La géométrie arithmétique des nombres complexes

BRUCE DIRECTOR

$$\sqrt{-1}$$

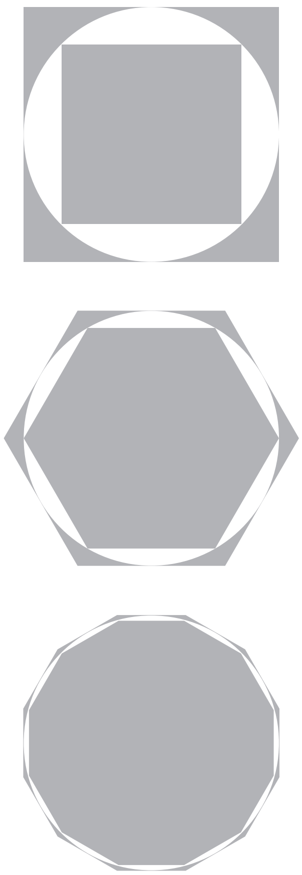
Quand on pense à l'état d'esprit requis pour saisir le calcul différentiel de Leibniz et son développement subséquent par Kästner, Gauss et Riemann, on pourrait paraphraser Héraclite en disant que « rien n'est amusant, sauf le changement ». Inversement, celui qui s'entête à ne pas reconnaître l'importance de cette maxime et de son corollaire – « sans amusement, il n'y a pas de changement » – restera enfermé dans le culte immuable d'Isaac Newton, où le seul espoir est... de changer.

A l'instar de la découverte originale du calcul différentiel par Leibniz, les percées tout aussi révolutionnaires de Kästner, Gauss et Riemann furent le résultat d'une longue démarche. Comme d'habitude, la question peut être présentée de manière pédagogique du point de vue de Kepler.

La découverte par Kepler du mouvement non uniforme des planètes sur leur orbite était accompagnée d'un paradoxe, selon lequel les caractéristiques de l'orbite de la planète étaient connaissables malgré le fait qu'elles ne pouvaient être calculées de manière précise. Dans sa *Nouvelle Astronomie*, Kepler introduisit ce paradoxe sous la forme d'un défi laissé aux géomètres à venir. Ce défi remettait en question un système mathématique qui se bornait à déterminer des positions définies seulement par rapport à d'autres positions. Il était impossible, de ce point de vue, de déterminer une caractéristique de changement. Cependant, pour Kepler, Leibniz, Gauss et Riemann, le changement était une caractéristique de l'esprit tout comme de l'univers physique. Plutôt que de mesurer des positions comme l'exigeaient les mathématiques alors existantes, Leibniz inventa une méthode de calcul qui permettait de mesurer les caractéristiques du changement responsables des différentes positions occupées par la planète. Gauss et Riemann étendirent cette nouvelle méthode de calcul, de manière à pouvoir mesurer les caractéristiques du changement produisant le changement, lequel produisait les diverses positions. En d'autres termes, l'orbite était mesurée par une caractéristique globale de changement (l'intégrale), pour laquelle chaque moment était exprimé par une fonction (différentielle). Toutefois, cette orbite était elle-même une fonction d'une caractéristique d'un processus plus élevé. C'est sur les caractéristiques de ce processus que se sont concentrés Gauss et Riemann, lesquelles seront développées plus loin.

Les problèmes « impossibles » des mathématiques

L'étude de problèmes mathématiques pour lesquels on était incapable de trouver des solutions remonte à l'époque reculée de la Grèce classique, comme l'illustrent les célèbres problèmes du doublement du cube, de la trisection d'un angle, de la quadrature du cercle et de la construction d'un heptagone (un polygone à 7 côtés). On ne trouva aucune méthode permettant de résoudre ces problèmes de manière rigoureusement connaissable, dans le sens où Platon définit le principe de « connaissabilité » dans ses dialogues.



Nicolas de Cues montra que l'incapacité à résoudre le problème de la quadrature du cercle provenait d'une déficience du système mathématique dans son ensemble aussi longtemps que le système n'admettait pas l'existence de grandeurs transcendantales.

Par exemple, comme l'indique l'étude des travaux de Nicolas de Cues sur la quadrature du cercle [1], le cercle ne pouvait être précisément mesuré par des grandeurs rectilinéaires. Le Cusain montra que l'incapacité des géomètres à résoudre le problème de la quadrature du cercle ne provenait pas du fait que l'on avait été incapable de découvrir jusqu'alors une méthode au sein des mathématiques existantes, mais qu'elle provenait plutôt d'une déficience du système mathématique dans son ensemble aussi longtemps que le système n'admettait pas l'existence de grandeurs transcendantales. Celles-ci étaient impossibles dans le domaine des grandeurs rectilinéaires. Et pourtant ces grandeurs « impossibles » provenaient d'un principe bien réel, celui de l'action circulaire. L'existence du cercle pouvait être conçue comme réflexion d'un principe distinct, mais il était impossible de le mesurer avec des mathématiques qui l'excluaient. Une transformation complète du système des mathématiques devait d'abord être accomplie, nous permettant de passer d'une mathématique fondée sur un seul type de grandeurs – rectilinéaires [2] – à une mathématique intégrant deux types de grandeurs – rectilinéaires et transcendantales. Cela ne signifie pas que le Cusain rendit les grandeurs transcendantales possibles, mais qu'un système de mathématiques qui les excluait n'était plus acceptable.

Comme pour la quadrature du cercle, l'incapacité des géomètres de doubler le volume d'un cube, de diviser un angle en trois parties égales ou de construire un heptagone résultait de l'« impossibilité » de construire une grandeur appropriée, « connaissable », au sein du système de mathématiques donné.

De nouveaux efforts pour résoudre ces problèmes furent entrepris à la suite de la révolution accomplie par le Cusain. Ces efforts allaient mener à leur tour aux idées révolutionnaires de Gauss et de Riemann. Cette histoire est rapportée par Kästner dans son *Histoire des mathématiques* (publiée en 1796), une source beaucoup plus fiable que les traités d'histoire généralement disponibles aujourd'hui, qui ont la fâcheuse tendance à tout regrouper sous l'appellation générique d'« histoire de l'algèbre ». Kästner fait ici une distinction entre les habitudes des mathématiciens se contentant de simplement calculer avec des symboles et les efforts des chercheurs visant à développer une compréhension plus approfondie de la nature des proportions. Se référant au premier type de mathématiciens, Kästner relate l'histoire, inspirée du *Don Quichotte* de Cervantès, du licencié aristotélicien Sampson Carrasco qui, croyant Don Quichotte fou, prétend être fou lui-même pour tenter de le convaincre d'abandonner sa vie de chevalier errant. Ayant adopté le système de Don Quichotte, Carrasco se trouve pris dans un duel avec le chevalier fou et finit par se faire infliger une raclée. Humilié et se retrouvant avec des côtes cassées suite à sa défaite, Carrasco fait appel à l'aide d'un algébriste [3]. Pour le deuxième type de mathématiciens, Kästner raconte comment les Grecs ont essayé de mieux comprendre les implications plus profondes du concept de puissance, tel qu'il fut développé dans le *Théétète* de Platon. Une telle démarche fut poursuivie par Luca Pacioli et Girolamo Cardan (1501-1576), dont le père aurait été selon certaines sources un collaborateur de Léonard de Vinci.

Premières apparitions des nombres « impossibles »

Dans son étude des relations entre les carrés et les cubes, Cardan découvrit des grandeurs considérées comme « impossibles » au sein du système de l'algèbre prévalant alors. L'exemple de Cardan était que si l'on *« essaie de diviser 10 en deux parties, de telle sorte que l'une multipliée par l'autre produise 30 ou 40, il est évident qu'un tel cas est impossible. Pourtant, nous allons le résoudre de cette façon [...] »*.

La solution de Cardan consistait à multiplier la grandeur $(5 + \sqrt{-15})$ par la grandeur $(5 - \sqrt{-15})$, pour produire 40, ou $(5 + \sqrt{-5})$ par $(5 - \sqrt{-5})$ pour produire 30. Mais étant donné le fait que la racine carrée d'une valeur négative était considérée comme « impossible » dans le système de l'algèbre, Cardan conclut : *« Cette subtilité résultant de l'arithmétique est, comme je l'ai dit, aussi subtile qu'elle est inutile. »*

La question fut donc posée de nouveau : ces grandeurs sont-elles « impossibles » ou est-ce le système – incapable de les produire – qui est « impossible » ? La manière dont cette question fut approchée nous permet de distinguer les vrais penseurs (ceux qui savent s'amuser) des fraudeurs.

Ainsi, par exemple, dans ses travaux portant sur ces mêmes questions, Descartes maintint que la racine carrée d'un nombre négatif était impossible. Pour sa part, Leibniz écrivit en 1673 dans une lettre à Huygens qu'il avait trouvé le résultat suivant : $\sqrt{1 + \sqrt{-3}} + \sqrt{1 - \sqrt{-3}} = \sqrt{6}$. [4]

Leibniz commenta ainsi ce résultat : *« Je ne me souviens pas d'avoir rencontré un fait aussi singulier et paradoxal dans toute l'analyse : je pense être le seul à avoir réduit des racines irrationnelles, imaginaires dans leur forme, à des grandeurs réelles. »*

Huygens lui répondit : *« La remarque que vous m'avez faite concernant les racines pouvant être extraites et les racines comportant des grandeurs imaginaires qui engendrent, par l'addition, une grandeur réelle, est surprenante et complètement nouvelle. Personne n'aurait jamais cru que $\sqrt{1 + \sqrt{-3}} + \sqrt{1 - \sqrt{-3}}$ puisse être égal à $\sqrt{6}$, et il y a en cela quelque chose de caché qui nous est incompréhensible. »*

Leibniz ajoutera plus tard à ce sujet que *« le nombre imaginaire est un ressort fin et merveilleux de la raison divine, quasiment un amphibien entre l'être et le non-être »*.

Dans une lettre de 1702 à Varignon, Leibniz s'attarde encore plus sur ce paradoxe : *« L'on peut sans inquiétude utiliser des lignes fines et larges comme concepts idéaux – même si elles n'existent pas en tant qu'objets réels dans le sens métaphysiquement strict – comme manière de simplifier les calculs, exactement comme on peut utiliser des racines imaginaires dans l'analyse ordinaire, comme $\sqrt{-2}$ par exemple. Nonobstant le fait que ces grandeurs soient qualifiées d'"imaginaires", elles sont néanmoins utiles et même quelquefois indispensables dans nos tentatives d'exprimer des grandeurs réelles dans l'analyse ; il est par exemple impossible, sans avoir recours à de telles grandeurs, de donner une expression analytique capable de décrire un segment de ligne qui divise un angle en trois parties égales. De la même façon il est impossible d'élaborer notre calcul des courbes transcendantales sans parler de différences qui sont sur le point de disparaître ou de grandeurs qui sont incomparablement petites.*

« Ainsi les nombres imaginaires ont leur fondement dans la réalité *[fundamentum in re]. Lorsque j'ai indiqué à M. Huygens que $\sqrt{1 + \sqrt{-3}} + \sqrt{1 - \sqrt{-3}} = \sqrt{6}$, il fut tellement surpris qu'il répondit qu'il y avait dans cela quelque chose d'incompréhensible pour lui. Mais l'on peut justement affirmer à ce sujet que l'infini et l'infiniment petit ont des bases tellement solides que tous les résultats de la géométrie, et même les processus de la nature, se comportent comme s'ils étaient tous deux des réalités complètes [...] parce que tout obéit aux lois de la raison. »*

Contrairement à Leibniz, Euler, qui est tenu en si haute estime par les algébristes d'aujourd'hui, affirma que *« de telles expressions, comme la racine carré de –1, ou la racine carrée de –2, sont par conséquent impossibles et correspondent donc à des nombres imaginaires, puisque qu'elles représentent des racines de quantités négatives ; et nous pouvons véritablement affirmer que de tels nombres ne sont ni rien, ni plus grands que rien, ni plus petits que rien, ce qui fait d'eux des nombres imaginaires ou impossibles »*.

Gauss s'attaque aux nombres « impossibles »

C'est là que réside le génie de Gauss qui, à la suite de Kästner, eut le réflexe de reconnaître que c'était le système, et non pas les grandeurs, qui était impossible, comme il le démontra dans ses premiers travaux. [5]

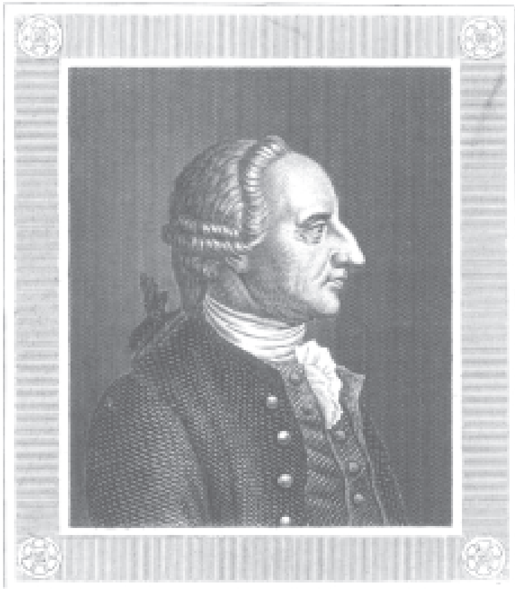
La manière dont il aborda le problème est développée dans son *Second traité sur les résidus biquadratiques : « Nous nous réservons la possibilité de traiter plus en détails ces sujets lors d'une occasion ultérieure. La difficulté qui entoure, comme on l'a souvent cru, la théorie des grandeurs imaginaires, repose dans une large mesure sur cette désignation plutôt inadéquate (on leur a même collé le terme discordant de grandeur impossible). Si l'on était parti de la volonté* *de présenter une variété de deux dimensions (qui décrit le concept d'espace avec une plus grande clarté), les grandeurs positives auraient été appelées directes, les grandeurs négatives inverses et les grandeurs imaginaires latérales, et l'on retrouverait la simplicité au lieu de la confusion, la clarté au lieu de l'obscurité […]*

« C'est sur cette base et aucune autre que les véritables fondations d'une théorie des résidus biquadratiques, le domaine d'une arithmétique supérieure, qui ne s'étendait jusqu'à présent qu'aux nombres réels, seront aussi élargies aux nombres imaginaires, car nous devons leur donner des droits civiques complets et égaux à ceux des nombres réels. Dès que l'on considère ceci, ces théories apparaissent sous un jour entièrement nouveau et les résultats obtenus atteignent une simplicité hautement surprenante. »

Ces concepts ne se limitent toutefois pas aux questions d'arithmétique, comme Gauss l'expliqua dans une lettre de 1811 à son ami Hansen : *« Ces investigations mènent profondément vers plusieurs autres [domaines], j'irais même jusqu'à dire dans la métaphysique de la théorie de l'espace, et c'est avec beaucoup de difficultés que j'arrive à me détacher des résultats qui en découlent comme, par exemple, la métaphysique des nombres négatifs et complexes. Le sens véritable de la racine carrée de –1 se tient droit devant moi (ou dans mon esprit), parfaitement vivant, mais il devient très difficile de le décrire avec des mots ; je ne suis capable d'en donner qu'une vague image flottant dans l'air ».*

L'approche de Riemann et de Gauss

Le 10 juin 1854, Bernhard Riemann présenta à la Faculté de Göttingen sa *Dissertation d'habilitation*, aujourd'hui célèbre, intitulée *Sur les hypothèses qui servent de fondement à la géométrie*. Avant d'aborder le contenu de cette présentation révolutionnaire, imaginez-vous assis parmi les membres de l'audience, regardant au-dessus de l'épaule de Gauss qui avait choisi ce sujet parmi les trois que lui avait soumis son élève. Réfléchissez, dans la mesure du possible, à ce que pensait Gauss en écoutant ce jeune mathématicien de 28 ans, au moment où il faisait état de sa volonté de lever le voile d'obscurité concernant les présomptions de base de la géométrie : *« […] on n'aperçoit pas bien si elles sont nécessairement liées entre elles, ni jusqu'à quel point elles le sont, ni même* a priori *si elles peuvent l'être. »*



Abraham Kästner. Professeur de Gauss, il incita ce dernier à rejeter la supposition selon laquelle les caractéristiques de la géométrie euclidienne étaient vraies. Gauss avait répondu à la provocation de Kästner en s'engageant dans une lutte permanente pour libérer la science du corset aristotélicien des suppositions a priori concernant l'espace physique.

« Depuis Euclide jusqu'à Legendre, pour ne citer que le plus illustre des réformateurs modernes de la Géométrie, personne, parmi les mathématiciens ni parmi les philosophes, n'est parvenu à éclaircir ce mystère. La raison en est que le concept général des grandeurs de dimensions multiples, comprenant comme cas particulier les grandeurs étendues, n'a jamais été l'objet d'aucune étude. En conséquence, je me suis posé d'abord le problème de construire, en partant du concept général de grandeur, le concept d'une grandeur de dimensions multiples. Il ressortira de là que l'espace n'est par suite qu'un cas particulier d'une grandeur de trois dimensions. Or, il s'ensuit de là nécessairement que les propositions de la Géométrie ne peuvent se déduire des concepts généraux de grandeur, mais que les propriétés, par lesquelles l'espace se distingue de toute autre grandeur imaginable de trois dimensions, ne peuvent être empruntées qu'à l'expérience. De là surgit le problème de rechercher les faits les plus simples aux moyens desquels puissent s'établir les rapports métriques de l'espace, problème qui, par la nature même de l'objet, n'est pas complètement déterminé ; car on peut indiquer plusieurs systèmes de faits simples, suffisants pour la détermination des rapports métriques de l'espace. Le plus important, pour notre but actuel, est celui qu'Euclide a pris pour base. Ces faits, comme tous les faits possibles, ne sont pas nécessaires ; ils n'ont qu'une certitude empirique, ce sont des hypothèses. On peut donc étudier leur probabilité, qui est certainement très considérable dans les limites de l'observation, et juger d'après cela du degré de sûreté de l'extension de ces faits en dehors de ces mêmes limites, tant dans le sens des immensurablement grands que celui des immensurablement petits. »

Les mots de Riemann faisaient écho aux réflexions de Gauss qui avait été, soixante ans plus tôt, amené par son professeur Kästner à rejeter la supposition selon laquelle les caractéristiques de la géométrie euclidienne étaient vraies. Gauss avait répondu à la provocation de Kästner en s'engageant dans une lutte permanente pour libérer la science du corset aristotélicien des suppositions *a priori* concernant l'espace physique. Même si cette approche allait être le fondement de sa pensée, ainsi que la base de ses nombreuses découvertes en science physique, Gauss ne publia que quelques indices à ce sujet, des indices auxquels se référa Riemann lors de l'ouverture de sa dissertation.

Les efforts de Gauss pour développer un « concept général de variétés de plusieurs dimensions » apparaissaient déjà nettement dans sa première découverte sur la division du cercle [6]. Gauss démontra à cette occasion que les divisions « constructibles » d'un cercle, c'est-à-dire celles formées de grandeurs commensurables au diamètre d'un cercle, ou à son carré, et qui étaient par conséquent « connaissables », n'étaient qu'un cas particulier de ces divisions basées sur des grandeurs « non connaissables ». Ces grandeurs n'étaient « non connaissables » que du point de vue du cercle lui-même. Elles n'étaient pas engendrées par le cercle, mais par un principe supérieur dont le cercle n'était qu'un reflet. Toutefois, puisque ces principes supérieurs n'étaient pas accessibles aux sens, ils ne pouvaient être connus que par des grandeurs « non connaissables ». Ce qui n'était pas connaissable n'était pas moins réel que le connaissable, mais ne pouvait être mesuré par le connaissable. Plutôt que de considérer le « connaissable » comme réel et le « non-connaissable » comme imaginaire, Gauss considérait le « non-connaissable » comme premier et le « connaissable » comme un cas particulier du « non-connaissable ».

Ceci allait demander le développement d'un nouvel ensemble de métaphores par lesquelles notre esprit pouvait se former un concept précis du « non-connaissable ». C'est ce que Riemann allait appeler « un concept général de variété de dimensions multiples », concept développé à partir des premiers indices fournis par Gauss.

Le premier indice auquel Riemann fit référence était celui contenu dans le *Second traité sur les résidus biquadratiques* de Gauss, portant sur les relations existant entre nombres entiers. Même s'il ne fut publié qu'en 1832, Gauss en avait déjà établi les bases essentielles lors de la rédaction de ses *Disquisitiones Arithmeticae*, ainsi que lors de ses premiers travaux sur l'astronomie et la géodésie. Le second indice concernait *La théorie des surfaces courbes*, publié par Gauss en 1827.

Des relations cachées entre les nombres entiers

On peut *a priori* être surpris d'apprendre que des travaux portant sur les relations entre des nombres entiers puissent d'une façon ou d'une autre être reliés à certaines découvertes de la physique, mais il en est ainsi seulement parce que notre façon de penser est aujourd'hui contaminée par la doctrine des aristotéliciens et des cathares. Pour Gauss, les paradoxes se présentant à notre esprit lorsqu'il se confronte à lui-même, sont nécessairement cohérents avec les paradoxes surgissant lors de notre investigation du monde extérieur.

Revenons donc à l'exemple des nombres entiers. Il est évident qu'ils ne proviennent pas de notre tentative de compter des objets. Comme l'explique Nicolas de Cues dans son essai *Sur les conjectures* : « *L'essence du nombre est par conséquent la forme première de l'esprit [...]. Dans la mesure où nous conjecturons de manière symbolique à partir des nombres rationnels de notre esprit par rapport aux nombres ineffables de l'Esprit divin, le nombre est en définitive la forme première des choses dans l'esprit du Compositeur, comme le nombre émergeant de notre rationalité est à l'origine du monde imaginaire.* »

Nos investigations sur la relations entre les nombres entiers permettront à notre esprit, comme l'explique Platon dans sa *République*, de passer du devenir à l'être. C'est donc de ce point de vue que Gauss développa les moyens d'explorer la « métaphysique de la théorie de l'espace », en étudiant, de façon expérimentale, les relations entre les nombres entiers.

Pour commencer nous devons, comme le fit Gauss lui-même, abandonner toutes nos notions déductives concernant le nombre. Plutôt que de considérer les nombres entiers comme des choses évidentes en elles-mêmes, pensez aux nombres comme étant produits par un principe. Gauss aborda les nombres de manière expérimentale, cherchant à provoquer des paradoxes par rapport à un principe connu. La résolution de ces paradoxes demandait l'introduction de principes nouveaux. Gauss décrivit ainsi son approche : « *Les questions traitées par la haute arithmétique présentent une caractéristique remarquable qui émerge rarement dans l'analyse générale, conférant ainsi au premier sujet une beauté accrue. Tandis que l'analyse mène à la découverte de nouvelles vérités seulement après que les principes fondamentaux de ce sujet (qui peut jusqu'à un certain point ouvrir la voie à ces vérités) aient été complètement maîtrisés ; avec l'arithmétique, les théorèmes les plus élégants émergent au contraire souvent dans la pratique expérimentale, résultant d'une dose inattendue de chance, tandis que leurs preuves restent si profondément cachées dans l'obscurité qu'elles échappent à tous nos efforts et font échouer les enquêtes les plus rigoureuses [...]. Ces vérités sont souvent d'une telle nature qu'elles peuvent être atteintes de plusieurs façons et que les premiers chemins découverts ne sont pas nécessairement les plus courts. L'on ressent par conséquent une grande joie lorsqu'on découvre, après s'être attardé sans résultat sur une vérité, et sans pouvoir développer de preuve satisfaisante, la voie la plus simple et la plus naturelle vers cette preuve tant recherchée.* »

La première idée développée dans les *Disquisitiones*, celle qui sera le thème de toute cette œuvre, est d'identifier les nombres comme produits d'un intervalle, de la même manière que les notes musicales sont engendrées par des intervalles. Si un intervalle entre deux nombres est divisible par un nombre entier quelconque, appelé « module », Gauss dit alors de ces nombres qu'ils sont « congruents ». Ainsi, 2, 7, 12, 17, 22, etc., sont tous congruents par rapport à un module égal à 5. Pour un module égal à 7, 2 est congruent à 9, 16, 23, etc.

L'utilisation que fait Gauss du terme « congruent » est cohérente avec celle qu'en fait Kepler, notamment avec la manière dont il utilise ce concept dans le livre II de son *Harmonie du Monde*. Pour Kepler, le mot *« congruentia »* était l'équivalent latin du mot grec *« harmonia »* qui signifie « s'ajuster ». Ainsi, ce n'est pas sur les nombres en tant que tels que l'on doit se focaliser, mais sur leur façon de s'ajuster.

Le concept de congruence développé par Gauss reflète la véritable nature des nombres avec plus de justesse que leur ordonnancement soi-disant naturel, qui semble aller de soi quand on apprend à compter à l'école. Il en est ainsi parce que, contrairement aux certitudes que l'on associe au bon sens, le concept de nombre ne découle pas de notre façon naturelle de compter. Il découle plutôt de la superposition de cycles, comme par exemple les cycles astronomiques. Chaque cycle est une unité, mais lorsqu'ils sont superposés les uns aux autres, nous obtenons une variété.

Leibniz aborde la question de la façon suivante dans sa dissertation *Sur l'art des combinaisons* : « *De plus, toute relation en est une soit d'union, soit d'harmonie. Dans l'union, les cho-*

Le cycle de Méton. L'astronome grec Méton découvrit que 19 années solaires contenaient 235 mois lunaires (temps entre deux phases successives de la rotation lunaire comme la pleine Lune) sans aucun résidu. Ainsi, s'il est vrai qu'un mois lunaire n'est pas congruent avec une année solaire, un mois lunaire est congruent avec 19 années solaires.

ses entre lesquelles cette relation existe sont appelée parties et ces parties forment, lorsqu'elles sont unies, un tout. Il en est toujours ainsi quand nous prenons plusieurs choses simultanément comme étant une. Par un, nous entendons tout ce que nous pensons dans un acte intellectuel en un instant. Par exemple, nous appréhendons souvent un nombre, peu importe combien grand il peut être, d'un seul coup, dans un genre de pensée aveugle, comme lorsque nous lisons des nombres sur une page, même s'il nous était impossible d'y arriver en comptant jusqu'à la mort de Mathusalem. Le concept d'unité est tiré du concept d'un être, et l'on appelle nombre le tout lui-même, tiré des unités, ou la totalité. »

Toute paire de cycles ne peut être connue en termes de relation entre l'un et l'autre que par un troisième cycle. Par exemple, le cycle découvert par l'astronome grec Méton, qui essaya de réduire les cycles du mois lunaire et de l'année solaire en un seul. Un cycle solaire contient 12 cycles lunaires, plus un petit résidu ; ceci signifie, dans les termes de Gauss, que le cycle lunaire est *non congruent* avec le cycle solaire. Méton découvrit cependant que 19 années solaires contenaient 235 mois lunaires, sans aucun résidu. Ainsi, s'il est vrai qu'un mois lunaire n'est pas congruent avec une année solaire, un mois lunaire est congruent avec 19 années solaires. Cette relation entre les cycles solaire et lunaire peut être connue grâce à ce cycle de Méton de 19 ans, qui définit le module pour lequel les cycles solaire et lunaire sont congruents.

Afin de se familiariser avec ce concept, nous allons nous amuser avec quelques exemples supplémentaires. Considérons deux cycles, dont l'un est trois fois plus long que l'autre. Ces cycles sont congruents l'un avec l'autre relativement à modulo 3. Des exemples de cette relation exprimée sous forme de nombre incluraient : 3 est congruent à 9 relativement à modulo 3, et 9 est également congruent à 27 relativement à modulo 3.

Considérons maintenant des cycles qui ne rentrent pas l'un dans l'autre exactement, comme des cycles de 4 et de 9. Le cycle le plus petit, celui de 4, rentrerait dans celui de 9 deux fois, avec un résidu de 1. Selon le concept de Gauss, 9 serait congruent à 1 relativement à modulo 4. Par contre, un cycle de 4 rentre dans un cycle de 10, avec un résidu de 2. Selon Gauss, 10 serait congruent à 2 relativement à modulo 4. Poursuivant sur cette voie, un cycle de 4 rentre dans un cycle de 11 avec un résidu de 3. Ainsi, 11 serait congruent à 3 modulo 4. Ensuite, nous constatons qu'un cycle de 4 rentre dans un cycle de 12 avec un résidu de 0, puis dans un cycle de 13 avec un résidu de 1 de nouveau, ce qui nous amène à conclure qu'un cycle de 4 rentrera dans n'importe quel cycle avec un résidu de 0, 1, 2 ou 3.

Si vous continuez à jouer avec cette idée, en explorant les relations possibles entre des cycles différents, vous découvrirez que tout module définit une période, s'étendant de 0 au module moins 1. Ceci mettra probablement votre esprit au défi, dans la mesure où vous vous verrez forcés de penser en termes de relations plutôt qu'en termes d'objets. Ceci est précisément pourquoi tous les grands penseurs, depuis Platon jusqu'à aujourd'hui, se sont débattus pour se libérer du corset de relations d'ordre déductif en sondant la nature des nombres.

Ceci devrait suffire pour une entrée en matière, mais afin d'accélérer notre parcours parmi les concepts développés par Gauss dans son *Second traité sur les résidus biquadratiques*, nous allons faire un pas supplémentaire.

Les résidus de puissances

Après avoir développé le concept de congruence dans ses *Disquisitiones*, Gauss décide d'explorer ce qu'il appelle les « résidus de puissances ». Nous quittons ici le monde de la certitude des sens et du raisonnement déductif.

Par « puissance », Gauss se réfère au concept élaboré par Platon dans son *Théétète*. Il s'agit des grandeurs associées à l'action dans ce que Riemann appellerait une variété doublement étendue. Des reflets de ces grandeurs sont représentés par Platon comme le doublement, le triplement, etc., successifs de carrés. Lorsque ces grandeurs sont exprimées en nombres entiers, elles génèrent des séries géométriques comme : 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512, etc., ou 1, 3, 9, 27, 81, 243, 729, 2 187, 6 561, etc.

Si vous pensez à chaque nombre comme un cycle, les séries peuvent être vues comme un cycle de cycles. Ce cycle de cycles n'a pas de fin, car il devient toujours plus grand, en respectant toutefois un principe de proportionnalité autosimilaire.

Ce qui peut vous sembler choquant, c'est de constater, comme vous le ferez de premier abord, que ce cycle croissant et ouvert de différents cycles engendre un cycle périodique, fermé, par rapport à un module donné.

Prenons par exemple la série géométrique formée par le doublement du carré et trouvons les résidus relativement à modulo 3. Cela nous donne la période : 1, 2, 1, 2, 1, 2, 1, 2, etc. [7] Faisons la même chose pour modulo 5. Nous obtenons la période : 1, 2, 4, 3, 1, 2, 4, 3, 1, etc. Et pour modulo 7, nous avons : 1, 2, 4, 1, 2, 4, 1, 2, 4, 1, etc.

Expérimentez maintenant en utilisant des séries géométriques basées sur l'action de triplement. Pour modulo 5, nous obtenons la période : 1, 3, 4, 2, 1, 3, 4, 2, 1, etc. Comparez ceci avec la période engendrée avec le même module mais avec des séries géométriques basées sur le doublement. Pour modulo 7, la série construite sur l'action de triplement nous donne la période : 1, 3, 2, 6, 4, 5, 1, 3, 2, 6, 4, 5, 1, etc.

Cette expérience est un exemple simple de ce que Gauss décrivait comme processus de découverte par l'expérimentation. D'où viennent ces périodicités ? Quelle est leur nature ? Quels principes recèlent-elles ?

La géométrie des nombres entiers

Par son approche, Gauss entraîne notre esprit à abandonner toute notion *a priori* ou même déductive des nombres. Au lieu d'étudier les nombres, nous étudions le processus qui les engendre. C'est sur ce principe d'engendrement que nous nous concentrerons désormais, en s'aidant de concepts empruntés à l'art classique. Les nombres peuvent être ainsi vus comme des interprètes, nous guidant vers ce qui se trouve entre eux.

Le premier principe générateur des nombres auquel Gauss fait référence est celui de juxtaposition de cycles. Tandis que ce concept fut introduit sous une forme nouvelle dans ses *Disquisitiones Arithmeticae*, avec le concept de congruence relativement à un module, le principe qui le sous-tend est peut-être le premier, ou le concept le plus élémentaire du nombre. Dans ce cas, aucun nombre n'existe en tant que tel. Les nombres existent plutôt en tant que joueurs, chacun jouant une partition qui est fonction de la relation existant entre chacun d'entre eux et un Un, que Gauss appelait un module. Ainsi, tous les nombres sont ordonnancés selon les caractéristiques du module. Ces caractéristiques sont elles-mêmes déterminées par un principe générateur sous-jacent, qui sera clarifié ci-après. Les soi-disant nombres « naturels », ceux qui nous servent à compter, ne sont plus qu'un cas particulier de ce concept plus général de nombres ordonnancés par rapport au modulo 1.

Le second principe générateur mis de l'avant par Gauss est celui permettant d'engendrer des nombres à partir d'un cycle de cycles, plus particulièrement des cycles « géométriques ». Chaque cycle est engendré par une fonction décrite par Platon dans son *Théétète*, émergeant de ces séries de carrés et de rectangles alternés produites par la répétition d'une action quelconque, comme celle du doublement, du triplement ou autre. Gauss, tout comme Platon, Kepler, Leibniz, Bernoulli et Fermat avant lui, comprit que les séries alternées de carrés et de rectangles n'étaient que le reflet d'un principe générateur plus élevé, qui restait toutefois à découvrir.

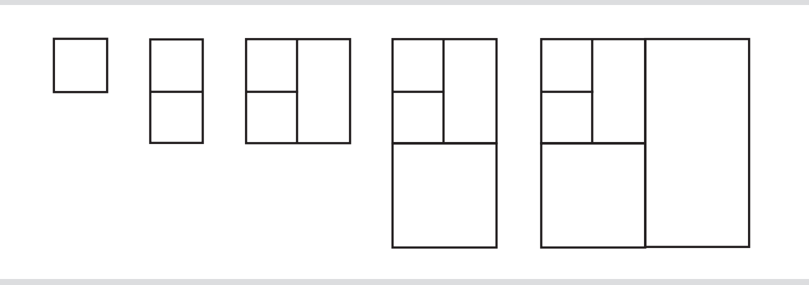
Selon la certitude naïve des sens, cette progression géométrique n'est pas du tout un cycle, elle est ouverte et elle croît de façon continue. Pourtant, comme les expériences effectuées dans la section précédente le montrent, nous avons vu que si chaque étape dans la progression géométrique est considérée comme un cycle, que si chaque cycle est juxtaposé à un troisième, c'est-à-dire le module, une périodicité sous-jacente est révélée, indiquant les caractéristiques du cycle ayant produit chacune des étapes.

Construisons maintenant un tableau des résidus formés pour chaque puissance de nombre, par rapport au modulo 11 par exemple. La première rangée est formée des nombres de 0 à 10, indiquant les puissances auxquelles nous élèverons une série de nombres allant de 2 jusqu'à 10. Chaque rangée suivante sera formée des résidus du premier nombre de chaque rangée élevé à la puissance indiquée à la tête de la colonne correspondante, relativement à modulo 11. [8] Le tableau obtenu devrait être celui-ci :

Puissances :	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2 :	1	2	4	8	5	10	9	7	3	6	1
3 :	1	3	9	5	4	1	3	9	5	4	1
4 :	1	4	5	9	3	1	4	5	9	3	1
5 :	1	5	3	4	9	1	5	3	4	9	1
6 :	1	6	3	7	9	10	5	8	4	2	1
7 :	1	7	5	2	3	10	4	6	9	8	1
8 :	1	8	9	6	4	10	3	2	5	7	1
9 :	1	9	4	3	5	1	9	4	3	5	1
10 :	1	10	1	10	1	10	1	10	1	10	1

Maintenant, on a de quoi s'amuser. A partir de ce cycle géométrique ouvert et croissant, cette action produit évidemment une structure périodique régulière. Fermat, Leibniz et Gauss se demandaient quel principe générateur produit cette périodicité. Dans leur recherche d'une réponse adéquate, ils traquèrent les paradoxes disséminés dans une structure apparemment régulière.

Il apparaît d'abord clairement que chaque rangée de résidus ou période commence par 1 et se termine par 1. On s'aperçoit ensuite qu'il existe trois



Gauss, tout comme Platon, Kepler, Leibniz, Bernoulli et Fermat avant lui, comprit que les séries alternées de carrés et de rectangles n'étaient que le reflet d'un principe générateur plus élevé, qui restait toutefois à découvrir.

types de périodes. Le premier type, défini par les rangées correspondant aux résidus des puissances des nombres 2, 6, 7 et 8 est long de 10 nombres et inclut par conséquent tous les nombres de 1 à 10, même s'ils sont apparemment en désordre. Gauss a appelé les nombres 2, 6, 7 et 8 les « racines primitives » de 11. Le deuxième type de périodes, défini par les rangées correspondant aux résidus des puissances de 3, 4, 5 et 9 a une longueur de 5 et ne contient que les nombres 1, 3, 4, 5 et 9. Le troisième type est représenté par la rangée 10, dont la période ne contient que les nombres 1 et 10 se répétant en alternance. Les résidus des puissances relativement à modulo 11 définissent un nombre limité d'« orbites », pour ainsi dire, qui ont une longueur soit de 10, ou bien de 2 et de 5, qui sont les facteurs premiers de 10.

Même si chaque période affiche les nombres dans un ordre différent, cet ordre est très déterminé. Vous pouvez mieux vous en rendre compte en encerclant les rangées correspondant aux racines primitives, c'est-à-dire les rangées correspondant aux résidus des puissances de 2, 6, 7 et 8. Vous verrez que ces nombres n'apparaissent en tant que résidus que dans ces mêmes rangées, qui ont une période de longueur 10. Même s'il apparaissent dans un ordre différent, ces nombres ne sont résidus que des puissance 1, 3, 7 et 9 (c'est-à-dire qu'ils n'apparaissent que dans les colonnes correspondant à ces puissances), qui sont d'ailleurs les nombres qui sont relativement premiers à 10.

Nous commençons ainsi à entrevoir la nature du principe générateur sous-jacent de ces « orbites », dans la mesure où les caractéristiques du nombre 10, c'est-à-dire ses facteurs premiers et relativement premiers, déterminent l'ordonnancement des périodes !

Tout en gardant ceci à l'esprit, dessinez maintenant une série de carrés et de rectangles alternés, en utilisant en premier lieu le processus du doublement, puis ensuite celui du triplement de la surface. En observant l'alternance de carrés et de rectangles, vous vous apercevrez d'abord que les carrés correspondent à des puissances paires de 2 ou de 3, ou même de n'importe quel nombre, et que les rectangles correspondent à des puissances impaires. Les qualités de pair et d'impair reflètent ainsi une caractéristique géométrique et non une propriété numérique des nombres. Gauss appelait les résidus des puissances paires des « résidus quadratiques » [9] et les résidus des puissances impaires des « non-résidus quadratiques ». Il porta une attention spéciale à cette caractéristique et ses investigations ouvrirent la porte à certains des principes les plus profonds. Mais nous reviendrons plus loin sur cette question.

Notons d'abord que nous avons ici l'impression d'être confrontés à une pièce de théâtre classique, dans laquelle jouent dix personnages différents. Chaque personnage joue plusieurs rôles, il porte le même costume mais fait des choses différentes. Le dramaturge a délibérément choisi cette façon de faire de sorte à pouvoir empêcher l'audience de juger selon la certitude naïve des sens. Il facilite ainsi la transmission d'une idée qui ne pourrait être incarnée par aucun des personnages pris séparément, mais seulement par la totalité de toutes les actions considérées dans leur ensemble ; l'ironie se trouve révélée lorsqu'un personnage joue des choses complètement différentes, sans changer de costume. Chaque nombre de 1 à 10 a une fonction différente, qu'il apparaisse sous forme de puissance, de résidu ou de base. Dans le cas de certains rôles, les caractéristiques évidentes des nombres, comme le pair et l'impair, celle d'être un facteur ou d'être relativement premier, semblent affecter sa fonction, mais dans d'autres cas, comme celui des racines primitives, ces caractéristiques ne semblent avoir aucun effet. C'est seulement quand tous les rôles sont joués que nous commençons à saisir l'intention du dramaturge.

Gauss comprenait que ces anomalies ne pouvaient être dérivées d'un concept de nombre défini selon la certitude naïve des sens, en tant qu'objets servant à compter, mais qu'elles pouvaient être expliquées par un principe générateur sous-jacent, qui transparaissait à travers les nombres eux-mêmes. Mais pour le faire transparaître, il fallait de la lumière, une révolution complète dans la façon dont on appréhendait les nombres. Comme il l'explique au début de son *Traité sur les résidus biquadratiques*, *« Nous fûmes rapidement amenés à comprendre que les principes coutumiers de l'arithmétique ne suffisent pas pour l'établissement d'une théorie générale, et qu'il était absolument nécessaire que le domaine de la haute arithmétique soit infiniment plus étendu.»*.

Ainsi, si vous vous sentez un peu déconcertés de vous voir assis dans le même amphithéâtre que Gauss, écoutant Riemann disserter sur ces questions, ne vous découragez pas. Soyez heureux, car nous vous donnons ici l'opportunité de découvrir que votre éducation n'était pas seulement incompétente, mais même nuisible. Elle est incompétente dans la mesure où vos professeurs étaient sans doute complètement ignorants des découvertes originales les plus significatives dont a dépendu la survie de l'espèce humaine ; nuisible dans le sens où le système auquel se sont soumis vos professeurs n'avait aucunement l'intention de produire des individus capables d'accomplir de telles découvertes. Comme nous le voyons maintenant avec les événements de ce monde, un système qui n'a pas l'intention de produire des individus créateurs n'a pas la volonté de survivre. Profitez par conséquent de l'occasion qui vous est offerte ici de débarrasser votre esprit de sa fixation sur des faits, lois ou opinions, ou bien sur des croyances populaires, et assignez-vous la tâche de devenir des penseurs créatifs.

Riemann cherchait à lever le voile qui obscurcissait la science depuis plus de deux mille ans en fournissant un concept général de grandeur multiplement étendue, un concept permettant d'admettre qu'une grandeur n'avait aucune caractéristique *a priori*, mais qu'elle était déterminée par la nature de la variété dans laquelle elle existait, une nature elle-même déterminée par la seule expérience. Le point de départ de Riemann était le travail de Gauss sur la géométrie physique et l'arithmétique. Ce dernier avait bénéficié d'une éducation révolutionnaire axée sur les travaux de Kepler, Leibniz, Bach, Kästner, ainsi que sur les accomplissements de la Grèce classique. Au centre de toutes ces découvertes se trouvait le désir de découvrir les principes permettant d'engendrer les objets de l'investigation, qu'ils soient objets physiques, comme pour le cas du mouvement des planètes, processus vivants ou objets de la pensée, ces derniers étant les plus fondamentaux et sur lesquels reposent ses autres travaux.

Platon comprit à cet égard que l'esprit doit être entraîné à s'étudier lui-même et c'est à cette fin qu'il prescrivit l'étude de la géométrie, l'astronomie, la musique et l'arithmétique, la dernière parce que *« la pensée s'élève en nous et notre esprit, perplexe et voulant arriver à une décision, demande "où est l'unité absolue ?". C'est la façon par laquelle l'étude du Un a le pouvoir de convertir l'esprit à la contemplation de l'être véritable [...] et cela sera la manière la plus facile pour notre âme elle-même de passer du devenir à la vérité ou à l'être [...] »*

Cette recherche sur la nature de l'unité est ce qui sous-tend les travaux de Gauss sur l'arithmétique. Son caractère révolutionnaire provient du fait que la nature de l'unité n'est pas quelque chose de fixe, mais se développe et change constamment. C'est ce qui se cache derrière le concept de congruence de Gauss, l'ordonnancement des nombres par rapport à un module. Ceci repose sur le principe selon lequel les nombres ne sont pas des objets fixes qui déterminent un ordre, mais qu'ils sont eux-mêmes ordonnancés selon le principe par lequel ils sont engendrés.

Sur les nombres pairs et impairs

Nous avons vu plus haut que le premier principe générateur des nombres est celui de la juxtaposition de cycles. Ce principe de juxtaposition forme deux types de relations. Soit les cycles se divisent l'un l'autre en ne laissant aucun résidu, comme un cycle de 8 et un cycle de 4, soit une telle division n'a pas lieu, comme pour des cycles de 8 et de 5. Nous décrivons ces derniers cycles comme étant « relativement premiers » entre eux. Ces cycles, simplement appelés premiers lorsqu'ils étaient juxtaposés à tous les cycles plus petits qu'eux (ainsi qu'au cycle de 1), étaient avant Gauss considérés comme étant absolument premiers, ou premiers relativement à 1.

Par conséquent, quand on a le nez rivé sur les nombres, comme lorsque nous additionnons 1 à 1 et ainsi de suite, les nombres premiers nous paraissent mystérieux et semblent émerger de l'inconnu. Lorsque nous prenons un peu de recul toutefois, les nombres premiers deviennent ceux à partir desquels sont faits tous les autres. En fait, Gauss et Riemann s'interrogèrent sur le principe qui engendre les nombres premiers. Ceci les conduisit à approfondir non pas la question des nombres en tant que telle, mais les variétés dans lesquelles ces nombres étaient engendrés.

L'étude des variétés mène au second principe générateur. C'est le principe que les Grecs qualifiaient de « géométrique » et que nous avons brièvement introduit plus haut. Nous allons maintenant poursuivre plus avant cette voie.

Reprenons l'exemple de l'engendrement de nombres à partir du modulo 11 et comparons-le au cycle des résidus produits relativement à modulo 13. Pour rester bref, nous introduisons ici seulement le cycle relativement à une racine primitive, en l'occurrence 2. La première rangée est l'index, ou la puissance à laquelle la racine primitive est élevée, et la seconde rangée correspond au résidu. Pour des raisons qui deviendront évidentes plus loin, nous incluons les résidus positifs et négatifs. [10]

Modulo 11, pour la racine 2

Index :	0	1	2	3	4	5
Résidu :	{1, –10},	{2, –9},	{4, –7},	{8, –3},	{5, –6},	{10, –1}
Index (suite) :	6	7	8	9	10	
Résidu (suite) :	{9, –2},	{7, –4},	{3, –8},	{6, –5},	{1, –10}	

Modulo 13, pour la racine 2

Index :	0	1	2	3	4	5	6
Résidu :	{1, –12},	{2, –11},	{4, –9},	{8, –5},	{3, –10},	{6, –7},	{12, –1}
Index (suite) :	7	8	9	10	11	12	
Résidu (suite) :	{11, –2},	{9, –4},	{5, –8},	{10, –3},	{7, –6},	{1, –12}	

Dans les deux cas, la moitié des résidus, ceux des puissances paires, sont des résidus de carrés (résidus quadratiques). L'autre moitié est formée des résidus des puissances impaires, ou de rectangles (non-résidus quadratiques). Dans le cas de modulo 13, les résidus quadratiques (ceux des puissances paires) forment une image miroir, c'est-à-dire que les résidus positifs de la première moitié du cycle deviennent les résidus négatifs de la deuxième moitié. Pour modulo 11, nous avons plutôt une relation de complémentarité.

Cela révèle l'existence d'une connexion surprenante entre l'ancienne découverte des pythagoriciens concernant le pair et l'impair, qui semble se rapporter aux nombres, et la progression géométrique qui se rapporte aux figures dans l'espace. Cette qualité de pair et d'impair est le reflet d'un principe plus profond décrit par Nicolas de Cues dans son essai *Sur les conjectures : « Il est établi que tout nombre est constitué de l'unité et de l'altérité, l'unité progressant vers l'altérité, l'altérité progressant vers l'unité, de manière à ce qu'il soit limité dans cette progression réciproque et qu'il subsiste en réalité tel qu'il est. L'unité d'un nombre ne peut être complètement égale à l'unité d'un autre, puisqu'une égalité précise est impossible dans tout ce qui est fini. L'unité et l'altérité varient par conséquent dans chaque nombre. Le nombre impair semble posséder plus d'unité que le nombre pair, parce que le premier ne peut être divisé en parties égales tandis que le second peut l'être. Par conséquent, puisque tout nombre est un constitué d'unité et d'altérité, il existera des nombres dans lesquels l'unité prévaudra sur l'altérité, et d'autres nombres dans lesquels l'altérité semble absorber l'unité. »*

Ceci ne s'arrête pas à la division entre pair et impair, car les deux types possèdent une qualité plus profonde encore. On peut distinguer parmi les nombres pairs ceux qui donnent, quand ils sont divisés en deux parties égales, des nombres impairs, comme le nombre 10 qui se divise en 5 et 5, et les nombres pairs qui donnent naissance à deux nombres pairs, comme 12, qui se divise en 6 et 6. Les premiers sont appelés pairs-impairs et les seconds pairs-pairs. De la même façon, les nombres impairs peuvent être séparés en deux types de nombres. Des nombres comme 11, qui sont plus grands d'une unité qu'un nombre pair-impair (en l'occurrence 10) et des nombres comme 13, qui sont plus grands d'une unité qu'un nombre pair-pair (en l'occurrence 12). Les premiers sont appelés impairs-impairs et les seconds impairs-pairs. Gauss désignait les nombres impairs-pairs par l'expression $4n + 1$ et les nombres impairs-impairs par l'expression $4n + 3$.

Revenons maintenant à nos résidus par rapport à modulo 11 et 13. Regardons le milieu des deux « orbites » ainsi définies. Ce milieu correspond dans les deux cas aux moyennes arithmétique et géométrique à la fois. Arithmétique parce qu'ils sont situés à la moitié de la longueur du cycle. Géométrique parce qu'ils correspondent à une demi-rotation entre les résidus 1 du début et 1 de la fin. On peut aussi dire de ces milieux qu'ils sont équivalents à la racine carrée de 1, car pour modulo 11, le résidu du milieu est soit 10 soit 1 et sont tous deux, une fois élevés au carré, congruents avec 1 modulo 11 ; pour modulo 13, le résidu du milieu est soit 12 soit –1 et sont tous deux, une fois élevés au carré, congruents avec 1 modulo 13. [11]

Reprenez encore une fois la série alternée de carrés et de rectangles de Platon, dans le cas du doublement de la surface. Dans un cycle de 10 carrés et rectangles, le cinquième élément est un rectangle dont l'aire est égale à 32. Cette surface est la moyenne géométrique entre un carré de surface 1 et un carré de surface 1 024. Puisque les résidus forment un cycle commençant et finissant par 1, le résidu de la cinquième puissance, modulo 11 est la moyenne géométrique entre 1 et 1 (–1 est bien en effet la moyenne géométrique entre 1 et 1). De la même manière, avec un cycle de 12 carrés et rectangles, la sixième puissance produit un carré d'aire égale à 64. La surface de ce carré est la moyenne géométrique entre un carré de surface 1 et un carré de surface 4 096. Tandis que pour modulo 11 le milieu correspondait à un rectangle, dans le cas de modulo 13, nous avons un carré. Ce qui est normal, car il existe une différence entre 11 et 13, le premier étant impair-impair et le second impair-pair ! Dans le premier cas, le milieu correspond donc à un nombre impair, le nombre 5, et dans le second cas à un nombre pair, qui est 6.

La période des résidus engendrés avec modulo 13 peut être de nouveau divisée de façon à obtenir des quarts de cycle. Les points correspondant au quart et trois-quarts de notre cycle sont les puissances 3 et 9. Leurs résidus sont respectivement {8, –5} et {5, –8}. Quand élevés au carré deux fois, 8 et –5 sont tous deux congruents avec 1 modulo 13. Toutefois, s'ils ne sont élevés au carré qu'une seule fois, ils sont congruents à –1 modulo 13 (car nous obtenons dans les deux cas un résidus de 12). Même chose pour 5 et –8. Ainsi, dans la mesure où ils ne sont pas du tout élevés au carré, 8 et –5 sont équivalents à $\sqrt{-1}$! [12]

La racine carrée de –1 acquiert ainsi une existence clairement définie par rapport à un module impair-pair, tandis qu'elle disparaît dans le contexte d'une variété engendrée par un module impair-impair.

D'un point de vue naïf, on pourrait penser de prime abord que $\sqrt{-1}$ est le produit de la caractéristique de l'impair. Cependant, comme le Cusain l'a indiqué, l'impair est une qualité dans laquelle l'unité prévaut sur l'altérité. Par conséquent, plutôt que de se contenter de chercher la racine carrée de –1 dans la nature de l'impair, nous devons chercher la nature de l'impair dans la caractéristique de l'unité.

C'est précisément la manière par laquelle Gauss a abordé ce problème. Plutôt que de penser à une variété d'une unité simplement étendue, il a conçu une variété d'une unité doublement étendue, au sein de laquelle $\sqrt{-1}$ est pour ainsi dire un « produit naturel ». Il a appelé cette variété le domaine complexe.

Il explique ainsi : *« Nous avions déjà, à partir de là, commencé à méditer sur ces objets dès 1805, et nous arrivâmes bientôt à la conviction que la source naturelle d'une théorie générale devait être cherchée dans une extension du domaine de l'arithmétique.*

« Tandis que la haute arithmétique ne s'est occupée jusqu'à maintenant que de questions reliées aux nombres entiers, nos propositions concernant les résidus biquadratiques apparaissent dans toute leur simplicité et leur beauté naturelle, seulement si le domaine de l'arithmétique est étendu de manière à inclure les nombres imaginaires, sans aucune limite, c'est-à-dire les nombres de la forme a + bi, où le i habituel dénote la racine carrée de –1 et a et b sont des nombres entiers situés entre l'infini négatif et l'infini positif. »

Les droits civiques des nombres complexes

Pour Gauss, donc, les relations entre les nombres ne se situent pas dans les nombres eux-mêmes, mais seulement dans la relation qu'ils entretiennent avec la variété dans laquelle ils existent. Comme pour les monades de Leibniz, les nombres n'interagissent entre eux qu'indirectement, seulement à travers la variété à partir de laquelle ils ont été créés.

Dans les deux exemples que nous avons donnés ci-dessus (avec modulo 11 et modulo 13), les « orbites » commencent et se terminent par 1 et ordonnent tous les nombres entre 1 et le module –1 selon un principe donné. Ce principe n'apparaît pas immédiatement, mais un examen approfondi nous montre qu'il est luimême hautement déterminé. A la moitié de l'orbite (la cinquième puissance pour modulo 11 et la sixième puissance pour modulo 13), le résidu est soit directement égal à –1 (10 et 12 sont aussi, lorsqu'ils sont comparés à leur module respectif, équivalents à –1) et, lorsqu'il est élevé au carré, nous obtenons dans tous les cas un nombre congruent à 1 relativement à son module respectif. (100 est congruent à 1 modulo 11 et 144 est congruent à 1 modulo 13.)

Dans le cas de modulo 13, une division additionnelle du cycle est possible. Au quart du chemin, nous avons la troisième puissance, dont le résidu est 8. Quand il est élevé au carré, le résultat est congruent à –1 modulo 13. En d'autres termes, du point de vue des résidus, si –1 équivaut à la moitié de l'orbite, $\sqrt{-1}$ équivaut à la moitié de la moitié de l'orbite.

Ce phénomène pointe vers un paradoxe qui révèle une géométrie sousjacente dans le principe générateur des nombres. Dans l'exemple que nous venons de donner, nous étions en train d'expérimenter avec des nombres entiers positifs et négatifs. Nos sens nous indiquent naïvement que ces nombres peuvent être complètement représentés comme étant des intervalles également espacés le long d'une ligne droite infinie, avec des nombres négatifs s'alignant dans une direction et les nombres négatifs dans l'autre. Selon une telle conception, $\sqrt{-1}$ n'existe pas comme grandeur et pourtant son existence vient juste d'être découverte comme racine biquadratique de 1, modulo 13. Nous pouvons en d'autres termes affirmer que $8 \equiv \sqrt{-1}$ modulo 13, que $8^2 \equiv -1$ modulo 13 et que $8^4 \equiv 1$ modulo 13, où le symbole ≡ indique la congruence.

Ceci revient à dire qu'il existe une espèce de grandeur qui ne peut être logiquement déduite d'une variété d'une seule dimension. Euler avait conclu que de telles grandeurs étaient en conséquence *« impossibles »*. Gauss, de son côté, ne s'est pas limité à une variété d'une dimension, car l'émergence d'une anomalie demandait une extension vers une variété de deux dimensions, dans laquelle ces grandeurs « impossibles » devenaient possibles. Non seulement de telles grandeurs devenaient-elles possibles, mais Gauss proclama qu'elles méritaient d'avoir des *« droits civiques complets »*.

Dans une variété de deux dimensions, la relation entre les objets n'est pas limitée à un déplacement vers l'avant ou vers l'arrière le long d'une ligne, mais inclut aussi une relation du haut vers le bas, pour ainsi dire. Ne vous méprenez pas : il ne s'agit pas ici des deux types de relations différentes (gauche-droite et haut-bas), comme on pourrait naïvement le penser. Il s'agit plutôt d'une relation doublement étendue. Gauss précise le concept de la façon suivante : *« Supposez toutefois que les objets sont d'une nature telle qu'ils ne peuvent être ordonnés en une seule série, même illimitée dans les deux directions, mais dans une série de séries, qu'ils forment en d'autres termes une variété de deux dimensions [...]. »*

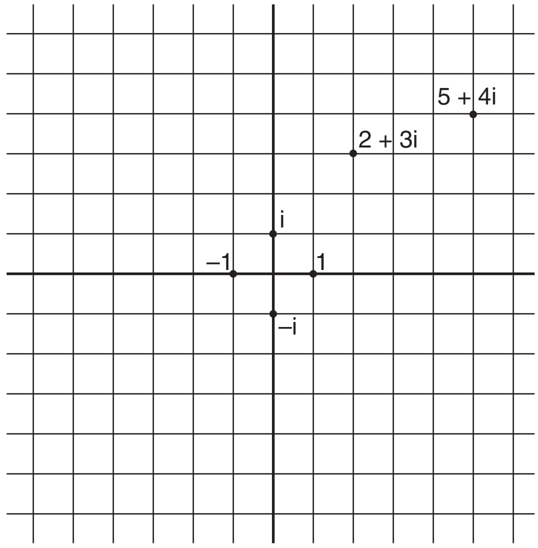
Les fondements de cette conception ne se trouvent pas dans les mathématiques, mais dans la géométrie physique. Dans une note fragmentaire, intitulée *Sur la métaphysique des mathématiques*, Gauss décrivit une relation doublement étendue en ayant recours à la métaphore d'un niveau de charpentier. La bulle située dans le niveau ne peut se déplacer que dans un sens ou dans le sens inverse, si nous levons et abaissons l'un des bouts du niveau. De plus, Gauss répéta souvent que ces concepts d'arrière et d'avant, de haut et de bas, de gauche et de droite ne peuvent être connus, contrairement à ce qu'affirmait Kant, à partir des seules mathématiques. De tels concepts ne sont connus que par rapport à des objets physiques réels.

Ce type d'action est représenté géométriquement par des grandeurs de deux dimensions que Gauss appela nombres complexes. Gauss représenta ces nombres comme les sommets d'une grille formée de carrés espacés de façon égale dans un plan. Mais rappelez-vous, ce n'est pas la grille qui engendre les nombres. C'est l'*idée* d'une variété doublement étendue qui engendre des grandeurs doublement étendues formant la grille. Comme dans le cas de la bulle du niveau, toute relation entre deux nombres complexes est une combinaison d'actions verticales et horizontales le long de la grille.

Cette représentation géométrique des nombres complexes découle naturellement de la géométrie des « orbites » engendrées par les résidus de puissances, comme nous l'avons montré plus haut. Cette représentation géométrique est reflétée dans les caractéristiques des résidus et n'est rien d'autre qu'une généralisation du principe présenté par Platon dans son *Ménon* et son *Théétète*, pour le cas particulier des carrés. Dans ce cas, la diagonale du premier carré formant simultanément le côté du carré de surface double au premier est appelée « moyenne géométrique ». La relation entre la diagonale et les deux carrés est la même que celle de –1 par rapport à 1 et 1, et de $\sqrt{-1}$ par rapport à –1 et 1.

Gauss décrit ainsi la variété formée par les nombres complexes : *« Nous devons ajouter quelques remarques d'ordre général. La tentative de localiser la théorie des résidus biquadratiques dans le domaine des nombres complexes peut sembler douteuse et non naturelle pour ceux qui ne sont pas familiarisés avec la nature des nombres imaginaires, et qui sont de ce fait enfermés dans des conceptions fausses de ces nombres ; de telles personnes peuvent être amenées à penser que nos investigations ne sont que du vent et deviennent sceptiques, ou prennent leurs distances par rapport aux idées que nous avons développées. Une telle opinion serait cependant sans fondement : car au contraire, l'arithmétique des nombres complexes peut parfaitement être représentée visuellement, même si cet auteur a suivi dans sa représentation un traitement purement arithmétique ; néanmoins, il a fourni des indications suffisantes permettant au penseur indépendant d'élaborer une telle représentation, qui illuminerait son intuition et est par conséquent fortement recommandée.*

« De la même manière que les nombres entiers absolus peuvent être représentés comme une série de points également espacés sur une ligne, au sein de laquelle le point initial représente 0, le prochain point 1, etc. ; et que les nombres entiers négatifs peuvent être représentés en ayant recours à une extension de cette série dans la direction opposée par rapport au point initial ; il ne nous manque pour représenter les nombres entiers complexes qu'une seule addition : que les séries déjà mentionnées devraient être pensées comme



Ce n'est pas la grille qui engendre les nombres. C'est l'idée d'une variété doublement étendue qui engendre des grandeurs doublement étendues formant la grille. Toute relation entre deux nombres complexes est une combinaison d'actions verticales et horizontales le long de la grille. Par exemple, 2 + 3i serait représenté par un point situé à 2 unités à droite de 0 et trois unités au-dessus ; 5 + 4i correspondrait à un déplacement de 5 vers la droite et de 4 vers le haut. La différence (l'intervalle) entre 2 + 3i et 5 + 4i serait 3 + i, qui est l'action combinée horizontale et verticale pour se déplacer de 2 + 3i à 5 + 4i.

reposant sur un plan illimité, et que se trouvent des deux côtés, des séries similaires, parallèles et en nombre illimité, et espacées selon des intervalles égaux. Nous aurions ainsi un système de points plutôt qu'une seule série, un système pouvant être ordonné de deux manières comme série de séries et pouvant servir à diviser le plan entier dans des carrés identiques.

« Le point voisin du zéro dans la première rangée située de l'un des côtés de la série originale correspondrait par conséquent à i, et le point voisin du même zéro dans la rangé située du côté opposé correspondrait à -i, etc. En posant les points de cette manière, il devient possible de représenter en termes visuels les opérations arithmétiques sur des grandeurs complexes, ainsi que la congruence et la construction d'un système complet de nombres incongruents par rapport à un module donné, et ainsi de suite, de manière parfaitement satisfaisante.

« Ainsi, la véritable métaphysique des grandeurs imaginaires est montrée sous un jour nouveau et plus lumineux [...]. »

Retour sur les nombres premiers

Le domaine des nombres entiers peut donc être étendu au-delà des simples nombres négatifs et positifs, aux nombres de la forme a + b*i*, où *i* représente $\sqrt{-1}$. Ces nombres sont représentés par des points sur un plan, au sein duquel a correspond à une action horizontale et b à une action verticale. Par exemple, 2 + 3*i* serait représenté par un point situé à 2 unités à droite de 0 et trois unités au-dessus ; 5 + 4*i* correspondrait à un déplacement de 5 vers la droite et de 4 vers le haut. La différence (l'intervalle) entre 2 + 3*i* et 5 + 4*i* serait 3 + *i*, qui est l'action combinée horizontale et verticale pour se déplacer de 2 + 3*i* à 5 + 4*i*.

Dans le domaine complexe de Gauss, les caractéristiques fondamentales des nombres sont redéfinies sur la base d'un principe nouveau. Une importance particulière est portée aux nombres premiers. Ici, les nombres qui sont premiers dans une variété simplement étendue ne sont plus premiers dans le domaine complexe. Par exemple, 5 peut être décomposé en deux facteurs complexes de la forme (1 + 2*i*) et (1 – 2*i*) ; 13 peut être décomposé en (3 + 2*i*)(3 – 2*i*). Gauss montra que les nombres premiers impairs-pairs ne sont plus premiers dans le domaine complexe, tandis que tous les nombres premiers impairs-impairs le restent. Gauss découvrit par la suite un nouveau type de nombres premiers qu'il appela « premiers complexes » et qui sont appelés aujourd'hui « premiers gaussiens ». Ces nombres sont de la forme a + b*i*, mais où $a^2 + b^2$ est un nombre premier.

Les nombres premiers, qui sont la « fabrique » à partir de laquelle tous les nombres sont faits, ne sont donc pas en tant que tels premiers. Ils sont plutôt définis par la nature de la variété dans laquelle ils existent. Une variété simplement étendue produit un certain type de nombres premiers, dont la qualité en tant que nombre « premier » n'est absolue qu'au sein de cette variété et relative par rapport à une variété doublement étendue. Une variété doublement étendue produit quant à elle des nombres dont la qualité en tant que nombre premier diffère de celle existant dans une variété simplement étendue. La qualité caractéristique des nombres premiers d'une seule dimension peut être dérivée de celle des nombres premiers de deux dimensions, mais le contraire n'est pas possible. Ceci signifie implicitement qu'il existe une hiérarchie des dimensionnalités et que les singularités d'une variété de n dimensions sont englobées et transformées dans les variétés d'une dimensionnalité plus grande. Gauss avait lui-même anticipé un tel résultat : *« L'auteur se réserve la possibilité de traiter ces questions, qui n'ont été que brièvement abordées dans cet essai, de manière plus complète à l'avenir, lorsque nous serons amenés à répondre à d'autres questions comme celles touchant aux relations entre objets formant des variétés de plus de deux dimensions, et qui fourniront des espèces de grandeurs additionnelles devant être admises dans l'arithmétique générale. »*

Il ne s'agit que d'un avant-goût de la variété d'idées trottant dans l'esprit des auditeurs présents lors de la dissertation d'habilitation de Riemann. Plus vous laisserez cette variété organiser vos pensées, plus les idées de Riemann prendront vie dans votre esprit. ■

Notes

1. Voir « La quadrature du cercle » de Nicolas de Cues, Fusion, n°88, novembre-décembre 2001.

2. J'inclus ici sous le terme « rectilinéaire » autant les grandeurs rationnelles qu'irrationnelles (algébriques).

3. Kästner fait ici référence à un jeu de mots de Cervantès, car le mot espagnol « algebrista » signifie aussi rebouteux.

4. C'est facile à vérifier, il suffit d'élever les deux côtés de l'expression au carré et d'effectuer la multiplication des deux facteurs se trouvant à gauche (NdT).

5. Carl Friedrich Gauss, Le théorème fondamental de l'algèbre, publié à l'origine en 1799, en latin, et disponible sur le site de Fusion, www.revuefusion.com, dans une première traduction française.

6. Voir « La division du cercle et le concept gaussien de domaine complexe », Fusion, n°90, mars-avril 2002.

7. En effet, les membres de la série 1, 2, 4, 8, 16,… donnent des résidus de 1, 2, 1, 2, 1,… relativement à modulo 3, car 3 ne rentre pas dans 1, ce qui nous laisse ainsi avec un résidu de 1 ; même chose pour 2, qui nous laisse avec un résidu de 2. Pour 4 toutefois, 3 y rentre une fois, avec un résidu de 1 ; pour 8, 3 y rentre deux fois, avec un résidu de 2, etc. (NdT.).

8. Par exemple, la rangée commençant par 3 nous donne les nombres 1, 3, 9, 27, 81, 243, 729, 2 187, etc., dont les résidus relativement à modulo 11 sont : 1, 3, 9, 5, 4, 1, 3, 9, etc. (NdT.).

9. Par exemple, dans le tableau que nous avons constitué relativement au module 11, les résidus 1, 3, 4, 5 et 9 sont congruents à des nombres carrés (mais aussi à des nombres rectangulaires), car ils apparaissent dans les deux types de colonnes, celles associées à des nombres carrés et celles associés à des nombres rectangulaires. Mais, pour les résidus 2, 6, 7, 8 et 10, ils ne sont jamais congruents à des nombres carrés, car ils n'apparaissent pas dans les colonnes de puissance paire. C'est pourquoi ils sont appelés non-résidus quadratiques, c'est-à-dire qu'ils ne sont pas des résidus de nombres carrés – relativement au module 11, bien entendu (NdT).

10. Si 1 est le résidu d'un nombre donné relativement à modulo 11, le résidu qui lui succédera immédiatement sur la droite sera 1 + 11, donc 12, et le résidu le précédant immédiatement sur la gauche sera 1 – 11, c'est-à-dire –10. On peut d'une certaine manière dire que –10, 1 et 12 sont équivalents, ainsi que tous les autres résidus obtenus en additionnant ou en soustrayant 11 (NdT.).

11. En effet, -1^2 et 10^2 donnent 1 et 100, tous deux congruents avec 1 modulo 11. – 1^2 et 12^2 donnent quant à eux 1 et 144, tous deux congruents avec 1 modulo 13 (NdT.).

12. Gauss avait tout d'abord démontré que si des nombres sont congruents relativement à un module donné, leurs carrés le sont aussi. Donc, puisque –1, 25 et 64 sont tous congruents relativement au module 13, leurs carrés, 1, 625 et 4 096 le sont aussi (NdT.).