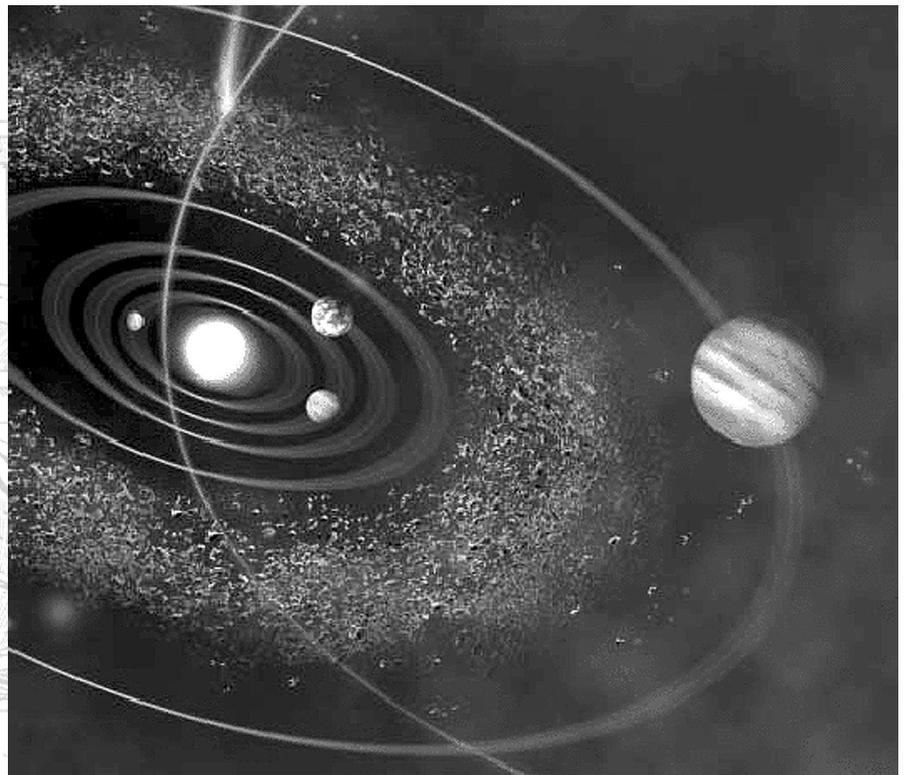


Le Système solaire : un monde harmonique et dissonant

BRUCE DIRECTOR



La ceinture d'astéroïdes, située entre les orbites de Mars et Jupiter, constitue la dissonance majeure de notre Système solaire.

Descartes, Newton, Euler et Kant partagent, de toute évidence, la même qualité : ils étaient d'un ennui mortel. Ces pauvres bougres fuyaient dès qu'ils se trouvaient confrontés aux dissonances et à la tension par lesquelles, dans son processus de développement, l'Univers se révèle à l'esprit humain. A l'instar de leurs confrères vénitiens, qui ne supportaient que des formes de musique dénudées d'intervalles lydiens, ces gens ne pouvaient concevoir que Dieu puisse leur présenter un défi leur permettant d'améliorer leurs capacités

cognitives. Jamais ils n'auraient pu comprendre ce mélange de contrariété et de joie que le poète Schiller associe au sublime. Nous n'avons pas besoin de déterminer ici s'ils étaient ennuyants parce qu'ils haïssaient la dissonance ou si leur haine de la dissonance provenait de leur caractère ennuyant. Cela revient de toute façon au même : les gens ennuyants ne peuvent comprendre Kepler, Leibniz, Kästner, Gauss et Riemann, et parce qu'ils ne peuvent les comprendre, ils deviennent des gens terriblement ennuyants.

C'est dans cet état d'esprit que

↗ nous abordons ici cette dissonance majeure de notre Système solaire que nous appelons « ceinture d'astéroïdes », ainsi que les multiples transformations cognitives que cette découverte produisit par la suite.

L'étude de notre Système solaire est influencée par le fait que celui-ci contient une orbite possédant les caractéristiques de la ceinture d'astéroïdes, et cela avant même que le premier astéroïde ne se présente à l'œil humain. Dans son premier livre, *Mysterium Cosmographicum* (le *Secret de l'Univers*), Kepler avait déjà perçu l'existence d'une anomalie dans la disposition des planètes de notre Système solaire quant à leur distance par rapport au Soleil. Même s'il avait établi que les orbites des planètes étaient disposées, en première approximation, selon les cinq solides platoniciens, cet ordonnancement produisait une anomalie pour la distance entre Mars et Jupiter. Cette anomalie s'était déjà manifestée avant même qu'il n'arrive à son hypothèse polyédrique et l'avait même conduit, selon ses dires, à effectuer cette découverte.

Dans sa quête visant à déterminer pourquoi « *les choses étaient ainsi et pas autrement : [c'est-à-dire] le nombre, le diamètre et le mouvement des cercles [des planètes]* », Kepler observa d'abord la rapport des nombres correspondant aux distances observées entre les orbites planétaires. Toutefois, cette approche échoua. Kepler explique : « *J'ai d'abord essayé une approche d'une audace incroyable. Entre Jupiter et Mars, j'ai placé une nouvelle planète et une autre entre Venus et Mercure, qui étaient peut-être invisibles en raison de leur taille trop petite, et je leur ai assigné une période. [...] Mais l'interposition d'une seule planète n'était pas suffisante pour combler l'immense distance entre Jupiter et Mars.* » N'arrivant pas à trouver une série de rapports numériques correspondant aux distances entre les planètes, Kepler décida de trouver une séquence de polygones inscrits et circonscrits correspondant aux distances observées. Cette approche échoua elle aussi pour la distance entre Jupiter et Mars. Kepler fut alors amené à découvrir la correspondance entre le diamètre, le nombre et le mouvement des orbites planétaires en ayant recours aux solides platoniciens.

L'anomalie entre Jupiter et Mars

Tableau 1

Saturne	(aphélie) : 1'30"	(périhélie) : 2'15"
Jupiter	(aphélie) : 4'30"	(périhélie) : 5'30"
Mars	(aphélie) : 26'14"	(périhélie) : 38'1"
Terre	(aphélie) : 57'3"	(périhélie) : 61'18"
Vénus	(aphélie) : 94'50"	(périhélie) : 97'37"
Mercure	(aphélie) : 147'1"	(périhélie) : 384'0"

persistait même avec l'hypothèse polyédrique, car elle était comblée par le tétraèdre, qui est, parmi les cinq solides platoniciens, son propre complément. ¹

Cette anomalie a forcé Kepler à approfondir son enquête et, lors d'un examen plus attentif de l'orbite de Mars, il découvrit la nature non uniforme des orbites planétaires. Ceci allait cependant conduire Kepler à découvrir une autre dissonance. Les sphères inscrites et circonscrites dans les solides platoniciens déterminaient les distances entre les cercles formant les orbites, mais le problème est, comme allait le découvrir Kepler, que ces orbites ne sont pas circulaires : elles sont excentriques. Cette nouvelle découverte soulevait à son tour une autre question : qu'est-ce qui gouverne les excentricités ou, en d'autres termes, pourquoi l'excentricité d'une planète est-elle celle-ci et pas une autre ?

Comme il écrit dans *l'Harmonie du Monde*, « *En ce qui concerne les rapports entre les orbites planétaires, notamment pour une paire d'orbites voisines, il semble au premier abord que dans chaque cas le rapport soit proche de celui obtenu entre les sphères et l'une des figures solides ; c'est-à-dire le rapport entre la sphère circonscrite à la sphère inscrite des figures. Pourtant, ils ne sont définitivement pas égaux, contrairement à que j'avais promis pour une astronomie éventuellement parfaite [...]*

« *De ceci, nous devons conclure que les véritables rapports des distances planétaires à partir du Soleil ne découlent pas des figures régulières seulement ; car le Créateur, le fondateur actuel de la géométrie qui, selon Platon, pratique la géométrie éternelle, ne se laisse pas déterminer par son propre archétype. Cela peut certainement être dérivé du fait que toutes les planètes changent leurs intervalles sur des périodes de temps*

définis, de sorte que chacune d'entre elles ait deux distances distinctes du Soleil, l'une plus grande et l'autre plus petite ; et la comparaison des distances par rapport au Soleil entre les planètes prises par paires produit quatre grandeurs différentes, en l'occurrence les deux rapports entre les distances les plus éloignées et les plus rapprochées du Soleil, puis les deux autres rapports lorsqu'une planète est plus proche du Soleil et l'autre plus éloignée, ou vice versa. Ainsi, les comparaisons entre paires de planètes voisines sont au nombre de vingt, tandis qu'il n'y a au total que cinq figures solides. Il est pourtant juste que le Créateur, s'il a accordé une attention particulière aux rapports entre les orbites en général, ait aussi pris soin de fixer les rapports entre les variations de distance pour chaque orbite prise individuellement, ainsi que pour toutes les orbites tout en s'assurant qu'elles soient liées entre elles. Suite à cette analyse attentive, nous arrivons à la conclusion qu'il faut, pour établir les diamètres et excentricités des orbites, ajouter de nouveaux principes de base à celui des cinq solides réguliers. »

Ces « *nouveaux principes de base* » découverts par Kepler concernent les relations harmoniques entre les vitesses extrêmes pour deux planètes voisines. La vitesse d'une planète à tout moment est fonction de sa distance par rapport au Soleil à cet instant : la vitesse la plus basse est celle atteinte lorsque la planète est à sa distance maximale du Soleil (aphélie) et sa vitesse la plus grande est celle au moment où elle est à sa distance minimale (périhélie). Ces extrêmes sont eux-mêmes un reflet de l'excentricité de l'orbite de la planète. Le Système solaire a choisi, pour ainsi dire, les excentricités produisant ces vitesses précises, à partir d'un principe de base. Ce principe s'exprime par les relations harmoniques entre les vitesses minimales et maximales

des planètes.

Kepler a mesuré ces vitesses en calculant l'arc de cercle parcouru en une journée par chaque planète lors de son passage à l'aphélie et au périhélie (**Tableau 1**). Lorsque nous comparons les vitesses pour deux planètes voisines, les rapports correspondent à des intervalles musicaux harmoniques. Chaque paire de planètes nous donne deux intervalles : un intervalle convergent entre la vitesse au périhélie de la planète extérieure et la vitesse à l'aphélie de la planète intérieure ; et un intervalle divergent entre la vitesse à l'aphélie de la planète extérieure et la vitesse au périhélie de la planète intérieure. Ces intervalles (**Tableau 2**) correspondent aux intervalles musicaux de Kepler à une exception près : l'intervalle convergent entre Jupiter et Mars dévie des intervalles musicaux de Kepler d'un dièse (ou un quart de ton). Ce dièse est, selon Kepler, « l'intervalle le plus petit par lequel la voix humaine se trouve, dans le contexte d'une mélodie donnée, perpétuellement désaccordée. La différence est plus grande qu'un dièse et plus petite qu'un demi-ton seulement dans le cas de Jupiter et Mars. Il est par conséquent évident que cette concession mutuelle est solidement vérifiée de tous côtés ». ²

Comment se remettre en question

Ceux qui désirent acquérir l'art de changer leurs propres axiomes peuvent ainsi s'inspirer de Kepler et refaire le parcours par lequel il a transformé sa propre pensée, depuis son hypothèse initiale lui ayant permis de connecter les orbites planétaires à l'aide des cinq solides platoniciens, jusqu'à son hypothèse supérieure d'« Harmonie du Monde ».

Pour ce qui concerne le mouvement des planètes, Kepler découvrit plus tard que son concept initial devait être remplacé par un « principe plus fondamental ». Le mouvement non uniforme (c'est-à-dire excentrique) des planètes montrait que leurs orbites n'étaient pas des cercles fixes, comme ceux que l'on trouve dans les sphères circonscrites et inscrites aux solides platoniciens. Les orbites étaient plutôt des régions dans lesquelles les planètes se déplaçaient de

Tableau 2

Saturne-Jupiter	divergent 1/3	convergent 1/2
Jupiter-Mars	divergent 1/8	convergent 5/24
Mars-Terre	divergent 5/12	convergent 2/3
Terre-Vénus	divergent 3/5	convergent 5/8
Vénus-Mercure	divergent 1/4	convergent 3/5

façon non uniforme, s'approchant et s'éloignant du Soleil au cours de leur période de rotation. Ainsi, les solides ne permettaient pas d'expliquer ces excentricités.

Quel était le principe déterminant ces excentricités ? Cette question soulevait un problème très différent de celui consistant à simplement déterminer les distances entre les orbites planétaires. En d'autres termes, quelle est l'unité de mesure d'une orbite non uniforme ? Le principe des aires égales de Kepler nous fournit la réponse pour une orbite prise individuellement. Mais qu'en est-il pour les intervalles entre des orbites excentriques ? Le troisième principe de Kepler (celui selon lequel la distance du Soleil est égale à la période élevée à la puissance 3/2) est une première approximation d'une telle mesure, mais il ne permet pas de déterminer pourquoi nous avons « ces excentricités et pas d'autres ».

Kepler a compris que l'excentricité de l'orbite d'une planète est déterminée, de façon unique, par ses points singuliers, en l'occurrence la vitesse maximale à l'aphélie et la vitesse minimale au périhélie. Ces mouvements extrêmes reflètent l'intention déterminée par l'action de la planète dans les intervalles impliqués. En d'autres termes, de combien la planète accélère-t-elle à chaque moment, de l'aphélie au périhélie ? Ceci est fonction de ce qu'elle deviendra au périhélie et inversement, de l'intervalle entre le périhélie et l'aphélie. Ainsi, le principe déterminant ces extrêmes détermine à son tour l'excentricité caractéristique de l'orbite dans son ensemble, qui détermine à son tour les distances entre les orbites planétaires.

Comme le dit Kepler : « Ce fut une bonne chose que les distances entre les figures solides cèdent la place aux relations harmoniques, ainsi qu'à l'harmonie plus grande entre les paires de planètes, de même qu'aux harmonies universelles dans leur ensemble,

autant qu'il fut nécessaire. »

Puisque Kepler est presque unique parmi les scientifiques dans sa façon de nous présenter non seulement sa découverte, mais aussi par la manière dont il fut amené à transformer sa propre pensée, nous citons ici un long extrait de sa conclusion de *L'Harmonie du Monde* : « Parce que là où il y a un choix entre des choses différentes qui refusent toutes de céder la place au bénéfice exclusif de l'une d'entre elles, ce qui a de plus élevé doit dans ce cas être ce que l'on préfère, et ce qui est plus bas doit se désister, autant que nécessaire, comme le terme même de "cosmos", qui signifie "décoration", semble nous dicter. La décoration harmonique prend autant d'élévation par rapport à la simple géométrie, que la vie par rapport au corps, ou la forme par rapport à la matière.

« De la même façon que la vie complète les corps des êtres animés – parce qu'ils sont nés pour la mener, selon l'archétype du monde, qui est l'essence divine –, ainsi le mouvement mesure-t-il les régions associées aux planètes, à chacune la sienne, de même qu'une région a été assignée à une étoile de façon à ce qu'elle puisse se déplacer. Mais les cinq solides, en vertu du monde lui-même, se rapportent aux espaces définis par les régions, à leur nombre et au nombre de corps ; mais les harmonies se rapportent aux mouvements. Encore un fois, comme la matière est diffuse et illimitée en tant que telle, et que la forme est limitée, unifiée, étant elle-même la limite de la matière ; de même, le nombre de proportions géométriques est infini, tandis que les harmonies sont peu nombreuses. [...] Par conséquent, de la même manière que la matière dérive de la forme, comme une pierre brute, d'une taille adéquate, dérive de l'Idée de la forme humaine, ainsi les proportions géométriques dans les figures dérivent des harmonies ; non pas qu'elles nous permettent de les construire et de leur donner forme, mais parce cette matière

↗ s'ajuste bien à cette forme, comme la taille particulière de cette pierre à cette effigie, et aussi la proportion de cette figure à cette harmonie, et de telle sorte qu'elles puissent être construites et façonnées encore plus, la matière par sa propre forme, la pierre par le ciseau qui lui donnera l'apparence d'un être animé, mais la proportion des sphères des figures par leur propre harmonie, celle qui s'en approche et s'y ajuste le mieux.

« Ce qui a été dit jusqu'à maintenant sera clarifié par l'histoire de mes découvertes. Lorsque je me suis engagé, il y a vingt ans, dans cette étude, je me suis d'abord demandé si les cercles individuels des planètes étaient séparés par des distances égales l'une de l'autre (car selon Copernic les sphères sont séparées et ne se touchent pas mutuellement). Evidemment, je n'ai pas envisagé qu'il puisse exister quelque chose de plus splendide que cette relation d'égalité. Cependant, il manquait une tête et une queue, car cette égalité matérielle ne fournissait aucun nombre défini pour les corps en mouvement, aucune grandeur définie pour les distances. J'ai alors pensé aux similarités des distances par rapport aux sphères, c'est-à-dire à leurs proportions. Mais je me trouvai confronté au même problème, puisque même si les distances émergent entre les sphères étaient effectivement inégales, elles n'étaient toutefois pas inégalement inégales, comme Copernic l'aurait exigé ; la grandeur des proportions et le nombre des sphères n'étaient pas non plus définis. Je passai alors aux figures planes régulières ; elles produisaient les distances imputables aux cercles auxquels elles étaient associées, mais ici non plus, toujours pas de nombre défini. J'en vins alors aux cinq solides ; dans ce cas, ils produisirent à la fois un nombre défini de corps et des intervalles de presque la bonne grandeur, qui m'amènèrent même à questionner l'exactitude de l'astronomie elle-même. L'exactitude de l'astronomie s'est améliorée au cours de vingt dernières années et voyez le résultat ! Il restait encore une différence entre les distances et les figures solides, et les raisons de la distribution inégale des excentricités entre les planètes n'émergèrent pas encore. Bien sûr, dans cette maison du cosmos, je ne cherchais que les pierres d'une forme plus élégante, mais d'une forme se mariant aux pierres, sans savoir que l'Architecte leur avait donné

la forme de l'effigie précise et complète d'un corps vivant. Ainsi, petit à petit, surtout au cours de ces trois dernières années, j'en arrivai à me pencher sur les harmonies, désertant les figures solides et leurs fins détails, à la fois parce que les premières étaient basées sur les parties d'une forme déjà finalisée par la main ultime qui l'a façonnée, tandis que les figures ne sont basées que sur la matière qui, dans le cosmos, est le nombre de corps et la largeur brute des espaces qu'ils occupent, et aussi parce que les premières fournissaient les excentricités, tandis que les dernières ne les envisageaient même pas. Ce qui revient à dire que les premières nous donnaient le nez et les lèvres, de même que les autres membres de la statue, pour laquelle ces dernières n'avaient prescrit que la quantité externe de masse brute.

« Par conséquent, tout comme les corps des êtres animés n'ont pas été faits, et la masse d'une pierre n'est habituellement pas faite selon les normes pures de quelque figure géométrique, mais quelque chose est retiré de la forme ronde externe, peu importe son élégance de départ (même si la bonne quantité de matière demeure), de façon à ce que le corps puisse recevoir les organes nécessaires à la vie, et la pierre l'apparence d'un être animé, de même aussi la proportion, que les figures solides devaient prescrire aux sphères planétaires, d'un rang moins élevé, et n'ayant égard qu'à un corps de taille donnée et à sa matière, doit avoir cédé la place aux harmonies, autant qu'il le faut pour que les premières puissent s'en rapprocher et orner les mouvements des globes. »

Un principe encore plus fondamental

Ainsi, les proportions géométriques des solides sont moins importantes que le principe encore plus fondamental des harmonies. Quel est maintenant le principe qui détermine ces harmonies ? Kepler affirma lui-même que les proportions harmoniques étaient déterminées par l'oreille et non par des valeurs numériques. Mais vers quoi l'oreille se tourne-t-elle ? Vers les principes universels de la méthode de composition artistique classique, comme les compositions polyphoniques bien

tempérées de Jean-Sébastien Bach. C'est du domaine de ces compositions (celui des idées) que proviennent les valeurs des intervalles bien tempérés, et ces intervalles déterminent à leur tour les proportions harmoniques à partir desquelles les orbites planétaires dérivent les excentricités.

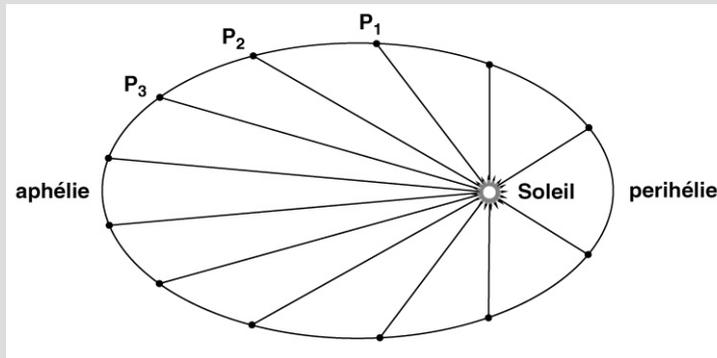
Avec la découverte, par Piazzi, de l'astéroïde Cérès, et la détermination subséquente par Gauss de l'ensemble de son orbite, puis la découverte des astéroïdes Pallas, Juno et Vesta, les conjectures de Kepler se trouvaient confirmées de façon éclatante. Le mouvement de chaque astéroïde était conforme aux principes déterminés par Kepler, car ils se déplaçaient selon des trajectoires elliptiques de façon à ce que des aires égales correspondent à des périodes de temps égales et, en plus, que leurs distances moyennes du Soleil soient égales à la puissance 3/2 de leurs périodes de révolution totale.

Cette découverte allait toutefois ajouter une autre complication : il devint dès lors possible de mesurer, pour ces orbites, des variations cycliques de leurs excentricités, des variations qui avaient aussi lieu dans le cas des orbites planétaires, mais qui n'avaient été ni observées ni mesurées jusque là. De plus, contrairement aux orbites des principales planètes qui s'enferment les unes dans les autres, les orbites des astéroïdes s'entrecroisaient. Par exemple, Pallas était à son périhélie plus proche du Soleil que Cérès, mais à l'aphélie Cérès était plus proche du Soleil que Pallas. Cet entrecroisement laisse penser que les orbites des astéroïdes sont multiples et forment en même temps un tout, une seule orbite képlérienne. Quel est, dans ce cas, le principe encore plus fondamental gouvernant notre Système solaire, puisqu'il est maintenant établi qu'il contient un nouveau type d'orbites, celui des astéroïdes ?

Les premiers travaux ayant trait à cette question furent accomplis par Carl Gauss, dont les investigations sur la variabilité des excentricités et leur entrecroisement l'amènèrent à développer de nouvelles métaphores mathématiques qui, comme pour le calcul différentiel de Leibniz, eurent des applications allant bien au-delà des paradoxes originaux qui en furent l'origine. Le changement dans les excentricités conduisit Gauss à concevoir chaque orbite comme un anneau elliptique sur l'ensemble duquel se trouvait répartie la masse de

L'aphélie et le périhélie. Que trouve-t-on dans un moment ?

Dans le cas d'une orbite képlérienne, chaque moment dans le parcours de la planète implique un changement dans sa vitesse et sa trajectoire. Ce changement est guidé par l'hypergéométrie sous-jacente au Système solaire pris dans son ensemble, celle qui a déterminé en premier lieu la forme de l'orbite. En d'autres termes, cette hypergéométrie produit un changement dans la vitesse et la trajectoire de la planète, selon un



Au voisinage du périhélie, la région la plus proche du Soleil, la planète se déplace plus vite, parcourant une plus grande distance sur l'orbite ; alors qu'au voisinage de l'aphélie, plus éloignée du Soleil, elle se déplace plus lentement, parcourant une plus courte distance.

principe dérivé des caractéristiques de l'hypergéométrie, et ce à chaque instant du parcours de la planète. Kepler a montré que le principe gouvernant ce changement de vitesse et de trajectoire prenait la forme d'une loi selon laquelle des périodes de temps égaux correspondaient à des aires égales (les aires considérées ici étant celles balayées par la droite reliant la planète au foyer de son orbite).

Ceci provoque toutefois un paradoxe : dans n'importe quel intervalle de l'orbite, aussi petit soit-il, la planète agit différemment à la fin de l'intervalle qu'à son début, à l'exception de l'intervalle minimal et l'intervalle maximal. L'intervalle maximal correspond à l'orbite entière. Dans ce cas, du moins en première approximation, la planète agit de la même manière au début et à la fin de l'intervalle, comme par exemple pour l'intervalle s'étendant du périhélie au périhélie. L'intervalle minimal correspond, quant à lui, au moment de changement. Dans ce moment, la planète cesse de faire ce qu'elle faisait et commence à être ce qu'elle sera. Paradoxalement, le commencement et la fin de chaque moment, comme pour l'orbite entière, sont aussi égaux. Le type de changement subi par la planète à chaque moment est toutefois déterminé par l'orbite entière. Ainsi, l'intervalle maximal coïncide avec l'intervalle minimal.

Du point de vue du calcul différentiel de Leibniz, l'intégrale est le maximum vu depuis le minimum et, inversement, la différentielle est le minimum vu depuis le maximum.

Ce concept fut également exprimé par Nicolas de Cues dans son *De la docte ignorance*, livre II : « Ainsi le repos est l'unité, et il enferme en lui le mouvement, lequel n'est qu'une série ordonnée de repos, si tu observes avec un peu de subtilité. Donc, le mouvement est le développement du repos. Ainsi le « maintenant » ou présent, enferme en lui le temps : le passé fut présent, le futur sera présent ; donc on ne trouve dans le

temps que du présent en ordre. Donc, passé et futur sont le développement du présent, le présent enferme en lui tous les temps présents, et les temps présents ne sont que son développement dans une série, et l'on ne trouve en eux que du présent. Donc, il n'y a qu'un seul présent qui enferme en lui tous les temps, et, à la vérité, ce présent est l'unité elle-même. Ainsi l'identité enferme en elle, implique la complexité ; l'égalité, l'inégalité ; la simplicité, les divisions ou distinctions. Donc, l'implication est une

il n'y a pas une implication pour la substance, une autre pour la qualité, une troisième pour la quantité et ainsi de suite, parce qu'il n'y a qu'un seul maximum, avec qui coïncide le minimum et dans lequel diversité impliquée n'est pas opposée à identité qui implique. En effet, comme l'unité précède l'altérité, ainsi le point, qui est perfection, précède la grandeur ; car le parfait précède toute imperfection, comme le repos, le mouvement ; l'identité, la diversité ; l'égalité, l'inégalité, et ainsi de suite pour toutes les autres choses qui se convertissent avec l'unité, laquelle est l'éternité même ; en effet, il ne peut pas y avoir plus d'un éternel. Donc, Dieu enferme tout en lui, en ceci que tout est en lui ; et il est le développement de tout en ceci que lui-même est en tout. »

Les moments ne sont toutefois pas tous les mêmes. Dans le cas d'une orbite planétaire, alors qu'à tout moment la vitesse et la trajectoire de la planète changent, il existe deux moments uniques au sein desquels ce changement est une transformation complète, qui sont l'aphélie et le périhélie. Dans le premier, l'action de la planète change du ralentissement à l'accélération tandis que dans le second l'action change de l'accélération au ralentissement. Ces deux moments sont ce que nous appelons des singularités. Le changement subi par la planète au cours de tous les autres moments est ainsi déterminé par ces deux singularités, l'aphélie et le périhélie.

Comme le montra Kepler, ces singularités sont déterminées par un principe plus élevé de l'hypergéométrie sous-tendant le Système solaire. Le fait que ces singularités existent est caractéristique de l'excentricité des orbites, et le fait que les orbites présentent cette relation précise avec ces singularités est caractéristique de l'existence d'un principe encore plus fondamental, ce principe harmonique gouvernant le Système solaire dans son ensemble.

la planète, ou de l'astéroïde, en accord avec la loi des aires égales de Kepler.

Gauss s'appliqua aussi à déterminer les répercussions de cet entrecroisement des orbites sur les caractéristiques du Système solaire dans son ensemble. Il s'attaqua à ce

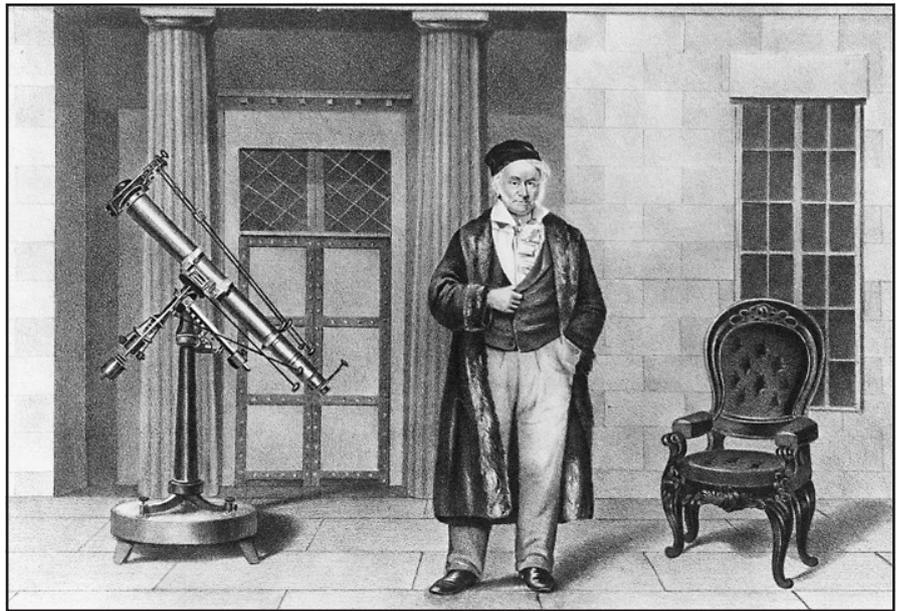
problème dans un article de 1804 intitulé « Sur la détermination des positions géocentriques des planètes », dans lequel il étudia le problème dans le sens inverse de ce qu'il fut amené à faire dans la détermination de l'orbite de Cérès. Dans ce dernier cas, Gauss

disposait des quelques positions géocentriques pour Cérès, à partir desquelles il devait déterminer son orbite héliocentrique. Il faisait maintenant face au problème inverse. Pour cela, il se tourna explicitement vers Leibniz et la « géométrie de position » de

↳ Lazare Carnot.

Chaque planète ou astéroïde accomplit un circuit à travers le zodiaque³. Mais puisque la Terre est elle aussi en déplacement, le zodiaque change sa position par rapport à l'observateur terrestre. Par conséquent, le lieu de toutes les positions géocentriques d'une planète ou d'un astéroïde forme une zone sur la sphère céleste, que Gauss appela *zodiacus*. La détermination des frontières de cette zone exigeait la construction d'une fonction permettant de projeter sur la sphère céleste les changements des positions héliocentriques de la planète et de la Terre. Non seulement Gauss arriva à calculer les valeurs particulières de cette fonction mais, encore plus important, il s'appliqua à examiner les caractéristiques générales de cette fonction. Il montra que la nature de ce *zodiacus* dépendait de la relation entre l'orbite de la planète étudiée et celle de la Terre ; l'orbite de la planète se trouvait soit complètement à l'intérieur de celle de la Terre, soit complètement à l'extérieur, ou bien les deux orbites s'entrecroisaient. Gauss montra que les deux premières situations engendraient un *zodiacus* délimité par des frontières définies et que, dans le troisième cas, ces frontières ne pouvaient être déterminées. Il nota, ironiquement, que les implications de ce paradoxe n'avaient pas été remarquées, car aucune planète ou astéroïde n'avait été observée dans des endroits imprévus comme ceux se trouvant près des pôles de l'écliptique. Gauss pointait néanmoins vers l'existence d'un principe crucial qui sera repris plus tard par Bernhard Riemann. Ce principe stipulait que les orbites qui s'enferment les unes dans les autres définissent une géométrie complètement différente de celles qui s'entrecroisent.

Voyons maintenant quelles sont les implications de l'entrecroisement des orbites des astéroïdes sur les proportions harmoniques de Kepler. Des calculs préliminaires accomplis par cet auteur pour dix astéroïdes montrent que lorsque les vitesses extrêmes de chaque astéroïde sont comparées à celles de Jupiter et de Mars, on trouve des proportions harmoniques similaires à celles découvertes par Kepler. Les intervalles convergents et divergents de chaque astéroïde par rapport à Jupiter correspondent aux intervalles considérés par Kepler comme consonants. Pour le cas de



Carl Gauss. La détermination des frontières du *zodiacus* exigeait la construction d'une fonction permettant de projeter sur la sphère céleste les changements des positions héliocentriques de la planète et de la Terre. Non seulement il arriva à calculer les valeurs particulières de cette fonction mais il s'appliqua à examiner ses caractéristiques générales.

Mars, les intervalles divergents sont consonants, tandis que les intervalles convergents correspondent au dièse que Kepler trouva entre Mars et Jupiter.

Un problème surgit toutefois pour les intervalles générés entre les astéroïdes eux-mêmes : puisque leurs orbites s'entrecroisent, la notion d'intervalles divergents et convergents prend une signification différente de celle appliquée aux intervalles entre les principales planètes. Par exemple, comment pouvons-nous décrire la situation lorsque Cérès converge vers Pallas ou en diverge ? Lorsque les deux s'éloignent en même temps du Soleil, Cérès se rapproche de Pallas, tandis que lorsque qu'ils se rapprochent du Soleil, les deux astéroïdes divergent l'un de l'autre. Contrairement aux planètes principales, cependant, le point de divergence et de convergence n'est pas situé aux positions extrêmes des orbites. Et puisque les excentricités des orbites astéroïdales changent, l'endroit où elles passent de la convergence à la divergence change lui aussi. Imaginez maintenant la multiplicité des connections possibles se développant dans la relation entre plusieurs astéroïdes, plutôt qu'entre seulement deux.

Cette caractéristique ne se limite pas à la ceinture d'astéroïdes. Le Système solaire est en fait rempli d'or-

bites qui s'entrecroisent, incluant des orbites d'astéroïdes traversant celle de la Terre. Des intersections de ce type suggèrent l'existence d'un nouvel ensemble de relations harmoniques, rappelant les transformations que nous rencontrons dans les derniers quatuors de Beethoven, composés à partir du principe de polyphonie bien tempérée de Jean-Sébastien Bach. ■

Notes

1. Le tétraèdre est, contrairement aux autres solides platoniciens, son propre complément, car le nombre de ses sommets correspond au nombre de ses faces. Cela signifie que si l'on relie les centres de toutes ses faces par des segments de droite, nous obtenons à nouveau un tétraèdre. Le cube et l'octaèdre sont par conséquent complémentaires entre eux, et il en va de même pour l'icosaèdre et le dodécaèdre.

2. Une autre façon de décrire cette anomalie a été présentée par Jonathan Tennenbaum : si l'on extrapole le rapport des distances entre Mars et la Terre vers l'extérieur du Système solaire, nous obtenons deux orbites différentes entre Mars et Jupiter. Par contre, si nous extrapolons le rapport des distances entre Jupiter et Saturne vers l'intérieur, nous n'obtenons qu'une seule orbite possible entre Mars et Jupiter.

3. Le zodiaque est un ensemble de douze constellations à travers lesquelles passe l'écliptique, ou le trajet du Soleil dans les ciels.