmétique est obtenue lorsque trois nombres sont reliés par une différence :

$c - a = b - c$, ou $c = 1 / 2 (a + b)$.

Géométriquement, elle est représentée par le point situé à mi-chemin entre les deux extrémités d'une droite ; musicalement, elle correspond à l'intervalle de la quinte. La moyenne géométrique lie trois nombres selon une proportion constante : $a : b :: b : c$. Géométriquement, elle est représentée par le carré situé [à mi-chemin, c'est-à-dire une demi rotation, ndt] entre deux carrés ; musicalement, elle correspond à l'intervalle lydien. La moyenne harmonique est l'inverse de la moyenne arithmétique :

$1 / c = 1 / 2 (1 / a + 1 / b)$.

Elle est exprimée, d'un point de vue géométrique, dans l'hyperbole et correspond, musicalement, à l'intervalle de la quarte. Ces relations harmoniques sont des ombres numériques projetées par le courbe sur le droit.

Riemann réussit à généraliser ces découvertes grecques avec sa notion de grandeur multiplement étendue. La ligne est un produit d'une variété simplement étendue, le carré un produit d'une variété doublement étendue et le cube un produit d'une variété triplement étendue. Pour Riemann, comme pour Pythagore, Archytas, Menaechmus, Platon et autres, chaque accroissement dans le degré d'extension, de « n » à « n + 1 », se fait par l'addition d'un nouveau principe, pas par une simple nouvelle « dimension ». Par conséquent, un carré ne peut être produit par une ligne, ni un cube par un carré, parce que le carré est engendré par un principe différent de celui engendrant la ligne, comme le cube est engendré par un principe différent de celui du carré. Riemann insista toutefois sur le fait qu'une simple extension ne suffit pas à déterminer la géométrie physique. Comme nous l'avon déjà dit, un autre principe est nécessaire : la courbure physique.

A PROPOS DU COURBE ET DU DROIT

Dans le monde de fées de Descartes, le concept de puissance est excisé : « *Tout problème géométrique peut être facilement réduit de telle façon que la connaissance de certaines lignes droites est suffisante pour sa construction* », dit-il dans l'introduction de son traité sur la géométrie analytique.

Il commence par la fin, en prenant les relations numériques et en les dépouillant de leur puissance, il prétend par la suite engendrer des courbes, à partir de ces seules relations numériques, qu'il fixe sous forme d'équations algébriques. C'est une véritable fraude. Descartes n'est jamais parvenu à dériver des courbes à partir des équations. Apollonius, dans le cadre de ses recherches sur la relation entre la courbure et les puissances, avait déjà découvert toutes les relations numériques. Descartes n'a jamais engendré une seule courbe dont les relations harmoniques n'aient été préalablement découvertes par les Grecs. L'intention de Descartes était de dépouiller la puissance des idées qu'elle contient et d'expulser l'idée de puissance de la géométrie.

Afin d'illustrer ceci de manière plus concrète, penchons-nous sur la solution de Menaechmus pour le doublement du cube. Menaechmus a démontré que la grandeur permettant de doubler le cube est formée par l'intersection d'une parabole et d'une hyperbole. Chaque courbe présente un ensemble différent de proportions, qui se manifestent lorsque le courbe est confronté avec le droit. Par exemple, l'hyperbole est formée par le coin d'un rectangle dont les côtés changent de sorte que l'aire du rectangle demeure inchangée. La parabole est formée par le coin d'un rectangle dont la longueur d'un des côtés est toujours égale au carré de l'autre. Ces rectangles sont faits de lignes droites, dont la proportionnalité est déterminée par des courbes. Les courbes possèdent la capacité de produire cette proportion, et la puissance est exprimée par la relation entre la courbe et les lignes droites qu'elle produit. En d'autres termes, seul un imposteur ou un niais séparerait la courbe, les lignes droites et la proportionnalité qui produit cette action complexe. Comme Menaechmus le démontre, lorsque l'hyperbole et la parabole sont combinées, une puissance est exprimée par la proportionnalité qui en résulte, qui est plus élevée que celle existant dans chaque courbe prise séparément.

Bernard Riemann.

Pour Descartes, les lignes droites sont des entités indépendantes, créées sans raison. La courbe et les puissances qui lui sont associées sont des déviations de ces lignes droites. *« Soulignons ici que par a^2, b^3 et autres expressions similaires, je veux tout simplement dire des lignes que je nomme, toutefois, carrés, cubes, etc., me permettant ainsi d'utiliser ces termes dans l'algèbre, »* confesse-t-il. Ainsi, le monde imaginaire des lignes droites est pris comme référence, tandis que le monde réel de l'action physique ne devient qu'un appendice de ce monde imaginaire. Puisque, comme l'a affirmé Leibniz, cette manière de penser est incapable de produire des découvertes, la seule intention de ceux qui enseignent cette méthode est de conditionner les élèves pour les amener à croire que le pays des merveilles est plus puissant que la réalité.

Pour marquer le point et afin de préparer le lecteur à affronter la géométrie différentielle physique de Riemann (que nous aborderons, comme nous l'avons dit plus haut, dans un article ultérieur), revenons sur nos trois exemples du début, issus de la physique : l'orbite en section conique formé par un corps céleste dans son mouvement autour du Soleil, la chaînette et le géoïde de Gauss. Dans le premier cas, le corps céleste suit un parcours d'une courbure unique autour du Soleil. Kepler et Gauss ont montré qu'il s'agissait là de sections coniques, avec le Soleil comme foyer commun à toutes les orbites. Ainsi, les orbites définissent une trajectoire physique, et le Soleil une origine physique. Les lignes droites qui ont ici une importance en tant qu'existence physique sont celles liées à l'action physique. Par exemple, le grand axe de l'orbite elliptique est la ligne qui relie les points de vitesse minimale et maximale, qui sont aussi les points de courbure maximale. Le *paramètre* de l'orbite est la ligne qui traverse le Soleil et qui est perpendiculaire au grand axe de la section conique. Le petit axe de l'orbite elliptique est la ligne reliant les points de courbure minimale de l'orbite. Ces lignes expriment les relations harmoniques qui sont les moyennes arithmétique, géométrique et harmonique, et qui reflètent à leur tour la puissance supérieure, la « raison » pour laquelle l'orbite de la planète prend la forme qu'elle prend.

Revenons maintenant à la chaînette. Malgré les prétentions de Descartes d'être capable de résoudre n'importe quel problème géométrique par sa méthode, la chaînette prouva qu'il avait tort. La chaînette présente un problème différent des sections coniques. Elle ne se conformait à aucune courbe géométrique connue et sa nature ne devait par conséquent être découverte que par ses seules caractéristiques physiques. Ceci constituait un problème pour Descartes car à moins que la nature de la courbe ne soit connue, il ne pouvait déterminer où disposer ses lignes droites.

Leibniz et Bernoulli ont démontré que la nature physique de la chaînette est exprimée par la relation entre n'importe quel point sur la chaîne et le point le plus bas. Cette relation est mesurée par les tangentes à la courbe en ces points. La tangente au point le plus bas est toujours perpendiculaire à la direction de la gravité : elle est donc horizontale. La relation de la force entre n'importe quel point de la chaînette et ce point le plus bas est mesurée par les sinus des angles formés par les tangentes en ces points, et la verticale passant par le point le plus bas. En d'autres termes, l'action physique, en n'importe quel point de la chaînette est exprimée par une relation « différentielle » entre les angles formés par ces trois lignes : la tangente horizontale au point le plus bas, qui est perpendiculaire à la direction de la gravité, la ligne verticale tirée de ce point, qui est dans la même direction que la gravité et la tangente au point de courbure choisi.

Leibniz et Bernoulli ont montré que ce changement « différentiel » n'est conforme à aucune courbe algébrique. Il n'existe pas dans le monde de Descartes. Descartes ne pouvait déterminer comment construire cette courbe à partir de ses lignes droites. Mais pourtant la chaînette existe dans le monde réel. Comme nous venons de l'observer, les seules lignes pertinentes sont celles qui sont déterminées physiquement par la relation toujours changeante entre la chaînette, d'une part, et la direction de la gravité et sa perpendiculaire, d'autre part. Cette relation n'est pas déterminée par la géométrie cartésienne. Elle est déterminée par la courbure physique de la gravité. Leibniz et Bernoulli ont démontré que cette relation est exprimée par des fonctions exponentielles et hyperboliques, les deux étant des expressions de la succession de puissances de plus en plus élevées et qui ne peuvent être, pour cette raison, découvertes par la méthode de Descartes.

Le géoïde de Gauss présente un problème encore différent. Dans les deux exemples précédents, l'action « différentielle » était située le long d'une trajectoire déterminée par le principe de la gravitation universelle. Dans ces deux cas, la « différentielle » pouvait être déterminée à l'aide d'une grandeur doublement étendue. (Le grand axe et le paramètre pour l'orbite d'une part, et la direction de la gravité et sa perpendiculaire pour la chaînette d'autre part.) En cherchant à déterminer la forme de la Terre, Gauss se trouva confronté à un nouveau principe. Plutôt que d'effectuer des mesures le long d'une trajectoire dans une surface doublement étendue, il devait mesurer des variations de la surface elle-même. A une fin pédagogique, pensez à mesurer un triangle sur une sphère parfaite. Comment la forme de ce triangle change-t-elle lorsque l'aire du triangle s'accroît ? Comparez ceci avec la mesure d'un triangle situé sur une surface irrégulière, comme une pastèque.

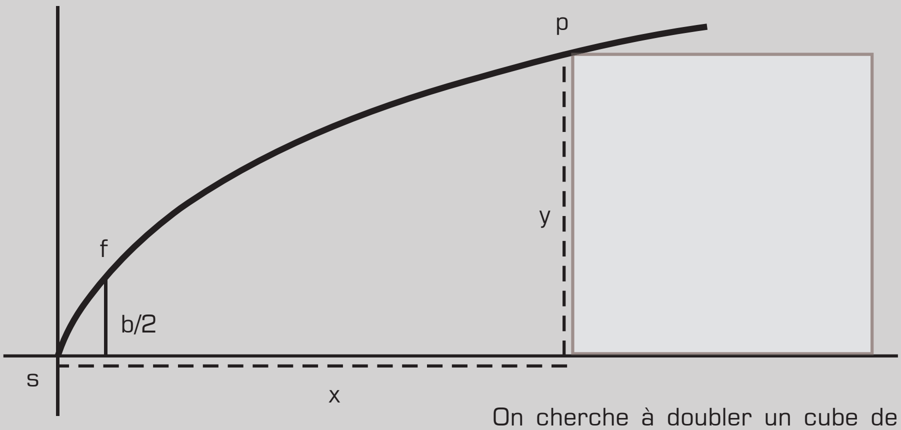
Sur la sphère, les côtés des triangles changent en fonction d'un principe différent, dépendant de la direction. Pour mesurer ce type de changement, Gauss a inventé un nouveau type de « différentielle complexe », que nous exposerons lors d'un prochain article.

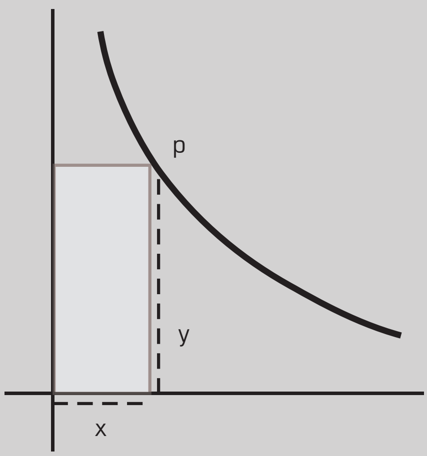
NOTES

1. N'importe quelle paire de points situés de chaque côté du point le plus bas retiennent le poids de la partie de la chaîne située entre eux. La force requise pour retenir ce poids à un point donné est proportionnelle au sinus de l'angle formé par la tangente à la chaînette au point en question, et la ligne verticale passant par lui.

2. Le lecteur peut s'en rendre compte par lui-même en comparant des triangles dessinés sur une feuille, sur une sphère et sur une pastèque.

La découverte de Menæchmus





On cherche à doubler un cube de volume a. Comme Platon le rapporte dans son *Timée*, cela ne peut être accompli qu'en ayant recours à deux moyennes géométriques, alors que pour doubler la surface d'un carré il n'en faut qu'une. Il faut donc deux moyennes goémétriques entre a et b (où b = 2a), c'est-à-dire :

$a : x = x : y = y : 2a$.

Menæchmus a démontré que le point d'intersection entre une parabole dont le *latus rectum* est b et une hyperbole construite à l'aide d'un rectangle déformable d'aire toujours égale à ab (où b est ici encore égal à 2a) engendre les rapports recherchés.

Les côtés du rectangle de l'hyperbole au point d'intersection des 2 courbes sont les deux moyennes géométriques recherchées, c'est-à-dire x et y. Voici pourquoi :

Pour la parabole : L'aire A du carré est toujours égale à celle d'un rectangle dont les côtés sont b, le *latus rectum* de la parabole, et x, l'abcisse du coin inférieur gauche du carré. Nous n'avons toutefois pas suffisamment de place pour le démontrer ici. On a donc :

$y^2 = A = bx$

$y = \sqrt{bx}$

y est donc la moyenne géométrique entre b et x. L'aire du carré grandit en même temps que x.

Pour l'hyperbole : L'aire du rectangle compris entre les axes et l'hyperbole est toujours constante. Choisissons une hyperbole telle que l'aire de ce rectangle soit égale au produit ab.

Nous avons donc : $xy = ab$ (où b est toujours égal à 2a).

Au point d'intersection P, on a :

$xy = ab = 2a^2$ pour l'hyperbole

$y^2 = bx = 2ax$ pour la parabole

De là, on voit bien que : $xy = 2a.a$ et que $a : x = y : 2a$, qui sont les premier et troisième termes des rapports que nous recherchons.

Pour le terme du milieu on a :

$a/x = y/2a$,

mais puisque $y^2 = 2ax$

et que par conséquent $a = y^2/2x$

on remplace le a dans $a/x = y/2a$

et on obtient $a : x = x : y$.