Le défi des nombres imaginaires

SÉBASTIEN DROCHON

Si la société actuelle vit l'une des plus grandes crises économiques de l'histoire de l'humanité, c'est parce que depuis quarante ans elle joue le jeu du compromis, aussi bien dans le domaine scientifique que dans toute forme d'organisation sociale. Il existe en effet une habitude psychologique largement répandue dans la population et chez les élites politiques qui consiste à penser qu'à priori, « aimer les problèmes » serait révélateur de troubles mentaux. Il y a pourtant une différence entre éviter des ennuis lorsqu'ils peuvent être évités, et refuser de faire face à certains problèmes auxquels on est immanquablement confrontés lorsqu'on a trop longtemps nié la réalité. Il n'est jamais trop tard pour réellement se pencher sur les problèmes, au risque de trouver une solution valable et de finir par aimer ça.

Il semble d'ailleurs que si certains scientifiques, poètes, musiciens ou hommes politiques n'avaient pas eu le courage de s'aventurer « là où personne n'avait jamais osé aller avant eux », le développement moral et scientifique de toute civilisation, et de la civilisation européenne en particulier, n'aurait pas été possible. En outre, on constate que lorsqu'une civilisation se borne à adopter une culture de non-changement, elle dégénère peu à peu jusqu'à parfois s'éteindre complètement, car incapable de remettre en cause sa manière de penser pour résoudre une crise qui met son existence en péril.

Le paradoxe de Cardan, au sujet de la « fameuse énigme » des racines carrées de nombres négatifs, ainsi que la polémique qui s'en suivit jusqu'à l'écrit de Gauss de 1799, et même plus tard, sont utiles pour comprendre l'état d'esprit décrit précédemment.

1 / L'HÉRITAGE PRÉCIEUX DE LA GRÈCE CLASSIQUE

Pour saisir la problématique et l'importance du « paradoxe de Cardan », ainsi que toute la polémique autour des nombres imaginaires qui en découla, il est tout d'abord nécessaire d'étudier la méthode de découverte qui fut élaborée à l'époque de la Grèce classique, afin d'y relever les implications dans ce qui nous intéresse ici tout particulièrement : l'histoire de l'algèbre.

Les grecs s'étaient penchés sur tout un ensemble d'études arithmétiques et avaient remarqué que les nombres entiers pouvaient avoir des caractéristiques très différentes en fonction de la représentation géométrique qu'on en faisait. Ils considéraient d'ailleurs que la nature même des nombres se situait au niveau du principe qui engendrait ces singularités.

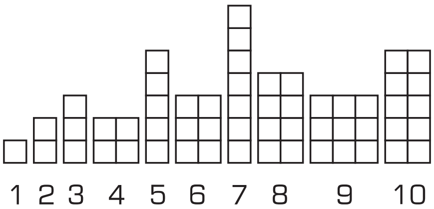

Figure 1.
Existe-t-il des carrés dont les surfaces seraient 2, 3, 5, 7...?

Construisons, par exemple, à l'aide de carrés unitaires, la série des entiers. **(Figure 1)** Nous constatons que certains nombres tels que 1, 4, 9, 16 etc. peuvent se mettre sous la forme de carré (que l'on nomme « nombres carrés »), alors que les autres ne peuvent se représenter que sous forme de rectangle (nombres rectangles). La question qui dès à présent nous vient à l'esprit est la suivante : existe-t-il des carrés dont la surface serait 2, 3, 5, ou tout autre nombre représenté sous forme de rectangle ? A priori oui. Seulement, nous sommes bien obligés d'admettre aussi que, pour nous, ce type de carré n'est encore que de l'ordre de l'imagination, puisque nous ne savons toujours pas comment le construire ! Ou peut-être faudrait-il considérer ces carrés comme « impossibles » ou « imaginaires »…et s'en tenir à notre première observation.

L'APPROCHE DU « HAUT VERS LE BAS »

Rassurez-vous. Pour obtenir le carré de surface 2, la solution nous est donnée dans le *Ménon* de Platon, où il nous est dit que la diagonale du carré unitaire, de longueur $\sqrt{2}$, produit le carré de 2. Pour obtenir le carré de surface 3, aucune possibilité n'est envisageable à partir du carré unitaire. Par contre, si nous considérons un triangle équilatéral, nous constatons qu'en prenant le double de sa hauteur il est possible de construire un deuxième triangle équilatéral dont la surface est le triple du triangle d'origine **(Figure 2)**. Si, dans un carré de surface 1, nous construisons un triangle équilatéral dont la longueur est égale à celle de ce carré unitaire, il nous est possible de construire le carré de surface 3 avec le coté du triangle triple , car par le « principe de proportion », si le triangle a triplé de surface, il en est de même pour le carré. Il est désormais possible de construire un ensemble de carrés de surfaces multiples de 2 et 3, ceci à partir des deux méthodes que nous venons d'élaborer. Le carré de 5 n'est, quant à lui, toujours pas déterminé, pas plus que ceux de 7, 10, 11, 13, et une infinité d'autres.

La question se pose alors de savoir si nous devons trouver pour chaque nombre entier un moyen d'avoir le carré lui correspondant en surface, auquel cas, pour les carrés qui resteront indéterminés, nous n'aurons pas d'autre choix que de les considérer comme appartenant au domaine de l'imagination et donc « non réels », au sens constructible du terme. Ou bien nous abordons le problème du « haut vers le bas » en faisant l'hypothèse qu'il existe un principe géométrique supérieur permettant de multiplier un carré de surface 1 en un carré de surface quelconque donnée. C'est par cette deuxième méthode que les grecs ont découvert le principe supérieur de la « moyenne géométrique ».

À LA RECHERCHE D'UN PRINCIPE

Prenons comme premier principe que celui qui cherche à résoudre un paradoxe doit toujours avoir à l'esprit que, parmi les solutions qui se présentent à lui, les plus valides seront celles qui lui permettront d'avoir une plus grande efficacité d'action dans l'univers. Pour le problème qui nous intéresse ici, comparons deux méthodes différentes pour multiplier la surface d'un carré unitaire afin d'obtenir un carré de surface quelconque.

Tout d'abord, considérons un triangle rectangle isocèle de coté 1 qui serait en réalité la moitié d'un carré de surface 1 coupé suivant sa diagonale. L'hypoténuse de ce triangle serait égale en longueur à $\sqrt{2}$, c'est-à-dire le coté d'un carré de surface 2. A partir de cette grandeur, construisons un deuxième triangle rectangle (non isocèle celui-ci), de cotés $\sqrt{2}$ et 1. Nous pouvons en déduire par le théorème de Pythagore que l'hypoténuse de ce triangle, égal à $\sqrt{3}$, nous donne le carré de surface 3. En construisant ensuite un triangle rectangle de coté $\sqrt{3}$ et 1, nous obtenons le segment de longueur $\sqrt{4}$ égal à 2, c'est à dire le coté d'un carré de surface 4. Continuons le processus et nous voyons très clairement qu'il nous est désormais possible d'obtenir les longueurs désirées pour construire successivement les carrés de surface 5, 6, 7, 8, etc., et ceci jusqu'à n'importe quel nombre entier voulu **(Figure 3)**. Néanmoins, cette méthode comporte un inconvénient de taille, pour la simple raison qu'elle reste linéaire. En effet, nous ne pouvons construire aucun carré de surface donnée sans avoir au préalable construit le précédent.

Existe-t-il alors un moyen de construire un carré de surface égale à un entier donné, et ceci uniquement à partir du carré de surface 1 ? Y a-t-il un principe supérieur qui permettrait de multiplier directement le carré unitaire en un carré de surface quelconque ? Avant même de répondre à cette question, il est nécessaire de souligner l'importance des dialogues de Platon concernant la méthode qui nous permettra de surmonter le problème.

On apprend en effet dans ces dialogues que tout paradoxe doit être résolu par une hypothèse et que cette hypothèse révèle l'existence d'un principe supérieur qui doit faire l'objet d'une expérience pour être validé. Ayant à l'esprit que l'approche menant à la découverte est aussi importante que la découverte elle-même, voyons comment les grecs, il y a plus de deux mille ans, découvrirent la solution au problème que nous nous posons.

LE PRINCIPE SUPÉRIEUR DE LA « MOYENNE GÉOMÉTRIQUE »

Considérons notre problème de la manière suivante : soit un carré de surface unitaire, que nous voulons transformer en carré de surface quelconque b. Si nous étirons tout d'abord un coté de ce carré d'une longueur x, nous obtenons un rectangle de coté 1 et x, donc de surface x. Répétons la même opération sur ce dernier rectangle avec le coté de longueur 1 afin d'obtenir un carré de surface $x^2 = b$. En répétant deux fois la même action d'étirement, nous avons créé un type de relation entre les trois surfaces 1, x, b où 1 :: x = x :: b. Ici, x représente la moyenne géométrique entre 1 et b, ainsi que le coté du carré que nous voulons égal à b en surface **(Figure 4)**. Comment construire géométriquement la moyenne x, et ceci directement à partir des grandeurs 1 et b données ? La réponse ne se trouve plus ici dans le domaine des carrés, mais dans le type d'action d'étirement (transformation sur elle-même) qui est en réalité le principe générateur de la multiplication de surface d'un carré, émanant de l'action circulaire.

Construisons en effet un demi-cercle de diamètre AB et prenons un point quelconque C sur ce cercle. Le triangle ABC sera rectangle en C et d'hypoténuse AB. Si nous projetons orthogonalement le point C sur le diamètre AB, donnant E, nous obtenons un ensemble de trois triangles rectangles ABC, ACE, CBE, qui sont en réalité similaires (Ils ont en effet un angle en commun respectivement deux à deux). De par cette similarité on en déduit pour les deux triangles ACB et AEC, que l'action de transformation qui nous fait passer de AE à AC (une rotation d'angle <CAE> et une extension de AC / AE), est la même que celle qui transforme AC en AB (en effet < CAE > = < CAB > et AC / AE = AB / AC). Nous obtenons donc, à partir de cette construction, le principe de transformation sur elle-même

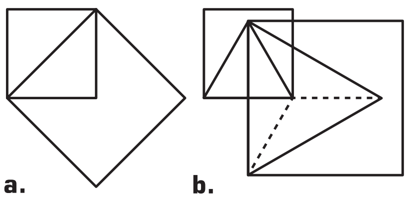

Figure 2.
a. Doublement du carré.
b. Triplement du carré par le triangle.

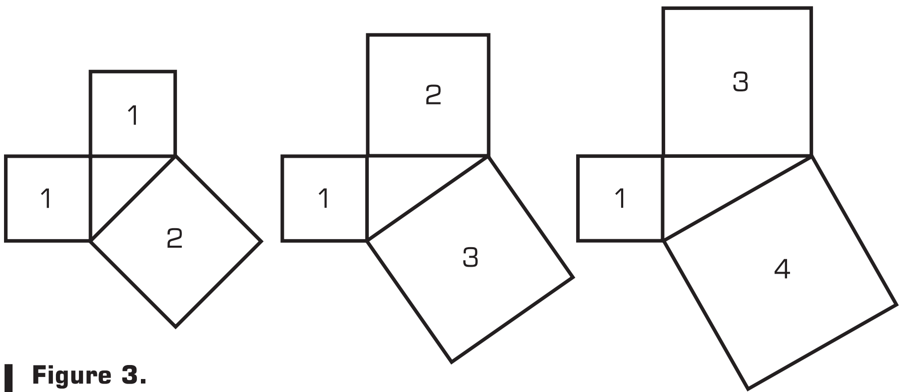

Figure 3.
Nous ne pouvons construire aucun carré sans avoir au préalable construit le précédent.

que nous cherchions auparavant à représenter géométriquement et qui nous donne la relation suivante :

AE :: AC = AC :: AB.

Si l'on prend ensuite AE = 1 et AB = b, on a 1 :: AC = AC :: b, où AC devient notre moyenne géométrique x qui permet de construire directement le carré de surface b. Notre problème se trouve donc résolu ! **(Figure 5)**

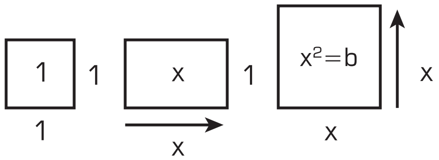

Figure 4.
1::x = x::b
x est la moyenne géométrique entre 1 et b.

Remarquons au passage que la construction géométrique du doublement et du triplement du carré n'est qu'un cas particulier de celle que nous venons de découvrir. Plus étonnant encore, nous trouvons non seulement le moyen de transformer un carré unitaire en un carré de surface entière quelconque (ce qui était notre problème de départ), mais nous avons en plus de cela le « pouvoir » d'engendrer tout type de surface carrée, de n'importe quelle grandeur, même non entière.

Pourrions-nous croire, désormais, quelqu'un qui prétendrait qu'un carré de 5 ou de 7 ou de n'importe quelle autre grandeur réelle, n'existe que dans notre imagination ? Il est évident que non. Car aucun carré ne pourrait être impossible au yeux de celui qui a découvert le principe supérieur qui les engendre tous. Et c'est à la lueur de ce qui a été développé jusqu'à présent que le fameux paradoxe de Cardan prend tout son sens.

2 / DE AL KHWARIZMI À CARDAN.

Tout d'abord, nous ne pouvons traiter du paradoxe de Cardan sans effectuer un détour passionnant dans les travaux du grand mathématicien et astronome, Al Khwarizmi (780-env. 850). Ce dernier fit en effet des découvertes fondamentales en élaborant une méthode de résolution géométrique des équations du second degré et créa par la même occasion le concept de l'algèbre.

Plus tard, l'italien Jérôme Cardan (1501-1576), en collaboration avec un groupe de mathématiciens de l'époque dont un certain Tartaglia, découvrit une méthode générale pour déterminer les solutions d'équations algébriques du troisième degré, publiée pour la première fois dans l'ouvrage *Ars Magna Sive De Regalis Algebraicis* (*Le Grand Art ou Les Règles de L'Algèbre*).[1] C'est à partir de la découverte de Cardan, et jusqu'en 1799, lorsque Gauss présenta sa première version du *Théorème Fondamental de L'Algèbre*, que la fameuse ombre $\sqrt{-1}$ fut considérée par la communauté scientifique, soit comme une curiosité merveilleuse dont il fallait à tout prix percer le secret, soit comme un « spectre » terrible qu'il était préférable de ne jamais croiser.

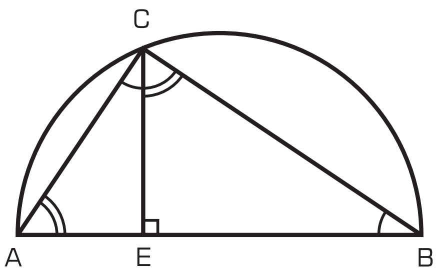

Figure 5.
AE::AC = AC::AB

SOLUTIONS IMPOSSIBLES OU PROBLÈMES IMPOSSIBLES ?

La méthode d'Al Khwarizmi qui donna naissance à l'algèbre permit d'élaborer une expression générale pour la résolution d'équations du second degré (de la forme $X^2 + BX + C = 0$) qui sont :

$X_1 = -B / 2 + \sqrt{(B^2 / 4 - C)}$ et
$X_2 = -B / 2 - \sqrt{(B^2 / 4 - C)}$.

Mais pour Al Khwarizmi, seules les solutions positives constructibles géométriquement comme longueur X d'un carré de surface X^2, étaient possibles, tandis qu'il considérait tout résultat négatif comme impossible. Pour l'équation $X^2 - 2X + 3 = 0$, par exemple, parmi les deux solutions 3 et -1 obtenues par la formule, seule 3 était retenue car positive et donc déterminable géométriquement en tant que longueur. **(Voir encadré)**

La notion de nombre négatif est apparue plus tard dans certains problèmes physiques se situant en dehors du simple domaine de la géométrie visuelle, comme principe d'action qui s'opposerait aux nombres positifs (qui définirait par exemple l'amplitude d'un mouvement en arrière, opposé à celui vers l'avant). On établit aussi que les nombres négatifs avaient la propriété de provoquer le changement de signe du nombre qui le multipliait. D'où le fameuse règle : (-) par (+) donne (-) et (-) par (-) donne (+).

Si nous construisions dans un repère cartésien la courbe de l'exemple précédent, $Y = X^2 - 2X - 3$, nous constaterions que celle-ci coupe bien l'axe des abscisses en X = -1 et X = 3, qui sont aussi nos deux solutions données par la formule générale issue de la méthode de résolution d'Al Khwarizmi.

A-t-on là le moyen de déterminer algébriquement toutes les solutions de toutes les équations du second degré ? Une réponse négative est très facile à prouver si l'on considère le simple exemple suivant : $X^2 + 1 = 0$. En effet, la formule nous donne un résultat quelque peu étrange, qui est $X_1 = \sqrt{-1}$ et $X_2 = -\sqrt{-1}$. Or, d'après ce qui a été établit auparavant sur la propriété des nombres négatifs, aucun nombre multiplié par lui-même ne saurait être inférieur à 0. Le résultat obtenu n'existe donc pas !

D'ailleurs, si l'on trace la courbe $Y = X^2 + 1$ sur un repère cartésien, on constate que celle-ci ne touche jamais l'axe des abscisses. Autrement dit le problème $X^2 + 1 = 0$ ne semble pas avoir de solution réelle (c'est-à-dire pouvant se situer sur la ligne des nombres). On remarque de plus que toute équation dont les solutions font intervenir des racines carrées de nombres négatifs dans notre formule sont des cas similaires à notre exemple précédent. Car lorsque l'on trace la courbe correspondante dans un repère cartésien, celle-ci ne touche jamais l'axe des abscisses mais reste toujours au-dessus.

Nous voilà donc rassurés en ce qui concerne ce problème, ainsi que tous les autres faisant intervenir cette fameuse $\sqrt{-1}$. Car de même qu'Al Khwarizmi considérait certaines équations impossibles dans le domaine de la géométrie visuelle, nous pouvons nous aussi considérer que les problèmes où les racines carrées de nombres négatifs apparaissent, sont en réalité des problèmes impossibles, car leur courbe ne touche jamais l'axe des abscisses dans un repère cartésien. Pourtant, ces équations pour lesquelles Al Khwarizmi n'avait pas de solutions n'ont elles pas pris un sens grâce aux nombres négatifs ? Ne devrions nous pas dès lors imaginer la possibilité que cette

La méthode d'Al Khwarizmi

D'après les récits dont on dispose, le terme « algèbre » est tiré du mot arabe « al-jabr » signifiant « compensation » ou « guérison ». Le terme est devenu courant à travers le fameux traité de mathématique arabe, le *Hisag al-jabr w'al maqalaba* composé par l'astronome et mathématicien Abu Ja'far Muhammad ibn Al Khwarizmi (780-env. 850)

Al Khwarizmi a travaillé en collaboration avec Al-Kindi et d'autres à la « Maison de la Sagesse » à Bagdad, fondée en tant que centre d'apprentissage par le fils de Harin al-Rashid. Là, parallèlement à des recherches sur des écrits originaux, des manuscrits scientifiques étaient rassemblés et traduits en arabe. Le *Hisab al-jabr w'al maqalaba*, traduit en latin, fut plus tard largement utilisé, transmettant le système arithmétique indien (décimal) et les méthodes, devenues familières, pour le réarrangement et résolution d'équations, qu'Al Khwarizmi appelait « compensation » (al-jabr) et « équilibrage » (al-muqalaba).

La méthode d'Al Khwarizmi fut d'une influence historique particulière pour résoudre les équations quadratiques telles que $X^2 + 10X = 39$. Il n'exprimait pas ceci avec des lettres, comme ce le fut d'ordinaire par la suite, mais posait le problème en ces termes : « un carré plus dix fois sa racine est de 39 unités.

Al Khwarizmi (780-env. 850)

Trouvez un tel carré ».

Comment ? Dessinez un carré quelconque de coté (racine) X inconnu. Alors « dix fois cette racine » correspond à une aire délimitée par un rectangle de coté 10 et X. Ajoutées l'une à l'autre, les aires du carré et du rectangle sont supposées donner une aire totale de « 39 » mais il n'est pas évident de combiner les deux aires pour que la valeur du carré soit celle voulue.

Al Khwarizmi propose le remède suivant (al-jabr !) :

divisez le rectangle en le coupant longitudinalement suivant le coté « X », en 4 rectangles égaux de cotés X et 10 / 4 (= 5 / 2). Placez désormais ces rectangles le long des quatre cotés du carré X^2 (il est préférable de dessiner tout en suivant la discussion !). La figure qui en résulte est presque un carré - il ne lui manque plus que les quatre « coins » ! « Réparez » ce qui est en défaut par l'ajout de quatre carrés, chacun faisant 5 / 2 par 5 / 2. Le résultat est un carré unique dont les cotés font

$5 / 2 + X + 5 / 2$

$= X + 10 / 2 = X+5$.

L'aire de ce grand carré sera de $(X + 5)^2$. D'autre part, chaque « coin » supplémentaire aura une aire de

$(5 / 2) (5 / 2) = 25 / 4$,

donc l'aire totale ajoutée est de 4 fois 25 / 4 c'est à dire 25.

En ajoutant la même quantité au coté droit de l'équation originale, Al Khwarizmi obtient le résultat suivant : le carré de coté $\{X + 5\}$ est égal en surface à $39 + 25 = 64$, c'est-à-dire le carré de coté 8. Ainsi $X + 5 = 8$ et $X = 8 - 5 = 3$. En fait, on peut facilement vérifier que la valeur $X = 3$ résout en effet l'équation $X^2 + 10X = 39$. Le carré que Al Khwarizmi demandait était celui de côté 3, d'aire égale à 9. Certains ont peut-être reconnu dans la méthode d'Al Khwarizmi qui consiste à «compléter» le carré, l'origine de la fameuse formule générale pour la solution de l'équation quadratique, que l'on apprend mécaniquement à l'école sans jamais être confronté à la construction géométrique simple dont elle est issue.

---

fameuse $\sqrt{-1}$ puisse devenir une solution pour nos prétendus « problèmes impossibles » ? Avant de répondre à cette question, voyons comment Cardan a découvert le moyen de formuler une solution algébrique pour les équations du troisième degré.

LA DÉCOUVERTE DE CARDAN

La méthode de Cardan, décrite ici algébriquement et de façon générale, consiste à déterminer l'inconnue X d'une équation cubique quelconque $X^3 + AX^2 + BX + C = 0$ [1], avec A, B, C réels.

Soit la variable $Z = X + A/3$ ($X = Z - A/3$), nous obtenons, en remplaçant X dans l'équation [1], une seconde expression en Z dans laquelle le second terme en Z^2 disparaît, et qui peut s'écrire sous la forme :

$Z^3 + aZ + b = 0$ [2].

Nous cherchons désormais une solution Z que nous mettrions sous la forme $Z = -v - u$.

Ainsi, $Z + u = -v$, et

$(Z + u)^3 = Z^3 + 3Z^2u + 3Zu^2 + u^3 = -v^3$ [3].

Or $3Z^2u + 3Zu^2 = 3Zu (Z + u) = 3Zu (-v) = -3Zuv$

donc notre expression [3] peut s'écrire sous la forme

$Z^3 - 3uvZ + v^3 + u^3 = 0$ [4].

Choisissons maintenant (u, v) pour que notre expression [4] coïncide avec $Z^3 + aZ + b = 0$ [2]. On obtient la condition suivante :

$\{-3uv = a\}$ et

$\{v^3 + u^3 = b\}$

ou encore

$\{u^3 v^3 = -a^3 / 27\}$ et

$\{v^3 + u^3 = b\}$.

En algèbre, lorsque deux quantités (ici v^3 et u^3) ont un produit et une somme respectivement égaux à $-a^3 / 27$ et b, ceci signifie qu'ils sont les solutions de l'équation $x^2 - bx - a^3 / 27 = 0$.

Ces solutions sont tirées de la formule des équations du second degré :

$v^3 = b/2 + \sqrt{(b^2 / 4 + a^3 / 27)}$ et

$-v^3 = -b/2 - \sqrt{(b^2 / 4 + a^3 / 27)}$

$u^3 = b/2 - \sqrt{(b^2 /4 + a^3 / 27)}$ et

$-u^3 = -b/2 + \sqrt{(b^2 / 4 + a^3 / 27)}$

ce qui nous donne :
$-v = \sqrt[3]{(-b / 2 - \sqrt{(b^2 / 4 + a^3 / 27)})}$
$-u = \sqrt[3]{(-b / 2 + \sqrt{(b^2 / 4 + a^3 / 27)})}$
Nous obtenons donc la solution de l'équation cubique [2] qui est :
$Z = -v - u$
$= \sqrt[3]{(-b / 2 - \sqrt{(b^2 / 4 + a^3 / 27)})}$
$+ \sqrt[3]{(-b / 2 + \sqrt{(b^2 /4 + a^3 / 27)})}$
et enfin la solution de notre équation [1] : $X = Z - A / 3$.

Nous constatons une fois de plus qu'avec cette expression, certaines équations peuvent faire apparaître des racines carrées de nombres négatifs suivant les valeurs de a et b, auquel cas nous devrons, comme précédemment, considérer ces problèmes comme impossibles conformément au raisonnement tenu auparavant pour les équations du second degré.

Mais, si l'on prend l'équation
$Z^3 - 15Z - 4 = 0$,
on a :
a = -15 et b = -4, ce qui nous donne
$-v^3 = 2 - \sqrt{-121}$ et
$-u^3 = 2 + \sqrt{-121}$,
qui sont semble-t-il des nombres impossibles. Nous pourrions donc en déduire que le problème en lui-même est impossible. Pourtant si nous mettons algébriquement au cube les expressions $-2 - \sqrt{-1}$ et $-2 + \sqrt{-1}$, nous obtenons respectivement v^3 et u^3 .

Or si v et u sont égaux à $-2 - \sqrt{-1}$ et $-2 + \sqrt{-1}$, alors la solution à notre équation de départ $Z = -v - u$ est égale à 4. Le résultat semble loin d'être impossible, il est même bien réel ! D'ailleurs il n'est pas difficile de vérifier qu'en remplaçant Z par 4 dans notre expression de départ ($Z^3 - 15Z - 4$), nous obtenons bien 0 et, donc, que le 4 obtenu par la formule est bien une racine de l'équation proposée !

Que peut bien signifier tout cela ? Nous voyons d'une part que notre à priori, selon lequel un problème devient impossible si notre méthode algébrique fait apparaître des racines carrées de nombres négatifs, s'effondre complètement. Si nous essayons ensuite une méthode algébrique différente, afin de ne plus faire apparaître $\sqrt{-1}$ dans notre formule lorsque les équations cubiques ont des solutions réelles, comme certains mathématiciens ont voulu le faire après la découverte de Cardan, nous faisons face à une difficulté insurmontable : la fameuse « brebis galeuse » $\sqrt{-1}$ ne semble pas vouloir s'éclipser malgré toutes les astuces et les manipulations de symboles. C'est ici que se situe la véritable nature du paradoxe de Cardan concernant la science de l'algèbre ! A ce stade de notre parcours, un choix s'impose. Ou nous essayons, comme beaucoup ont pu le faire, de résoudre les équations algébriques en considérant toujours $\sqrt{-1}$ comme impossible ou « imaginaire ». Ou nous regardons cette anomalie comme une curiosité passionnante sur laquelle enquêter, et qui peut nous indiquer la voie pour faire une découverte fondamentale.

En ayant à l'esprit l'approche effectuée pour notre problème de la multiplication des carrés, et en la mettant en relation avec celle qui consisterait à déterminer une formule algébrique générale donnant les solutions pour toute équation algébrique de la forme $X^m + AX^{m-1} + BX^{m-2} + \ldots + LX + M = 0$ (m étant un entier), nous pourrions d'une part mettre en rapport la méthode du doublement du carré avec la résolution des équations du second degré par Al Khwarizmi, puis lier la méthode du triplement du carré (à partir du triangle équilatéral) avec celle de Cardan donnant les solutions des équations cubiques, et enfin lier successivement chaque méthode de multiplication d'un carré avec celle qui consisterait à résoudre une équation d'un degré lui correspondant. La question qui se poserait alors est la suivante : existe-t-il, comme pour la multiplication de la surface d'un carré unitaire, un principe supérieur qui nous permettrait *directement* de trouver les solutions d'une équation algébrique de degré m quelconque ? Cette comparaison est d'autant plus intéressante que les problèmes du doublement et du triplement du carré nous révèlent aussi les anomalies que sont $\sqrt{2}$ et $\sqrt{3}$. Ces grandeurs incommensurables par rapport aux nombres entiers ont mené à la découverte des irrationnels et ont complètement changé la conception même des nombres que l'on avait auparavant.

Jérôme Cardan (1501-1576)

L'écrit de Gauss de 1799, qui réfute les grands mathématiciens de son époque que sont Euler, Lagrange et D'Alembert, au sujet du « Théorème fondamental de l'Algèbre », et que Lyndon LaRouche a choisi comme pierre angulaire pour la formation de son mouvement international de jeunes, est l'étape suivante qui lève le voile sur l'anomalie que représente ce fameux « nombre imaginaire ».

Il représente un héritage historique précieux qui nous ouvre un champ de découvertes plus vaste et plus passionnant encore et permet surtout de comprendre ce que signifie prendre la responsabilité de devenir un véritable homme de science, c'est à dire un être humain qui agit selon sa vraie nature créatrice, capable, avec les autres êtres humains, de résoudre toutes les crises.

NOTES

1. C'est Scipione Del Ferro (1465-1526), professeur de mathématiques à Bologne, qui le premier parvint à trouver une méthode permettant de résoudre certaines équations du 3e degré. Longtemps, il conserva secrète sa méthode (comme il était coutume de le faire à l'époque) puis finit par la communiquer à son gendre, Annibal de la Nave. Ce dernier la communiqua à l'un de ses amis, Anton Maria Del Fiore en 1526, qui garda le secret jusqu'à la mort de Scipione Del Ferro. Par la suite, Anton Maria Del Fiore ne divulgua pas la méthode mais, par contre, décida de lancer des défis aux mathématiciens (quelques centaines tout au plus à cette époque) en son propre nom sur la résolution d'équations cubiques de trois types : $x^3 + px = q$ (1) ; $x^3 = px + q$ (2) ; $x^3 + q = px$ (3). (Les coefficients p et q étaient des grandeurs positives, car de même que l'algèbre d'Al Khwarizmi avait pour base la géométrie visuelle, les grandeurs négatives n'étaient pas considérées comme réelles à l'époque). En 1535, Niccolo Tartaglia réussit à résoudre une trentaine de problèmes de type (1), mais il garda secrète sa méthode. Par la suite, Jérôme Cardan (1501-1576), lui arracha son secret (en 1539) et réussit à étendre la méthode aux équations de type (2) et (3) qu'il publia dans son Ars Magna en 1545.