Comment Gauss a révolutionné l'arithmétique :

La découverte des grandeurs de plusieurs dimensions

BRUCE DIRECTOR

Comme l'a proclamé le mathématicien Bernhard Riemann dans les remarques préliminaires de sa célèbre dissertation d'habilitation du 10 juin 1854, intitulée *Sur les hypothèses qui servent de fondement à la géométrie,* « sans un concept général des grandeurs de dimensions multiples, comprenant comme cas particulier les grandeurs étendues », nous sommes laissés dans la noirceur. Il n'est pas possible, sans ce concept, de connaître la nature de l'univers physique, la validité d'une idée, la valeur économique de l'activité humaine, la signification stratégique d'un événement courant ou historique, ou notre propre identité dans la simultanéité de l'éternité, pour ne nommer que quelques unes des questions importantes que nous voudrions éclaircir. Pourtant, les principes auxquels se réfère Riemann sont beaucoup trop peu compris par ceux qui sont amenés à porter des jugements sur ces questions.

Se référant à Gauss, Riemann cite deux caractéristiques nécessaires pour la détermination de grandeurs de dimensions multiples, c'est-à-dire la dimensionnalité et la courbure : aucune des deux ne peut être déterminée *a priori*, mais seulement par des mesures physiques. De telles grandeurs ne sont pas des quantités mathématiques, mais sont des principes physiques universels, produits par une variété d'action physique et ne sont pas, relativement à cette variété, absolues.

Prenons quelques exemples de l'arsenal des idées que nous avons développées au cours d'articles précédents.

1. Comme Kepler l'a démontré, les orbites planétaires elliptiques, non-uniformes, définissent la grandeur de l'action au sein de l'orbite comme aires égales, plutôt que les grandeurs mathématiques arbitraires d'arcs et d'angles égaux. Le Système solaire dans son ensemble définit à son tour une grandeur d'action pour chaque orbite, consistante avec les cinq solides platoniciens et les principes de polyphonie musicale. Ainsi, l'action d'une planète à chaque instant ne peut être mesurée que par une fonction définissant l'ensemble de l'orbite, et cette orbite est à son tour mesurée par une fonction définissant l'ensemble du Système solaire. Tandis que l'orbite définit une espèce de grandeur mathématique (les aires égales), le Système solaire dans son ensemble définit une espèce distincte et différente de grandeur (les harmoniques), qui se répercutent dans tous les « recoins » de chaque orbite, même si cette dernière espèce de grandeur ne peut être simplement dérivée de la première.

2. Le chemin le plus court emprunté par la lumière lors de la réflexion définit une grandeur d'action mesurée par des angles égaux. Le parcourt de moindre-temps emprunté par la lumière lors de la réfraction définit une grandeur d'action mesurée par la relation proportionnelle entre les sinus des angles d'incidence et de réfraction. En d'autres termes, lors de la réflexion les angles mesurent le changement dans la direction de la lumière, tandis que lors de la réfraction les angles sont déterminés par les sinus. Dans la variété d'action physique associée à la réflexion de la lumière, il n'y a pas de changement de milieu, et par conséquent il n'y a pas de changement dans la vitesse de la lumière, et l'« effet des sinus » disparaît, pour ainsi dire, pour se réduire à la simple égalité entre les angles. Mais dans la

variété de dimension plus élevée de la réfraction, la vérité apparaît, selon laquelle ce ne sont pas les angles en tant que tels qui mesurent l'action, mais plutôt les grandeurs transcendantales des sinus.

Il est important de garder à l'esprit, comme le montrent ces deux exemples, que la « dimension » n'est pas qu'un simple construct mathématique, mais qu'elle est associée à un principe physique distinct, qui est à son tour associé à une espèce distincte de grandeur. De plus, comme Riemann l'affirme avec emphase, le nombre de dimensions s'accroît lors de la découverte de chaque principe physique nouveau.

Ce concept de grandeur est consistent avec celui exprimé par Friedrich Schiller dans son essai intitulé *De l'estimation esthétique de la grandeur* :

« Toute estimation comparative de la grandeur, qu'elle soit abstraite ou physique, entière ou partielle, ne mène qu'à une grandeur relative, et non absolue ; car si un objet excède la mesure que l'on estime être maximale, on peut toujours demander par combien de fois cette mesure est dépassée. Elle est certainement une grande chose par rapport à son espèce, mais pourtant pas la plus grande possible, et lorsque la contrainte est dépassée, elle peut l'être encore et encore, jusqu'à l'infini. Maintenant, pourtant, nous cherchons une grandeur absolue, car seule celle-là peut contenir en elle-même la base d'un ordre plus élevé, puisque toutes les grandeurs relatives sont, en tant que telles, pareilles à toutes les autres. Puisque rien ne peut obliger notre esprit à s'arrêter dans cette quête d'une grandeur absolue, c'est le pouvoir d'imagination de l'esprit qui doit déterminer la limite de cette activité. En d'autres termes, l'estimation de la grandeur doit cesser d'être logique, elle doit être esthétique. »

« Si j'estime une grandeur d'une manière logique, je la mets toujours en relation avec ma faculté cognitive; si je l'estime de manière esthétique, je la mets en relation avec ma faculté sensible. Je ne fais que ressentir quelque chose en moi, causé par la grandeur imaginée de l'objet. Dans le premier cas je prends quelque chose en dehors de moi, dans le second quelque chose en moi. Ainsi, dans la réalité, je ne suis plus en train de mesurer, je ne suis plus en train d'estimer la grandeur, mais je deviens pour le moment une grandeur pour moi-même, en fait une grandeur infinie. Cet objet qui m'amène à devenir une grandeur infinie pour moi-même est appelé sublime. »

Pensez en ces termes le développement par Gauss, dans le contexte de ses travaux sur les résidus biquadratiques, du domaine complexe, où il démontre qu'il est actuellement impossible de construire un concept de grandeur dénué de toute dimensionnalité. Comme pour les découvertes que Platon a rendues célèbres dans ses dialogues comme le *Ménon*, le *Théétète* et *Timée*, l'action le long d'une ligne, ou au sein d'une surface, ou d'un volume, est associée, dans chaque cas, à une espèce distincte de grandeur. Ces espèces de grandeur, associées aux variétés d'un nombre de dimensions moins élevée, se retrouvent dans les variétés d'un nombre de dimensions plus élevé, mais le contraire n'est pas vrai. Par conséquent, un paradoxe surgit lorsque l'on tente de mesurer l'action dans une variété d'un nombre de dimensions plus élevé par des grandeurs produites dans des variétés d'un nombre de dimensions moins élevé.

Considérons maintenant cette question du point de vue des opérations simples sur les nombres, comme l'addition, la soustraction, la multiplication et la division. Comme Théétète le rapporte dans le dialogue de Platon du même nom, l'addition des grandeurs de deux dimensions (c'est-à-dire des aires) ne peut être mesurée par des grandeurs d'une seule dimension (c'est-à-dire des lignes) et pourtant, jusqu'à Gauss, toutes les opérations arithmétiques étaient limitées par la supposition sous jacente que les deux variétés pouvaient être mesurées par les mêmes espèces de grandeurs. Ce paradoxe est réapparu depuis la Renaissance, sous la forme du paradoxe associé à la nature $\sqrt{-1}$. Cardan, Leibniz, Huygens et Kaestner ont tous compris que ce paradoxe exigeait la formulation d'un concept plus élevé de grandeur, tandis que Newton, Euler et les autres avaient simplement décrété ce type de grandeur comme « impossibles ».

Pour Gauss, l'action dans une variété de deux dimensions ne peut être mesurée que par des grandeurs de deux dimensions, qu'il a appelées « nombres complexes ». Ces nombres sont déterminés par deux actions, l'extension et la rotation, ou si l'on veut, une action verticale et horizontale simultanée, comme celle d'une bulle

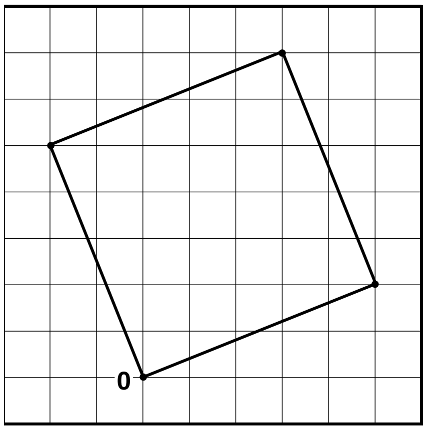


Figure 1.

se déplaçant dans un niveau de charpentier. (Il serait d'ailleurs temps de remplacer, lorsque nous nous référons à une action horizontale et verticale de ce type, le terme de « coordonnées cartésiennes » par le terme plus approprié, d'un point de vue historique, de « coordonnées de Fermat ».)

Examinons maintenant de ce point de vue les concepts de base de l'arithmétique, appliqués aux grandeurs d'une seule et de deux dimensions. Par le concept de congruence de Gauss, tous les nombres sont ordonnancés par rapport à un intervalle qu'ils forment par rapport à un module. Dans une variété d'une seule dimension, cet intervalle correspond à un segment de droite. Mais dans une variété de deux dimensions, cet intervalle a deux composantes, l'une « gauche-droite » et l'autre « haut-bas ». Prenons un exemple tiré du *Traité sur les résidus biquadratiques* de Gauss. Le module 5+2i « découpe » l'ensemble du domaine complexe en une série de losanges dont les côtés sont l'hypoténuse d'un triangle de côtés 5 et 2. Par exemple, le losange dont les sommets sont situés à 0, 5+2i, 3+7i, -2+5i. Tous les nombres complexes contenus dans un même losange ne sont pas congruents les uns par rapport aux autres. [1] Nous pourrions maintenant dessiner des losanges adjacents, par exemple celui dont les sommets seraient 5+2i, 10+4i, 8+9i, 3+7i, ou bien le losange 3+7i, 8+9i, 6+14i, 1+12i. (Ils ne sont pas dessinés ici). Tous les nombres contenus dans un même losange, quel qu'il soit, ne sont pas congruents entre eux, mais chaque nombre d'un losange donné est congruent avec un nombre de chaque autre losange, dont la position relative dans le losange où il se situe est la même que celle du nombre choisi. Par exemple, 2+4i et 7+6i occupent la même position dans leurs losanges respectifs, ils sont par conséquent congruents, car la différence entre eux est le module 5+2i.

Ainsi la périodicité simple générée par les congruences entre les nombres réels est transformée en double-périodicité dans le cas d'un module complexe. Dans une variété d'une seule dimension, la soustraction détermine des intervalles linéaires entre deux nombres, tandis que dans une variété de deux dimensions, la soustraction détermine des aires entre deux nombres.

Gauss a ensuite développé un concept de multiplication « complexe », c'est-à-dire une multiplication de deux dimensions, qui nous oblige à re-conceptualiser ce que l'on nous a enseigné à l'école concernant la multiplication. La multiplication d'une seule dimension fut déterminée par Euclide de la manière suivante :

« 15. On dit d'un nombre qu'il multiplie un autre nombre lorsque celui qui est multiplié est additionné à lui-même autant de fois qu'il y a d'unités dans l'autre, et ainsi un nombre est produit. »

Mais Euclide lui-même admet les limites de ce concept dans la prochaine définition :

« 16. Et lorsque deux nombres produisent, après qu'ils aient été multipliés l'un par l'autre, un autre nombre, le nombre ainsi produit est appelé plan, et ses côtés sont les nombres qui ont été multipliés entre eux. »

Nous avons toutefois découvert, dans le *Théétète*, que l'addition dans une variété d'une seule dimension (des lignes) et l'addition dans une variété de deux dimensions (des aires) ne sont pas la même chose. Comment alors l'addition d'un nombre à lui-même « autant de fois qu'il y a d'unités dans l'autre » (selon la définition 15) peut-elle produire l'aire décrite dans la définition 16 ? Ce paradoxe provient du fait qu'il nous manque un concept de grandeur de dimension multiple.

Ce problème est résolu par le développement d'un concept plus élevé. Si nous regardons de nouveau la série de carré et de rectangles alternés obtenu par le doublement ou le triplement d'une surface, ou bien le développement de la spirale de carrés telle qu'elle est exposée dans le *Ménon*, nous voyons dans les deux cas que l'addition d'aires produit une rotation et une extension. Par exemple, dans la **figure 2**, le carré dont l'aire est de 1 est transformé dans un rectangle d'aire égale à 2, par une action de rotation (de 90°) puis d'extension (multiplication par 2). Pour obtenir un carré de surface 4, il faudra une rotation supplémentaire de 90°, puis une nouvelle extension, et ainsi de suite pour le carré de surface 8, 16, etc.

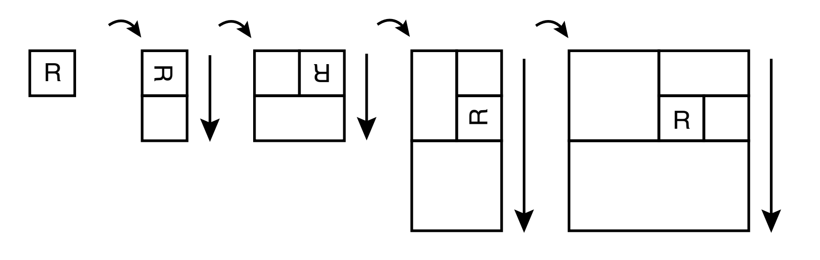


Figure 2. Une série de carrés et de rectangles alternés est produite par le doublement de la surface d'un carré de départ. A chaque fois, nous faisons une rotation de 90° puis une extension (doublement de la longueur).

Comme le disciple de Gauss, Neils Henrick Abel le dît, « pour connaître la vérité, il faut toujours inverser ». Une inversion, dans ce cas-ci, nous montrera le principe général selon lequel une action consistant à additionner des rotations et multiplier des longueurs produit une progression géométrique de grandeurs : 1, 2, 4, 8, 16… Ainsi, dans le domaine complexe, la multiplication est l'action consistant à additionner les rotations et multiplier les longueurs.

Illustrons ceci d'abord avec les nombres premiers, par exemple en multipliant 1+2i par 1-2i. 1+2i, par rapport à 1, dénote une rotation de 63,43°, et une extension linéaire de $\sqrt{5}$. 1-2i dénote, par rapport à 1, une rotation de 63,43° dans le sens opposé et une extension de $\sqrt{5}$. Pour multiplier les deux grandeurs, il faut additionner les angles (ce qui donne 0°) et multiplier les deux extensions : $\sqrt{5}$ x$\sqrt{5}$ = 5. Donc, le nombre 5, un nombre premier dans une variété d'une dimension, est un nombre composé dans une variété de deux dimensions. Par contre, aucune action géométrique de ce genre ne permettra de produire des nombre impairs-impairs comme 7, 11, 19 et autres. [2]

Gauss vit ce paradoxe comme une démonstration pédagogique parfaite du principe selon lequel la nature de la variété détermine la nature des grandeurs. Puisque les nombres premiers produisent tous les nombres par multiplication, mais ne peuvent se produire eux-mêmes de cette manière, Gauss a montré que ces grandeurs qui produisent les autres sont elles-mêmes produites par la variété de dimension supérieure dans laquelle l'action de multiplication a lieu. Certains nombres sont premiers (ce qui est indéniable) mais lorsqu'un nouveau principe (comme celui de dimension) est introduit, même ce qui est indéniable change.

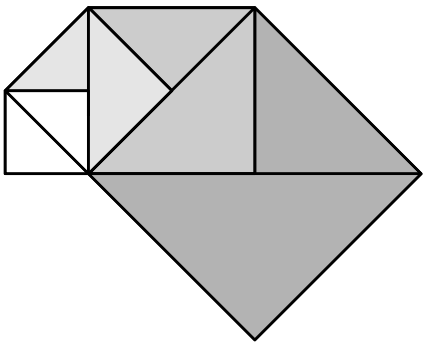


Figure 3. Cette spirale de carrés est obtenue par série de rotations des diagonales (de 45°) et d'extensions simultanées par le facteur $\sqrt{2}$. Tout carré a toujours une surface double de celui qui le précède.

Construisons maintenant une progression géométrique à partir d'un nombre complexe, en multipliant ce nombre par lui-même plusieurs fois. Commençons par exemple par 1+i, qui dénote une rotation de 45° et une extension de $\sqrt{2}$. Multiplions donc 1+i par 1+i. Nous obtenons une rotation de 90° et une extension de 2. Si nous multiplions le résultat par 1+i à nouveau, nous obtenons une rotation de 135° et une extension de 2√2. Nous obtenons, en continuant ce processus, une spirale logarithmique (**figure 3**).

Gauss à démontré à partir de ceci que la périodicité produite par les résidus d'une progression géométrique reflète l'existence de grandeurs provenant d'une variété d'un nombre de dimensions plus élevé.

Du quantum au magnum

Mais avant d'aller plus loin, revenons à Schiller. Dans l'essai mentionné plus haut, Schiller discute d'un paradoxe ontologique crucial confrontant la science lorsqu'elle tente de transcender les suppositions axiomatiques existantes :

« Le pouvoir de l'imagination, comme la spontanéité de l'émotion, accomplit une double tâche dans la conceptualisation de la grandeur. Il rassemble en premier lieu toutes les composantes d'une quantité donnée dans un acte de conscience empirique, qui est l'appréhension ; ensuite, il assemble ces composantes successivement rassemblées en un acte de soi-conscience pure et, lors de cette phase, celle de la compréhension, il agit entièrement comme pur entendement. Ce concept de « Je » (la conscience empirique), se combine en d'autres termes à chaque partie du quantum : et par la réflexion sur ces synthèses successives, je reconnais l'identité de mon « Je » (soi-conscience pure) dans cette série prise dans sa totalité ; de cette façon, le quantum devient en, premier lieu un objet pour moi. Je pense A vers B, puis vers C, et ainsi de suite, et ce pendant que je surveille mon activité, comme si je me disais à moi-même : dans A, comme dans B puis dans C, je suis le sujet qui agit. »

« L'appréhension se fait successivement, et je saisis chaque conception partielle, l'une après l'autre (…). La synthèse cependant, a lieu simultanément, et par le concept d'identité soi-consciente de mon « Je » dans toutes les synthèses précédentes, je transcende de nouveau les conditions temporelles sous lesquelles elles avaient eu lieu. Toutes ces différentes conceptions empiriques tenues par mon « Je » se perdent dans une seule soi-conscience pure ; le sujet, qui avait agi en A, puis B, puis C, et ainsi de suite, est Je, le moi éternellement identique… »

« Si le pouvoir de réflexion transgresse cette limite, et cherche à rassembler des images mentales, qui reposent au-delà cette même limite, dans l'unité de la soi-conscience, il perdra autant en clarté qu'il gagne en grandeur. Entre la circonférence de l'image mentale prise dans son ensemble et la capacité de distinction de ses parties, il y a une relation spécifique et insurmontable, pour quelle raison, dans chaque addition d'un important quantum nous perdons autant vers l'arrière que ce que nous gagnons vers l'avant, et lorsque nous avons atteint la fin, nous voyons le point de départ s'évanouir. »

Schiller ne fait pas référence ici aux quanta qui ont une grandeur simplement en terme de quantité mais, comme Leibniz, Gauss et Riemann le firent aussi, aux quanta conçus comme principes universels :

« Tout ce qui a des parties est un quantum. Toute perception, toute idée formée par la compréhension, a une grandeur, la dernière possédant un domaine et la première un contenu. La quantité en général, par conséquent, ne peut être vue si l'on parle d'une différence de grandeur entre les objets. Ici nous parlons d'une telle quantité comme appartenant spécifiquement à un objet, c'est-à-dire ce qui n'est pas simplement un quantum mais en même temps un magnum. »

Pensons au concept de Schiller par rapport aux découvertes successives de Kepler et de Gauss concernant le mouvement des planètes. Si nous pensons à la position et à la vitesse de la planète à n'importe quel moment, en tant que quantum, elles ne peuvent être dans ce cas déterminées, sauf si ce quantum est une caractéristique de l'ensemble de l'orbite. Dans ce sens, l'» indéterminabilité » de la position et de la vitesse à ce moment devient déterminable, seulement comme intervalle, ou partie, de l'ensemble de l'orbite. La grandeur associée avec cet intervalle est l'aire balayée. Cette grandeur ne peut être mesurée par l'addition successive des vitesses et des positions de la planète qui, en raison du caractère non-uniforme de l'orbite ne sont pas déterminables, mais seulement si ces dernières sont conçues en tant qu'intervalles de l'ensemble.

Ces orbites ne sont toutefois pas définies par elles-mêmes, car leurs dimensions sont indéterminables en tant qu'orbites individuelles. Elles ne le sont plutôt que comme intervalles d'un ordonnancement harmonique de toutes les orbites prises dans leur ensemble. Inversement, cet ordonnancement harmonique ne peut être déterminé par l'addition successive de chaque orbite prise individuellement, mais seulement comme intervalles du tout.

De plus, comme les recherches de Gauss sur les astéroïdes l'ont démontré, ces ordonnancements harmoniques sont eux-mêmes transformés selon un ordonnancement harmonique encore plus élevé.

En d'autres termes, si nous cherchons à déterminer la position et la vitesse de la planète à n'importe quel moment, nous sommes entravés jusqu'à ce que nous acceptions de considérer l'orbite dans son ensemble. Puis, si nous cherchons à déterminer la nature d'une orbite individuelle, nous sommes de nouveaux entravés, jusqu'à nous acceptions de considérer l'ensemble des orbites. Puis ensuite, si nous cherchons à déterminer l'ordonnancement harmonique de toutes les orbites, nous serons encore une fois entravés, jusqu'à ce que nous acceptions de regarder l'ordonnancement de l'ordonnancement harmonique. De ce point de vue, la position individuelle et la vitesse de la planète, qui étaient à l'origine de notre recherche, laissent leur place aux principes sous jacents qui se révèlent à nous.

Du point de vue du calcul différentiel de Leibniz, la différentielle peut être connue seulement comme fonction de l'intégrale. Or, comme l'exprima si bien Schiller, si chaque principe est pensé comme un quantum, il ne peut être mesuré que par rapport à un magnum, qui est à son tour un quantum par rapport à un magnum encore plus élevé, restant à découvrir. Selon la géométrie différentielle de Riemann, c'est le principe plus élevé qui détermine tous ceux qui sont subordonnés.

Ainsi, le principe d'» Esprit » dont parle Kepler, comme principe gouvernant le mouvement des planètes, n'est pas qu'une conception simpliste d'un esprit interagissant entre une planète et le Soleil pris ensemble comme paire, mais plutôt un principe semblable à celui dont parlait Schiller plus haut, qui agit d'un point de vue toujours plus élevé et qui détermine ainsi l'action apparemment indéterminable dans le petit. Les travaux de Gauss sur les résidus biquadratiques, ainsi que le développement subséquent par Riemann de la géométrie différentielle, apportent à notre esprit une capacité pédagogique et/ou épistémologique à appréhender ce concept.

Pour Gauss, comme pour Platon, Fermat et Leibniz, les nombres individuels ne se définissent pas par eux-mêmes, mais sont plutôt définis par un principe supérieur que Gauss appelait congruence. Chaque module définit ainsi certaines « orbites » invisibles au sein desquelles tous les nombres allant de 1 jusqu'au module moins 1 sont ordonnés.

L'ordonnancement au sein de chaque « orbite » est lui-même fonction de la caractéristique du module. Par exemple, si le module est un nombre premier impair-pair, comme 5, 13, 17, etc., -1 est le résidu de la racine élevée à la moitié de la puissance du module moins un, et √- 1 est le résidu de la racine élevée au quart de la puissance du module moins un. Si le module est un nombre premier impair-impair, √-1 n'émerge jamais comme résidu. Cependant, cette caractéristique des nombres premiers n'est pas déterminée par les nombres premiers en tant que tels, mais dépend plutôt de ces « orbites », dont on n'avait pas jusqu'ici soupçonné l'existence, qui déterminent les nombres premiers. [3]

Cette caractéristique du nombre a amené Gauss à rechercher un principe supérieur, principe qu'il a découvert en étendant le concept de nombre, de son statut antérieur de grandeur simplement-étendue à celui, nouvellement défini, de grandeur doublement-étendue, et qu'il a appelé nombre complexe.

L'importance de tout ceci peut être mieux captée à l'aide d'un exemple tiré directement du *Second traité sur les résidus biquadratiques* de Gauss.

Gauss pensait les nombres complexes comme étant projetés sur un plan couvert d'une grille formée de carrés également espacés, dont les sommets correspondent à ce que Gauss a appelé des nombres complexes entiers. Chaque nombre complexe entier est de la forme a+bi, où i représente √-1, et a et b sont des nombres entiers. Gauss a appelé a^2+b^2 la « norme » du nombre complexe. Les nombres premiers gaussiens sont des nombres complexes dont la norme est un nombre premier. Gauss utilise comme exemple le nombre complexe premier 5+4i. Prenant celui-ci comme module, tout le domaine complexe se voit partitionné en losanges, dont les côtés sont les hypoténuses de triangles droits ayant comme base et hauteur 5 et 4 respectivement. Chaque losange contient 41 (5^2+4^2) nombres entiers complexes individuels, qui sont tous incongruents entre eux, relativement au module 5+4i.

(Nous pouvons démontrer cette affirmation en prenant le losange dont les sommets sont les nombres complexes 0, 5+4i, 1+9i, et -4+5i. Aucun couple de nombres choisi à l'intérieur de ce losange ne sera séparé par un intervalle doublement-étendu plus grand que 5+4i. Si nous construisons maintenant un autre losange dont les sommets sont 5+4i, 10+8i, 6+13i, 1+9i, nous constatons qu'aucun nombre pris dans ce losange ne sera congruent avec un autre situé dans ce même losange, mais que chaque nombre du premier losange sera congruent avec un et un seul nombre du second, qui occupera la même position relative dans ce losange. Ainsi, la différence entre les deux nombres sera 5+4i.)

Gauss prend ensuite le nombre 1+2i comme racine primitive de 5+4i. Afin de mieux saisir ce concept, observons ce qui arrive, d'un point de vue géométrique, lorsqu'on élève 1+2i à des puissances successives, dans un nouveau type de progression géométrique. Nous avons d'abord $(1+2i)^0 = 1$; ensuite, $(1+2i)^1 = 1+2i$. Ces deux nombres délimitent un triangle dont les sommets sont situés à 0, 1 et 1+2i. Nous aurons ainsi un triangle droit, avec des côtés de longueur 1 et 2, puis une hypoténuse de √5. L'angle au sommet 0 sera de 63,4349 degrés, l'angle au sommet 1 sera de 90 degrés et l'angle au sommet 1+2i sera de 26,5651 degrés.

Construisons maintenant un triangle similaire à celui-ci, dont l'angle droit se situera au sommet 1+2i, et dont la hauteur s'étendra de 1+2i à -3+4i. Ceci donnera un nouveau sommet à -3+4i, qui est équivalent à $(1+2i)^2$. Répétons le processus en construisant un autre triangle similaire, avec un angle droit situé à -3+4i, le base reliant 0 à -3+4i. La hauteur définit un nouveau nombre complexe, -11-2i, équivalant à (1+2i).

Cette chaîne de triangles droits similaires n'est qu'un cas général de la célèbre chaîne de triangles droits construite par Théodore, comme le rapporte Théétète dans le dialogue hyponyme de Platon.

Chaque sommet de cette chaîne équivaut une nouvelle puissance plus élevée de 1+2i, et est situé sur une spirale logarythmique unique. En d'autres termes, tandis que cette spirale logarythmique se déploie autour du domaine complexe, les nombres complexes qu'elle intercepte sont les puissances de 1+2i. Ainsi, les puissances de 1+2i sont déterminées par un principe supérieur, une action sprirale logarythmique. Il sont comme des moments d'une orbite, ou des orbites dans un système planétaire (**figure 4**).

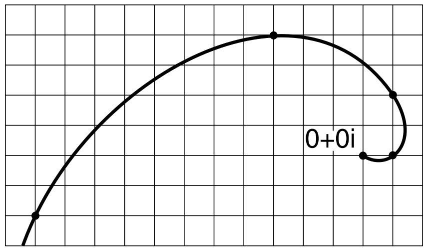
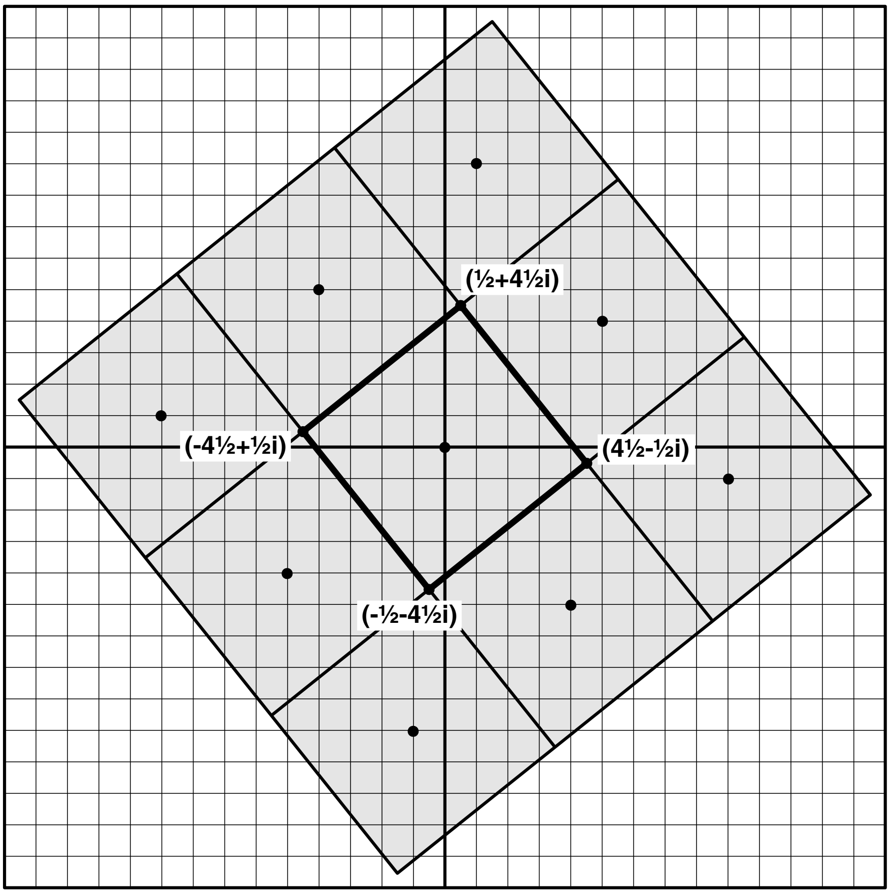


Figure 4.

Gauss continua ce processus en étendant la spirale de façon à obtenir 41 (5^2+4^2) puissances de 1+2i. Il étudia ces points par rapport à un domaine complexe partitionné en losanges de module 5+4i, le premier losange ayant comme centre le point 0 (voir encadré). Ce losange a pour sommets (4½-½i) ; (½+4½i) ; (-4½+½i) ; et (-½-4½i). Pensez maintenant à ces losanges partitionnant l'ensemble du domaine complexe tandis que la spirale se développe à travers celui-ci. Chaque fois que la spirale croise un nombre complexe entier, celui-ce sera nécessairement une puissance de 1+2i, et ce nombre se trouvera à l'intérieur d'un losange particulier. Gaus a démontré que les 40 premiers nombres complexes entiers croisés par la spirale occuperont chacun une place différente au sein de leur losange respectif. En d'autres termes, chaque nombre complexe intersecté par la spirale sera congruent avec un et un seul des nombres complexes entiers contenus dans le losange de départ. Plus important encore, le résidu de la 10e puissance de 1+2i sera congruent avec -i, le résidu de la 20e puissance avec -1, le résidu de la 30e puissance avec i, et celui de la 40e puissance avec 1. Ensuite, le cycle se répétera de nouveau. [4]

Si nous commençons par conséquent avec des nombres pris en tant que tels, nous verrons rapidement qu'ils ne peuvent être auto-déterminés, et nous serons amenés vers ce principe de génération qu'est la congruence. Ces congruences produisent toutefois des « orbites » qui ne peuvent être déterminées par elle-mêmes et nous sommes conduits à découvrir un principe encore plus élevé, celui de grandeur étendue.

Ainsi, à chaque étape successive, les nombres s'estompent tandis que des principes toujours plus élevés se présentent à notre esprit. ■



Notes

1. C'est-à-dire que la différence entre n'importe quelle paire de nombres contenus à l'intérieur d'un losange est toujours plus grande que le module ou qu'un multiple de celui-ci. Certains remarqueront que le sommet 0 semble être congruent au sommet 5+2i et qu'il en va de même pour les sommets -2+5i et 3+7i. Mais ce n'est pas le cas, car il ne faut pas oublier qu'un seul des quatre sommets appartient à notre losange, les autres appartenant à chacun des 3 autres losanges adjacents. (ndt)

2. Les nombres impairs-pairs sont ceux qui suivent les nombres pairs-pairs (qui engendrent un nombre pair lorsqu'ils sont divisés par deux). Les nombres impairs- impairs sont ceux qui suivent les nombres pair-impairs (qui donnent un nombre impair lorsqu'on les divise par deux). (ndt)

3. Nous renvoyons le lecteur à l'article de Bruce Director paru dans le *Fusion* n° 101, « La géométrie arithmétique des nombres complexes ». (ndt)

4. Notons que les puissances 10, 20 et 30 correspondent à 1/4, 1/2 et 3/4 de cycle, et la puissance 40 à un cycle entier des résidus pour le module 5+4i. Ce module contient, nous le rappelons, 41 nombres complexes entiers. (ndt)

Calcul des puissances de 1+2i

Chaque puissance de 1+2i produira un point situé dans un losange différent, et la position relative de chaque point par rapport au losange dans lequel il se situe est différente pour les 40 premiers points.

Notons que les puissances de 1+2i engendrent tous les nombres complexes entiers situés sur une spirale quelconque.

Par exemple, $(1+2i)^1$ nous donne (1+2i), le premier point, situé dans le losange de départ. Le deuxième point, $(1+2i)^2$, est égal à (-3+4i), qui sera situé dans le losange adjacent, légèrement vers la gauche puis vers le haut. Sa situation relative par rapport au centre de ce losange sera (1-i), ce qui signifie que (-3+4i) est congruent à (1-i), ce qui est symbolisé par le signe ≡. (-3+4i) peut donc être substitué par (1-i) pour le calcul de la puissance suivante, et ainsi de suite. Nous obtenons par conséquent le tableau suivant:

$(1+2i)^1 = (1+2i)$
$(1+2i)^2 = (1+2i)(1+2i) = (-3+4i) \equiv (1-i)$
$(1+2i)^3 = (1-i)(1+2i) = (3+i) \equiv (3+i)$
$(1+2i)^4 = (3+i)(1+2i) = (1+7i) \equiv (0-2i)$
$(1+2i)^5 = (0-2i)(1+2i) = (4-2i) \equiv (0+3i)$
$(1+2i)^{10} = ((1+2i)5)2) = (0+3i)2 = (-9+0i) \equiv (0-i) \equiv -i$
$(1+2i)^{20} = ((1+2i)10)2) = (0-i)2 = (-1+0i) \equiv (-1+0i) \equiv -1$
$(1+2i)^{30} = ((1+2i)10)3) = (0-i)(0-i)(0-i) = (0+i) \equiv (0+i) \equiv i$
$(1+2i)^{40} = ((1+2i)20)2) = (-1+0i)2 = (1+0i) \equiv (1+0i) \equiv 1$

(ndT)