

Autour du livre

**Quadrature arithmétique du cercle, de l'ellipse et de l'hyperbole
Gottfried Leibniz**

**Texte introduit, traduit
et annoté par Marc Parmentier
Vrin, 370 pages, 29 euros**

PIERRE BONNEFOY

Voici un ouvrage capital pour comprendre la découverte du calcul différentiel et intégral par Leibniz et qui apporte un complément indispensable au livre *Naissance du calcul différentiel*, également publié chez Vrin et traduit par Marc Parmentier il y a quelques années. Une telle lecture doit aussi, selon nous, s'accompagner de celle des traités de la roulette et du triangle arithmétique de Pascal dont Leibniz a profité de l'héritage lors de son séjour à Paris entre 1672 et 1676.

En fait, Leibniz n'a jamais écrit de traité sur le calcul différentiel à proprement parler, mais a publié de très nombreux textes sur le sujet qu'il a constamment enrichi de découvertes nouvelles. Les plus importants de ces textes sont précisément regroupés dans la *Naissance du calcul différentiel*. On a souvent reproché à Leibniz de ne pas avoir démontré les principes de son calcul comme l'attesterait la sécheresse extrême de son article *Nova Methodus* de 1684 dans laquelle il énonça les règles pour la première fois. Ce reproche était parfaitement injus-

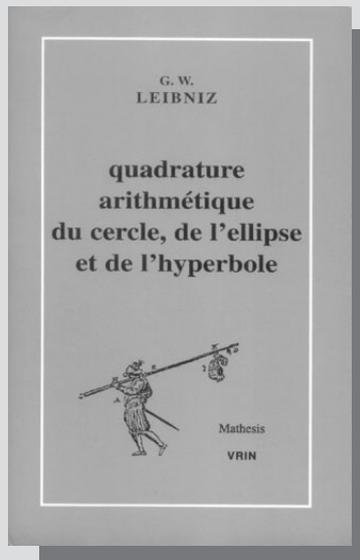
tifié : les principes avaient été rigoureusement démontrés dans un traité rédigé en 1676 qui, paradoxalement, présentait les principes et les méthodes de ce calcul sans introduire le calcul lui-même avec sa célèbre notation que Leibniz venait juste de découvrir ! Ce traité représente donc le franchissement d'une frontière séparant l'ancienne mathématique de la nouvelle. Cependant, ayant dû quitter Paris, Leibniz a laissé derrière lui cette *Quadrature arithmétique* qui ne sera publiée pour la première fois qu'en... 1993 et traduit en français une dizaine d'années plus tard.

Il est important de se rappeler que la principale préoccupation de Leibniz n'est pas simplement de faire des découvertes indi-

viduelles, mais surtout de créer un environnement social dans lequel les découvertes s'enchaînent les unes aux autres. C'est toute la problématique de ses recherches sur l'*art d'inventer*. L'intérêt fondamental du calcul différentiel est qu'il permet de rendre *mécaniques* (c'est-à-dire sans réfléchir) un grand nombre de raisonnements très compliqués sans cela, afin de donner le plus de liberté possible à l'esprit humain pour qu'il se consacre à ce qui est réellement nouveau, et donc pour faciliter la découverte. Il s'agit donc rien de moins pour Leibniz que de provoquer une révolution dans les esprits, laquelle ne peut s'effectuer que par l'élaboration d'un nouveau langage. Dans la *Quadrature arithmétique*,

Leibniz prépare donc cette révolution intellectuelle : il utilise formellement les mots de la géométrie ancienne, mais en généralisant leur signification pour élever les esprits au niveau du nouveau langage qu'il est en train d'élaborer.

Donnons un exemple. Il trouve une solution du célèbre problème de la quadrature du cercle posé depuis Archimède : « *Le rapport d'un Cercle à son Carré circonscrit, soit encore du Quart de cercle à son diamètre, est celui de 1/1 - 1/3 + 1/5 - 1/7 + 1/9 - 1/11, etc., à l'unité.* » On voit apparaître ici une « somme infinie ». Formellement, une telle notion est contradictoire dans les termes : par définition, une somme fait nécessairement intervenir un nombre fini de nombres. Si l'on veut donc utiliser l'expression « somme infinie », il est donc nécessaire de redéfinir rigoureusement, de généraliser, un certain nombre de notions telles que la somme ou l'égalité, ce qui signifie *changer la manière de penser*. Toutefois, cette généralisation est légitime comme l'indique Leibniz car, même s'il est impossible d'écrire tous les termes d'une telle somme, l'esprit humain est néanmoins capable de saisir d'un coup la totalité infinie de cette opération. Et dans le cas de la quadra-



ture du cercle (et même de l'hyperbole), cette généralisation est d'autant plus légitime que Leibniz montre dans la dernière proposition de son traité qu'il est *impossible* d'en donner une d'un type plus simple que la sienne, c'est-à-dire par une expression finie. Renoncer à reconnaître la quadrature de Leibniz comme *exacte*, reviendrait donc à refuser définitivement de donner une quadrature du cercle, ce que la raison humaine ne peut accepter.

Un autre aspect fondamental de cette révolution dans les esprits est implicite dans ce traité mais fort justement soulignée par Marc Parmentier : il s'agit de libérer les géomètres de la cage mentale imposée par la géométrie cartésienne hégémonique à cette époque (comme à la nôtre malheureusement). Ceci apparaît en particulier sur deux questions fondamentales : les courbes dites « géométriques » et la « grille » des coordonnées. Descartes prétendait exclure de sa géométrie toutes les courbes ne pouvant s'exprimer sous la forme d'une équation algébrique ou rationnelle, c'est-à-dire les courbes qu'on qualifie de « mécaniques » comme la fameuse cycloïde, obtenue par la trajectoire d'un point sur un cercle qui roule sur un plan ou un autre cercle (dont Pascal a donné la quadrature), ou « transcendantes » telles que la logarithme ou exponentielle qui apparaît pourtant dès qu'on effectue la quadrature de l'hyperbole. L'hyperbole étant, après la droite, la courbe la plus simple en termes algébriques comme le fait remarquer Leibniz, faudrait-il donc renoncer à en effectuer la quadrature ? Cela laisserait subsister une anomalie dans l'édifice cartésien qui admet l'hyperbole... En fait, ce n'est pas parce

qu'on ne peut pas donner d'expression algébrique ou rationnelle à une courbe qu'on est incapable d'en donner des propriétés et de l'utiliser. La logarithme est précisément une courbe fondamentale comme l'ont montré à multiples reprises Leibniz et Bernoulli dans les années suivantes. Elle possède de nombreuses propriétés remarquables. Par exemple, Leibniz montre dans son traité que sa réciproque – l'exponentielle – donne elle-même sa propre quadrature. Le nouveau calcul permettra donc en quelque sorte à ces courbes transcendantes qui embarrassent l'ancien langage, d'obtenir elles aussi leurs « droits civiques ».

Par ailleurs, la « grille » cartésienne impose un rôle de référence à l'une des variables (nommée l'abscisse). Or, dans la réalité physique, une telle chose n'existe pas : il n'existe aucune référence fixe, tout varie en fonction de tout. C'est pourquoi Leibniz, qui s'intéresse davantage à la réalité qu'aux mathématiques, accorde une très grande importance à ce qu'aucune variable ne joue de rôle privilégié dans son calcul. Cette préoccupation apparaît très nettement dans cette *Quadrature arithmétique* dans laquelle il change à plusieurs reprises de référence passant d'une courbe à sa courbe réciproque, c'est-à-dire qu'il permute les ordonnées avec les « ordonnées réciproques » ou abscisses dans les courbes considérées. Cette considération est capitale, bien que rarement notée, pour comprendre que c'est bien Leibniz, et non pas Newton, qui est le véritable inventeur du calcul différentiel. Dans le « calcul des fluxions » de Newton, l'une des variables est donnée en référence par rapport à toutes les autres : le temps.

Cette contrainte, qui non seulement rend le calcul malcommode dans le cas général, est le reflet d'une erreur fondamentale dans la physique newtonienne : l'hypothèse du temps absolu. Cette hypothèse fautive a été réfutée avec force par Leibniz, avant d'être définitivement rejetée deux siècles plus tard par la physique moderne.

Bien qu'il serait trop long de passer en revue tous les aspects révolutionnaires de ce traité, l'un d'entre eux mérite encore d'être signalé ici, d'autant plus qu'il est à l'origine du titre de l'ouvrage. Leibniz est fasciné par sa découverte d'une particularité fonda-

mentale : les quadratures du cercle et de l'hyperbole font apparaître des sommes infinies qui présentent un étrange air de famille. Il y perçoit quelque chose de fondamental – autre que le fait que ces courbes soient toutes deux des coniques puisque la même remarque ne s'applique pas à la parabole. C'est le signe d'une profonde unité qui laisse présager de nouvelles découvertes dans le futur, concernant les fonctions circulaires et les fonctions hyperboliques. Leibniz a raison, une nouvelle révolution aura lieu un siècle plus tard : celle du domaine complexe de Carl Gauss.

■



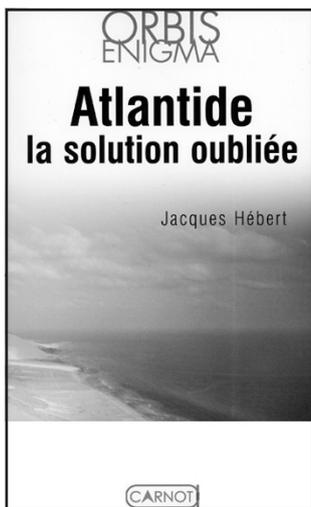
Visions de Mars
Olivier de Goursac
Editions
de la Martinière,
160 pages,
29 euros

Cela ne fait aucun doute : la fascination pour Mars opère toujours. Olivier de Goursac, spécialiste de l'imagerie spatiale, nous offre avec cet ouvrage l'occasion de voir la Planète Rouge sous tous les angles, grâce à 250 photographies inédites d'une qualité exceptionnelle. Le livre est divisé en cinq chapitres – La terre, Le feu, L'eau, L'air, L'Homme – permettant de mieux comprendre la diversité des paysages, comme les pôles de glace, les volcans géants ou les grands canyons martiens. Ce qui est d'ailleurs paradoxal, c'est que plus la résolution des clichés est précise, plus ceux-ci nous intriguent. De plus, alors que l'on remet souvent en cause la place de l'homme dans l'espace, il est appréciable de voir aborder succinctement la terraformation de Mars dans le dernier chapitre.

Il faut également souligner la bonne qualité du texte, comprenant de nombreuses informations précises et instructives, ce qui n'est pas forcément toujours le cas dans ce type de livres.

Il s'agit donc d'une bonne idée de cadeau pour les fêtes de fin d'années ou tout simplement pour se faire plaisir car, une fois que vous aurez refermé ce livre, une question surgira forcément : qu'est-ce qu'on attend pour y aller ?

PM



**Atlantide,
la solution oubliée**
Jean Hébert
Editions Carnot,
192 pages, 18 euros

La découverte en 2002 d'une ville engloutie sur l'ancienne embouchure de l'Indus, dans le golfe de Khambhat en Inde, ville datée de 7500 ans avant notre ère, ne pouvait pas laisser beaucoup de vérités établies en place et devait aussi provoquer d'autres ouvertures.

L'hypothèse de Jean Hébert semble, dans sa matérialisation, être de cette nature. L'auteur affirme avoir trouvé où se situait l'Atlantide. Pour mémoire, le *Timée* et le *Critias* (vers 385 avant J.-C.) de Platon font référence à l'histoire très ancienne du peuple de l'Atlantide, une île puissante, développée et riche.

Toutefois, le plus intéressant n'est pas le « où », mais le « comment », car Hébert, comme il le souligne, n'est « ni archéologue, ni historien, ni géologue pas plus que [...] philosophe ou mythologiste. [...] Je suis policier et j'en suis fier. »

Ce passionné d'archéologie mène donc une enquête avec les prémisses de sa méthode qui sont les suivantes: Platon avait raison; il y a des informations consistantes dans le non-dit (emplacement de

l'île, la base économique des Grecs, des Egyptiens et des Atlantes, etc.); le dit et transmis doivent être revus en fonction des conteurs désirant se faire entendre sur des expériences datant de plusieurs générations et de contextes différents. La psychologie de ces conteurs est donc un élément important.

Il arrive ainsi à débusquer ses preuves à la manière d'Edgar Poe. Non seulement il rétablit les dates des événements, mais il va plus loin que la simple réponse: « Socotra » est l'Atlantide. Il donne un sens à ce conflit entre Grecs d'avant Solon et Atlantes. Il montre que les Etrusques du Liban n'étaient qu'une nouvelle base d'expansionnisme des Etrusques du golfe d'Aden, que sont les Atlantes. Cette fois, c'est le contrôle de la Méditerranée qui était en jeu, et le conflit avec les Grecs, autre peuple de la mer, devenait inévitable. Il voit que les Egyptiens ne retrouvèrent l'accès au golfe d'Aden et à l'océan Indien, qu'après l'effondrement de l'Atlantide. Cet effondrement est bien physique et est décrit par Platon comme un tremblement de terre, catastrophe qui a aussi emporté l'armée grecque victorieuse des Atlantes.

Il prend ainsi le risque d'affirmer une filiation entre les fondateurs de l'Atlantide et la civilisation de l'Indus. Il leur accorde un pouvoir énorme maritime et marchand, grâce à la position stratégique de leur île et à leur maîtrise de l'orichalque. Je ne vous dévoilerai pas ce que c'est, mais là aussi, il sort quelque chose de bien plus solide que l'étain de nos traductions. Bref, si vous voulez faire un beau voyage, dévorez son livre facile à lire, agrémenté de quelques photos et surtout de dessins didactiques de l'auteur. **YP**

FUSION

La science, passionnément!

Directeur de publication

Christophe Lavernhe

Directeur de la rédaction

Philippe Messer

Rédacteur en chef

Emmanuel Grenier

Rédaction

Christine Bierre, Pierre Bonnefoy, Benoit Chalifoux, Marsha Freeman, Pierre-Yves Guignard, Laurence Hecht, Marjorie Hecht, Philippe Jamet, Lothar Komp, Yves Paumier, Rémi Saumont, Ralf Schauerhammer, Gil Rivière-Wekstein, Charles Stevens, Jonathan Tennenbaum.

Conseiller de la rédaction

Jacques Cheminade.

Ont participé à ce numéro

Jean-Louis Bordes, Mary Burdman, Bruce Director.

Dépôt légal

4ème bimestre 2004
Commission paritaire n° 63876
ISSN 0293-5880
Imprimerie Stedi - 75018 Paris

Fusion

53 rue d'Hauteville
75010 Paris
Tél. : 01.42.46.72.67
Fax : 01.42.46.72.60
E-mail : redaction@revuefusion.com
Site : www.revuefusion.com

Fusion est publié par les

Editions Alcuin,
53 rue d'Hauteville - 75010 Paris

Crédit photo

Philippe Messer: couverture, pp.10-11; Esa: couverture, pp.48-49.

Toute reproduction ou représentation intégrale ou partielle, par quelque procédé que ce soit, des pages publiées dans la présente publication, faite sans l'autorisation de l'éditeur est illicite et constitue une contrefaçon. Seules sont autorisées, d'une part, les reproductions strictement réservées à l'usage privé du copiste et non destinées à une utilisation collective et, d'autre part, les analyses et courtes citations justifiées par le caractère scientifique ou d'information de l'œuvre dans laquelle elles sont incorporées (loi du 11 mars 1957 - art. 40 et 41 et Code pénal art. 425). Toutefois, les copies à usage PÉDAGOGIQUE, avec indication de l'auteur et de la source, sont fortement encouragées. Les articles externes sont publiés sous la responsabilité de leurs auteurs.