

# Pourquoi l'espace n'est pas euclidien : l'exemple de la chaînette

**BRUCE DIRECTOR**

**Dans le cas de la chaîne suspendue, l'univers présente un paradoxe qui n'est pas très différent de celui auquel a dû se confronter Kepler lorsqu'il chercha à déterminer la géométrie du mouvement non uniforme d'une planète, ou de celui que Fermat confronta quand il découvrit que la lumière suivait la trajectoire de moindre temps. Dans ces trois cas, l'action physique mesurée ne se conforme pas à la géométrie déduite des axiomes, postulats et définitions de la géométrie euclidienne.**

**L**a veille de son incarcération injustifiée, Lyndon LaRouche a publié un memorandum court mais substantiel concernant la chaînette. Ce document, dénigré par certains, a été malheureusement ignoré ou incompris par la plupart.

La question cruciale est la distinction entre un principe défini du point de vue de la géométrie abstraite par opposition à la physique réelle. Du point de vue de la géométrie abstraite, le principe de moindre temps et de temps égal (ou d'isochronicité) est représenté par la cycloïde, alors que la chaînette représente, *a contrario*, ce même principe du point de vue de la physique réelle. L'exploration sans relâche du domaine séparant ce que la géométrie abstraite nous amène à croire et ce que nous apprenons de la physique réelle est au centre de la méthode de Nicolas de Cues, Kepler, Leibniz, Gauss, Riemann *et al.*

J'entends déjà certains protester : « Si je laisse un pendule se dérouler le long d'une cycloïde, ou si je laisse rouler une boule le long d'une trajectoire en forme de cycloïde, son mouvement correspond à celui du moindre temps ou peut se diviser en intervalles égaux. Cela ne démontre-

t-il pas que la cycloïde correspond à un principe physique ? »

La difficulté voire même l'hostilité avec laquelle certaines personnes peuvent réagir à ce paradoxe reflète le problème consistant à ne se fier qu'à des sources secondaires ou même qu'à de simples rumeurs, plutôt que de prendre le temps d'apprendre à connaître en revivant la découverte originale. Alors que LaRouche tire des conclusions nouvelles et révolutionnaires de ce paradoxe, la distinction qu'il fait entre géométrie abstraite d'une part et physique réelle de l'autre est, contrairement à ce qui est accepté dans le monde de l'enseignement, identique à la démarche des découvreurs originaux tels que Huygens, Bernoulli et Leibniz.

Durant les années 1680 et 1690, ces penseurs se sont engagés dans un dialogue concernant le développement d'une mathématique nouvelle, comme l'avait demandé Kepler lorsqu'il confirma l'hypothèse de Nicolas de Cues selon laquelle l'action dans l'univers est non uniforme. Parce que ce type d'action physique change toujours de façon non uniforme, il est impossible de déterminer la position (par exemple, d'une planète) simplement à partir de ses positions précédentes ou, comme LaRouche l'a exprimé, « *en connectant les points par des méthodes statistiques* ». La

position future d'une planète est plutôt déterminée par un principe caractéristique de changement gouvernant l'orbite dans son ensemble. Ce problème peut être reformulé de la façon suivante : comment la planète sait-elle de quelle façon elle doit changer ? Pour répondre à cette question, nous devons d'abord nous poser et résoudre les problèmes suivants : à quelle intention la planète se conforme-t-elle et comment cette intention se manifeste-t-elle à chaque instant ?

Le Cusain a exprimé ce problème dans son dialogue *Du jeu de la boule*. Ce dialogue porte sur un jeu que l'on joue avec une balle déformée qui roule sur une surface sur laquelle neuf cercles concentriques sont tracés. L'objectif du jeu est de faire rouler la balle aussi près que possible du centre. Mais puisqu'elle est déformée, elle suit une spirale plutôt qu'une trajectoire rectiligne. Pour y arriver, le joueur doit choisir une trajectoire qui pousse la balle à changer de direction et de vitesse de façon non uniforme. Le Cusain fait une analogie entre ce jeu et la relation entre Dieu, l'homme et la nature : « *L'âme rationnelle vise à produire son opération ; aussi longtemps que reste ferme cette visée, elle donne mouvement aux mains et instruments ; aussi longtemps que le sculpteur taille la pierre, on voit dans l'âme persister immuablement la visée et donner mouvement aux mains et aux instruments. De même la nature, que d'aucuns nomment âme du monde, immobile et stable demeurant sa visée, laquelle consiste à exécuter les ordres du créateur, met toutes les choses en mouvement. Et le créateur, éternelle demeurant sa visée, crée toutes choses.*

« *Et qu'est donc cette visée, sinon le projet, c'est-à-dire le verbe rationnel en qui de toutes choses sont les modèles ?* »

Leibniz et ses collaborateurs, Jean et Jacob Bernoulli, ont conçu le calcul différentiel afin d'accroître la capacité de l'esprit humain à appréhender la nature des intentions gouvernant l'action non uniforme dans l'univers. L'efficacité du calcul différentiel est illustrée par la façon dont Bernoulli a déterminé la brachistochrone (la chaînette et sa qualité de trajectoire de moindre temps) comme nous l'avons souligné dans un article précédent. Dans cet exemple, Bernoulli a dérivé la cycloïde en tant que trajectoire de

moindre temps, dans la mesure où la vitesse d'un corps en chute s'accroît selon le carré de la distance parcourue. Nous aborderons maintenant un autre exemple d'application de ce nouveau calcul : comment Leibniz et Bernoulli ont découvert la chaînette.

## Bernoulli et la chaînette

En 1691, Bernoulli a publié ses *Lectures sur le calcul intégral* qui demeurent encore aujourd'hui le meilleur manuel élémentaire sur le calcul différentiel et intégral. (Quiconque compare ce livre avec les manuels publiés depuis Cauchy et largement utilisés aujourd'hui verra immédiatement le caractère frauduleux de ces manuels. Ceci illustre malheureusement trop bien la faillite de l'éducation scientifique moderne. Le livre de Bernoulli ne peut être trouvé que dans les endroits les plus obscurs alors qu'il devrait être un manuel de référence.) Contrairement à la fraude de Cauchy, Bernoulli définit le calcul du point de vue de l'intégrale comme solution d'une équation différentielle. En d'autres termes, pour Leibniz et Bernoulli, l'intégrale exprime la nature sous-jacente – l'intention – d'un processus physique qui possède à chaque instant une caractéristique d'action. Cette caractéristique d'action, qui exprime le changement à chaque instant, est ce que Leibniz appelle la « différentielle ». Un processus physique pris dans son ensemble – l'intégrale – peut ainsi être exprimé comme fonction de sa caractéristique de changement à chaque instant, par ce que Leibniz appelle l'« équation différentielle ». L'exemple de la chaînette nous permettra de mieux illustrer cette relation.

Bernoulli affirme à juste titre que la méthode de Leibniz « *qui peut, jusqu'à un certain point, pénétrer dans les régions les plus profondes de la géométrie* » est capable de résoudre ce qui « *jusqu'à maintenant ridiculisait la puissance de la géométrie commune* ».

Bernoulli a montré que le calcul différentiel fut développé pour résoudre certains problèmes mécanico-physiques, comme celui qui consiste à déterminer la trajectoire de moindre temps (la cycloïde), qui est en même temps caractérisée par une division en intervalles de temps égaux. Il a

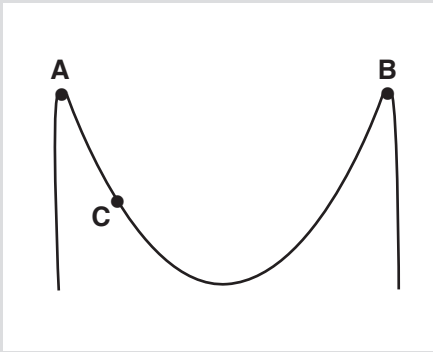
aussi permis de déterminer la forme de la chaînette. Cependant, Bernoulli a émis les mêmes avertissements que ceux formulés par Kepler par rapport aux méthodes de Ptolémée, Brahe et Copernic. Il explique entre autres que la recherche de la cycloïde comme trajectoire de moindre temps et tautochrone implique certaines suppositions de nature physique, qu'elle « *déguise de façon à les transformer de leur état de principe mécanique en principe purement géométrique* ». Les principes physiques mécaniques qui en résultent, telles les propriétés de moindre temps et d'isochronicité de la cycloïde, sont ainsi le produit de la géométrie abstraite et non des principes physiques véritables.

Étudions maintenant de plus près la chaînette, comme le firent Bernoulli et Leibniz, avec leur calcul différentiel. Une chaîne ou une corde pendant librement (sous l'effet de son propre poids) prend une forme caractéristique unique. Cette forme ne correspond toutefois à aucune courbe connue dans les manuels de géométrie standard. Le calcul différentiel est utilisé ici pour déterminer « la géométrie qui caractérise ce processus physique ». Il est important de souligner à nouveau la proposition inverse : la cycloïde est la trajectoire que la géométrie produit selon la supposition que l'univers se comporte d'une certaine façon. La chaînette est la forme que l'univers produit pour permettre à la chaîne qui pend de se stabiliser sur une « certaine orbite ». Dans le premier cas, la géométrie produit le principe, alors que dans le deuxième cas le principe produit la géométrie.

## Les propriétés de la chaînette

Afin de mieux saisir cette distinction, considérons la chaînette comme le firent Bernoulli et Leibniz. Le traitement de cette question par Bernoulli peut être trouvé dans une traduction allemande de ses *Lectures sur le calcul intégral* de 1691.

Nous voulons surtout insister sur le fait que la forme de la chaînette, formée par une chaîne pendant librement, est semblable à une orbite planétaire, dans le sens où chaque position le long de la courbe est



**Figure 1.** La forme que prend une chaîne lorsqu'elle pend librement sous son propre poids est celle qui lui permet de répartir de façon égale les tensions en chaque point. Ce qui signifie que chaque chaînon ressentira exactement la même tension que les autres, et ce pour chacun de ses deux côtés. Les chaînons situés près des points de suspension de la chaîne soutiennent beaucoup plus de poids que ceux situés près du point le plus bas, et pourtant ils n'ont pas besoin d'être fabriqués dans un matériau plus solide. Un chaînon situé au point C est tiré sur sa droite par une plus grande partie de la chaîne que sur sa partie gauche et pourtant il ne bouge pas. La position de chaque point est donc fonction de ces contraintes physiques.

fonction des principes physiques produisant la courbe. Dès que nous tentons de modifier une partie de la courbe, même infime, la courbe dans son ensemble se réoriente, de façon à maintenir la courbure non uniforme de la chaînette (**figure 1**).

Galilée a tenté d'appliquer ses méthodes « de tour d'ivoire » à l'étude de ce phénomène en essayant de faire concorder la chaînette à ses préjugés concernant la géométrie. La courbe la plus proche qu'il réussit à trouver fut la parabole. Pourtant, la réalité ne voulait pas se laisser brider, malgré les efforts insistants de Galilée. Joachim Jungius réussit à prouver de façon concluante, par l'expérience, que Galilée avait tort, mais il ne put déterminer la nature exacte de la courbe en question. Quelle était donc la géométrie d'une chaîne pendant librement entre deux points ? Ou, plus généralement, qu'est-ce que la courbure de la chaîne suspendue peut nous apprendre sur la géométrie de l'univers physique ?

Puisque aucune courbe de la géométrie pure ne correspondait à ce phénomène physique, il a fallu développer un nouveau type de géométrie.

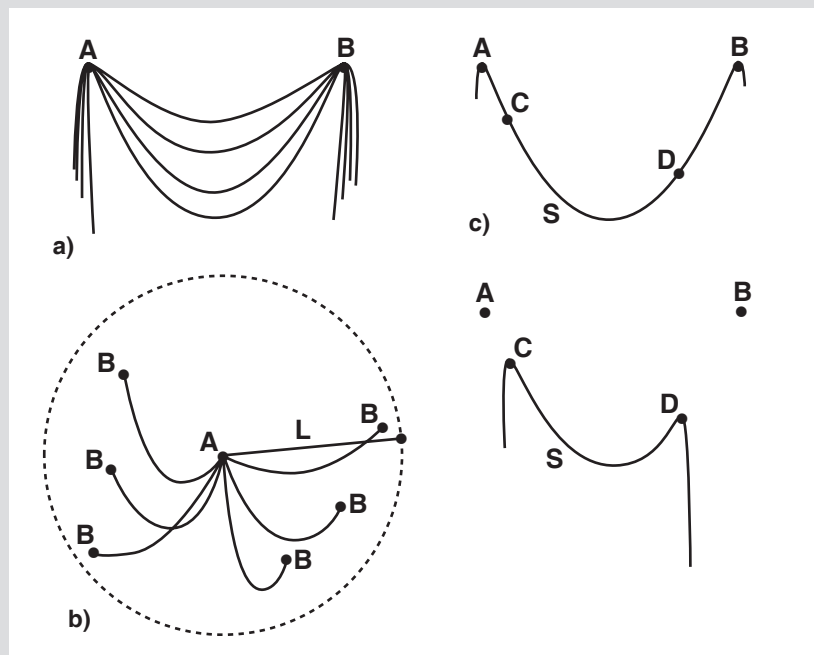
Commençons avec les propriétés de la chaîne suspendue. Une chaîne pendant librement entre deux extrémités prend une forme caractéristique (**figure 2**). Contrairement à l'intuition naïve, la forme reste la même malgré la composition matérielle de la chaîne et malgré la disposition des points de suspension, ainsi que pour d'autres facteurs.

Cette forme reflète donc un principe physique universel. Toutefois, la chaîne « ne reste pas là à rien faire ». Elle est, pour ainsi dire, toujours en mouvement. Chaque point le long de la chaîne est soumis à une tension. Le chaînon situé d'un côté du point le

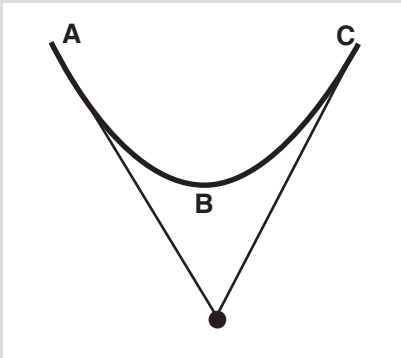
tire dans une direction le long de la courbe, tandis que le chaînon du côté opposé le tire avec une force égale dans l'autre direction, également le long de la courbe. Ces deux tensions égales et opposées sont les mêmes pour tous les points de la chaîne, indépendamment de la longueur de la chaîne suspendue entre deux points donnés. Ceci est aussi contraire à l'intuition naïve selon laquelle les points situés plus près des points de suspension seraient, par exemple, soumis à de plus fortes tensions et devraient être de ce fait composés d'un matériau plus résistant puisqu'ils ont à supporter une plus grande longueur

de chaîne entre eux. Si la longueur de la chaîne est augmentée ou diminuée entre deux points donnés, le poids total supporté varie mais la tension totale demeure la même pour tous les points. La chaîne adopte une forme qui lui permet de répartir de façon égale les tensions, peu importe sa longueur. Ainsi, chaque position de cette courbe non uniforme est fonction d'un principe physique. C'est à ce principe physique que Bernoulli a appliqué le calcul différentiel de Leibniz.

Prenant l'égalité des tensions comme « différentielle », Bernoulli a cherché à déterminer la nature (ou



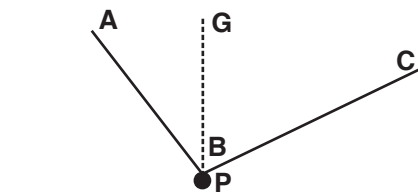
**Figure 2.** a) Un changement dans la longueur de la chaîne génère une famille de chaînettes de courbure différente. b) Lorsque nous déplaçons l'un des bouts d'une chaîne de longueur fixe, nous obtenons une seconde famille de chaînettes. c) Si nous relâchons la chaînette AB de façon à ce qu'elle retombe sur les points C et D, nous constatons que l'arc restant forme toujours une chaînette.



**Figure 3.** La force exercée aux points A et C de la chaînette est la même que celle exercée par un corps de poids égal à la partie pendante de la chaînette entre ces deux points, et suspendu par deux cordes tangentes à ces deux mêmes points.

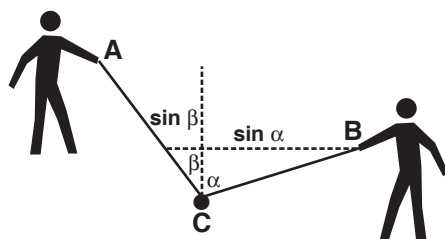
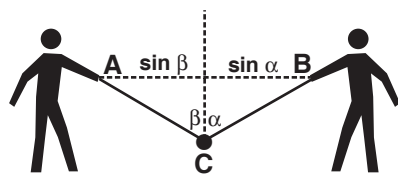
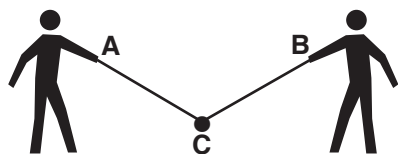
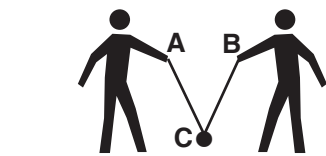
l'intégrale) de la courbe produisant cette caractéristique en chaque point. Il commença par une expérience collinaire. Il démontra d'abord que la

force exercée par la chaîne entre deux points donnés situés sur des côtés opposés de la chaînette serait la même que si l'ensemble du poids était con-



**Figure 4. a)** La force exercée en A par rapport à celle exercée en C est proportionnelle au rapport entre le sinus de l'angle ABG sur le sinus de l'angle CBG.

La démonstration suivante permet d'illustrer ce principe de façon intuitive. Demandons à deux personnes de tenir un corps suspendu par deux cordes, comme en b. Si les deux personnes s'éloignent l'une de l'autre (b et c), l'effort qu'elles fournissent pour tenir le corps s'accroît en fonction du sinus de l'angle formé par chaque corde avec la verticale (d). On peut essayer avec des angles différents et voir comment varie l'effort. Par exemple, une personne tenant la corde plus haute que l'autre fera un effort différent (e).



centré dans un corps suspendu par deux cordes tangentes à la chaînette en ces deux points (figure 3). Le rapport des forces en ces points dépend des angles entre la verticale passant par le corps et les deux cordes qui le soutiennent (figure 4).

Le point le plus bas de la chaîne est une singularité, c'est-à-dire que c'est le seul endroit où la force ne change pas, que nous changions ou non la longueur de la chaîne de chaque côté. Paradoxalement, ce point ne supporte aucune partie de la chaîne, tout en supportant la totalité (figure 5). Bernoulli a montré que la forme de la chaîne, que Huygens a appelé la « chaînette », est la courbe permettant de maintenir une force égale sur ce point le plus bas. Afin de satisfaire cette intention, la chaîne doit prendre cette configuration géométrique unique (figure 6).

Ceci contredit toute supposition selon laquelle l'espace se conformerait à une géométrie uniforme, qu'il s'étendrait indéfiniment dans trois dimensions comme l'affirment les axiomes et postulats de la géométrie euclidienne. Les propriétés physiques de la chaîne interagissant avec la terre produisent un type de courbure unique à laquelle la chaîne se conforme de façon à se stabiliser. Ce n'est pas la géométrie qui produit la forme de la chaîne mais la physique qui détermine la géométrie. Leibniz découvrit un autre principe qui, tout en étant cohérent avec celui de Bernoulli, permit de définir d'une autre façon la géométrie de la chaîne.

## Le principe de Leibniz

Tandis que Bernoulli explorait les caractéristiques de la chaînette, Leibniz se posait quant à lui la question suivante : pourquoi la chaîne prend-elle cette forme et pas une autre ?

Faisons ici un pas en arrière. Bernoulli découvrit qu'une chaîne pendante librement sous son propre poids prenait, afin de former une « orbite stable », une forme unique qui ne correspondait à aucune configuration géométrique alors connue des mathématiciens de son époque – la chaînette. Bernoulli dérivait les propriétés de la chaînette des propriétés physiques de la chaîne suspendue : en l'occurrence, la chaîne cherchait à être stable et devait, pour cette raison,

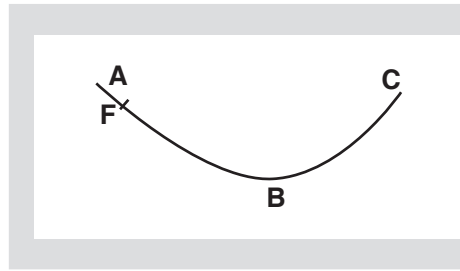
répartir la tension de façon égale sur l'ensemble de sa longueur. La chaînette est donc ce qui détermine la caractéristique physique du changement, que Leibniz appelait l'intégrale. Cette caractéristique physique déterminée se manifeste à tous les points de la chaîne. La manière par laquelle cette caractéristique physique change d'un endroit à l'autre est ce que Leibniz appelle la différentielle. Ainsi, la forme géométrique de la chaîne est celle qui exprime cette propriété physique unique.

Cette façon d'aborder les choses enrage les mathématiciens comme Newton, Euler et Cauchy, car selon eux « les mathématiques priment, la réalité physique vient ensuite ». Ceci pourrait très bien être leur devise, qui est seulement une autre version de la psychose exhibée par ceux qui attribuent une valeur économique magique à l'argent, en particulier à leur argent. Mais il est tout à fait naturel pour des penseurs comme Platon, Kepler et Nicolas de Cues de considérer les mathématiques comme une métaphore permettant d'exprimer un certain niveau de connaissance concernant les intentions portées par un processus physique.

Le Cusain demande : « *Qu'est-ce qu'une intention sinon une conception, ou un mot rationnel, dans lequel tous les exemplaires des choses s'y rapportant sont présents ?* »

Dans le cas de la chaîne suspendue, l'univers présente un paradoxe qui n'est pas très différent de celui auquel a dû se confronter Kepler lorsqu'il chercha à déterminer la géométrie du mouvement non uniforme d'une planète, ou de celui que confronta Fermat lorsqu'il découvrit que la lumière suivait la trajectoire de moindre temps. Dans ces cas, l'action physique mesurée ne se conformait pas à la géométrie déduite à partir des axiomes, postulats et définitions de la géométrie euclidienne. En fait, dans chacun de ces cas, l'action physique contredisait la conclusion, déduite de ces axiomes, postulats et définitions, selon laquelle l'espace était un continuum uniforme, s'étendant indéfiniment dans trois directions orthogonales.

Comme Kepler, Bernoulli rejette les méthodes consistant à superposer des courbes comme le faisaient Ptolémée, Copernic, Brahe, Galilée et Newton. Ces aristotéliens présumaient que l'espace était une sorte



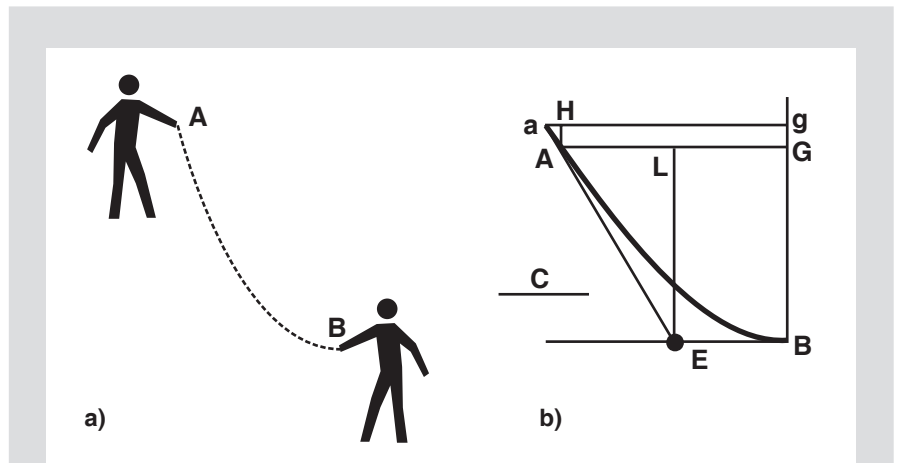
**Figure 5.** Que la chaîne soit plus longue ou plus courte, la force exercée sur le point le plus bas ne change pas. Si la chaîne est allongée de F à A, la force en B demeure la même.

de boîte vide infinie, dans laquelle des objets physiques interagissaient le long de lignes droites ou de cercles parfaits. Pour eux, la connaissance que pouvait déduire l'homme de tels processus physiques se limitait à faire coller n'importe quelle observation à un ensemble plus ou moins élaboré de cercles parfaits et de lignes droites. Kepler, Bernoulli et Leibniz n'entretenaient pour leur part aucun *a priori* sur la nature de l'espace. Ils cherchaient plutôt à déterminer ce qui gouvernait les processus physiques, ce qui agissait au-delà de ce qui pouvait être vu. L'ironie est que ce qui gouverne les processus physiques n'est jamais directement observable, ce quelque chose doit être découvert à partir des paradoxes qui surgissent quand ce que l'on voit contredit nos

suppositions.

Une comparaison plus précise entre les découvertes de Kepler et les travaux de Fermat concernant la lumière serait ici bienvenue. Kepler a montré que la trajectoire unique d'une planète dans le système solaire est gouvernée non pas par une interaction biunivoque entre la planète et le Soleil, mais par ce que Gauss et Riemann appelleront une « hypergéométrie ». De la même façon, Fermat a montré que la trajectoire de la lumière était gouvernée non pas par la notion euclidienne selon laquelle le trajet le plus court est celui de la plus courte distance, mais par une hypergéométrie dans laquelle le trajet le plus court est celui qui est celui de moindre temps.

Regardons de plus près la dé-



**Figure 6.** a) La chaînette est la forme qui permet de maintenir une force égale sur le point le plus bas. Si deux personnes tiennent un corps à l'aide de deux cordes, la chaînette est la trajectoire formée par la personne A lorsqu'elle se déplace de façon à maintenir constante la force permettant de soulever le corps, pendant que la personne B reste immobile. Quand la personne A s'éloigne de la personne B, elle doit élever le bout de la corde de façon à maintenir la force constante. En d'autres termes, la personne A doit accompagner chaque déplacement horizontal d'un mouvement vertical non uniforme afin de maintenir constante la force exercée sur l'objet. b) La représentation géométrique de Bernoulli. La relation toujours changeante entre l'horizontale  $H_a = dx$  et la verticale  $G_g = dy$  définit une équation différentielle qui ré-ète l'exigence selon laquelle le sinus des angles AEL et BEL doivent être proportionnels. La chaînette est définie par ce que Leibniz appelait l'intégrale de cette différentielle.

couverte de Fermat. Lorsqu'elle est réfléchiée par un miroir, la lumière adopte une géométrie telle que l'angle d'incidence est égal à l'angle de réflexion. Mais la question demeure : *pourquoi la lumière adopte-t-elle cette géométrie et pas une autre ?* Alors que les aristotéliens s'énervent dès qu'ils entendent cette question, les disciples de Platon se sont sentis obligés de la poser et d'y répondre, ce qui les a conduit à découvrir une des caractéristiques de l'hypergéométrie gouvernant l'action. Confrontés à cette observation, les disciples de Platon ont démontré que l'égalité des angles n'était qu'une conséquence de l'exigence hypergéométrique selon laquelle la lumière devait suivre le trajet de plus courte distance.

Cependant, dans le cas de la réfraction, la lumière ne voyage pas selon le trajet de plus courte distance, et les angles d'incidence et de réfraction ne sont pas, par conséquent, égaux. Kepler et d'autres, en particulier Willebrord Snell, ont déterminé que la géométrie de la lumière réfractée était telle que les sinus des angles d'incidence et de réfraction étaient proportionnels. Mais ceci n'est, encore une fois, que la géométrie du phénomène observé, pas la caractéristique de l'hypergéométrie qui le gouverne. En d'autres termes, la question « pourquoi les sinus des angles d'incidence et de réfraction sont-ils proportionnels ? » n'est pas posée ni résolue. La découverte de Fermat permettait de montrer que cette relation géométrique était une conséquence d'un principe universel, à savoir que la lumière voyage selon le trajet de moindre temps. Quand nous y réfléchissons de façon plus attentive, la plus courte distance exprimée par la lumière lors de la réflexion n'est qu'un cas particulier du principe de moindre temps, tel qu'il est apparu dans le cas de la réfraction.

Alors, pourquoi la chaîne adopte-t-elle cette forme et pas une autre ? Autrement dit, quelle est la caractéristique de l'hypergéométrie gouvernant l'action de la chaîne ?

La découverte de Leibniz reposait sur un réexamen par lui-même et Bernoulli des découvertes de Pythagore, Théodore, Théétète et Platon, telles qu'elles sont relatées dans le dialogue de Platon intitulé le *Théétète*. Ces recherches se rapportent au premier niveau de paradoxes qui surgissent lorsque nous considérons



Figure 7.

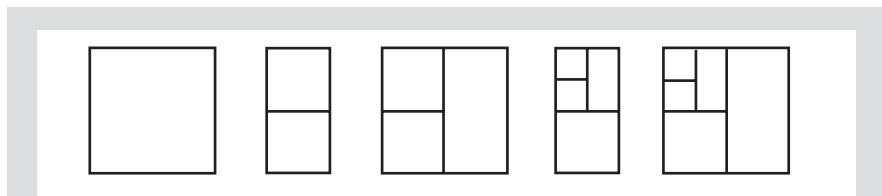


Figure 8.

la différence entre l'action linéaire et la rotation.

Pour mieux saisir ce paradoxe, faisons l'exercice suivant.

D'abord, dessinons un segment de droite, puis doublons-le une fois, puis une deuxième fois et ainsi de suite. Ensuite, refaisons l'exercice avec un segment similaire mais en le triplant une fois, deux fois, trois fois, etc. (figure 7).

Maintenant refaisons la même chose, mais cette fois-ci non pas avec un segment, mais un carré (figure 8). Nous constatons que lorsque nous doublons ou triplons un segment de droite, le résultat est toujours un segment de droite. Toutefois, lorsque nous doublons ou triplons un carré,

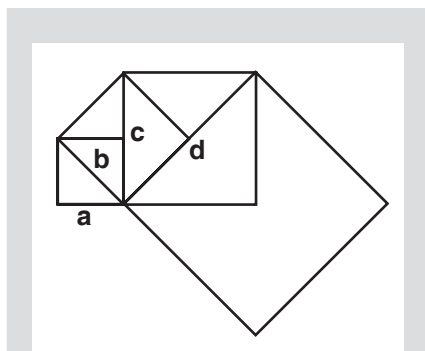


Figure 9. Lorsque les aires des rectangles de la figure 8 sont transformées en carrés, les côtés des rectangles deviennent incommensurables avec les côtés des carrés d'aires identiques. La séquence illustrée ici montre des carrés. La diagonale d'un carré devient le côté du carré de surface double au carré d'origine. Les côtés forment des proportions géométriques entre eux:  $a:b = b:c = c:d$ .

le résultat est une alternance de carrés et de rectangles. Dans le *Théétète*, Platon présente ce paradoxe selon lequel les rectangles sont incommensurables avec les carrés (figure 9). Reconfigurons cette série de carrés et de rectangles de façon à n'obtenir que des carrés. Commençons avec un carré ; pour le doubler, traçons sa diagonale puis utilisons-la comme côté d'un autre carré.

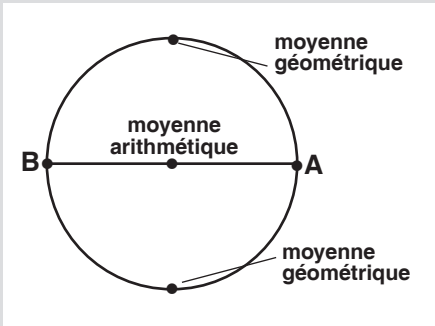
Recommençons le processus et nous obtiendrons une spirale de carrés.

Ainsi, lorsque nous faisons le même exercice dans deux géométries différentes, nous obtenons des résultats différents. Selon la terminologie de Gauss et de Riemann, la dimensionnalité de la variété détermine la nature de l'action en son sein.

Les Grecs identifiaient ces deux différentes variétés de nombres comme « arithmétique » (linéaire) et « géométrique » (rotationnelle), et mesuraient les rapports dans chaque variété par des intervalles caractéristiques, des « moyennes » définissant chacun des processus. La « moyenne arithmétique » est l'intervalle caractéristique entre deux grandeurs linéaires, plus particulièrement le milieu d'un segment de droite. La « moyenne géométrique » est l'intervalle caractéristique de la rotation, correspondant plus précisément à la moitié d'une action de rotation (figure 10).

Bernoulli, Huygens et Leibniz ont reformulé ce paradoxe d'une autre façon. Bernoulli a découvert que l'arithmétique et le géométrique peuvent être combinés en une seule représentation : par une spirale équiangulaire (figure 11).

Leibniz a représenté l'arithmétique et le géométrique à l'aide de ce qu'il



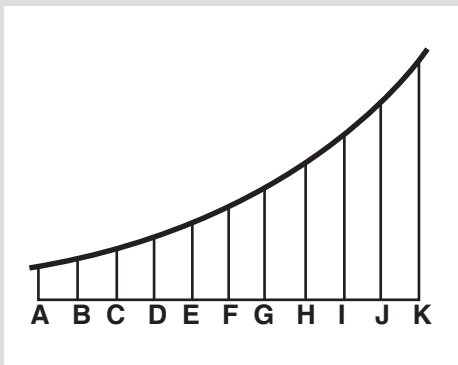
**Figure 10.** La moyenne arithmétique entre A et B est le point situé à mi-distance du diamètre. La moyenne géométrique est située sur la demi-circumference.

a appelé une courbe logarithmique (**figure 12**). Cette courbe est construite de façon à ce que la variation horizontale soit arithmétique et la verticale géométrique.

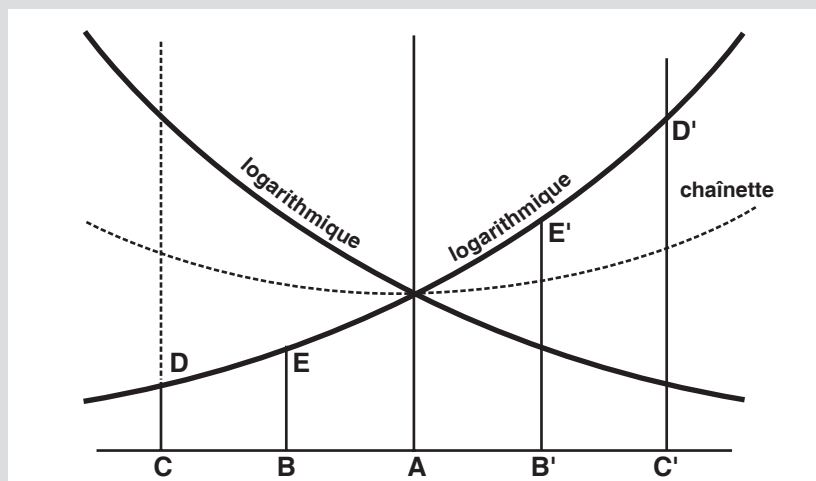
Ici nous arrivons à la découverte surprenante de Leibniz selon laquelle la chaînette peut être construite à

partir de cette courbe logarithmique (**figure 13**). Ainsi, la chaînette est la moyenne arithmétique entre deux courbes logarithmiques et, inversement, la courbe logarithmique est la moyenne géométrique entre deux chaînettes !

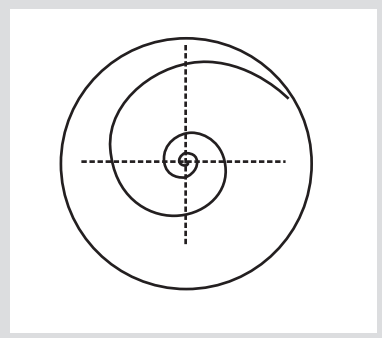
Comparons maintenant la dé-



**Figure 12.** La courbe logarithmique de Leibniz. L'action horizontale est arithmétique tandis que l'action verticale est géométrique. Ainsi, les intervalles A-B, B-C, C-D, etc., sont tous égaux, tandis que les lignes verticales liant la courbe logarithmique à l'abscisse forment des proportions géométriques.



**Figure 13.** La construction de la chaînette réalisée par Leibniz. Les intervalles C-B, B-A, A-B', B'-C' sont tous équivalents, alors que les verticales C-D, B-E, A-F, B'-E' et C'-D' sont en proportions géométriques. Pour construire la chaînette, nous devons ajouter C-D à C'-D' et calculer la moyenne arithmétique. Ce point est situé sur la chaînette. De la même façon, ajoutons B-E à B'-E' et calculons la moyenne arithmétique. Nous trouverons un deuxième point appartenant à la chaînette. Il suffit de répéter le processus pour dessiner la totalité de la chaînette.



**Figure 11.** La spirale logarithmique de Bernoulli. Des rayons également répartis coupent la spirale en arcs dont les longueurs sont en proportions géométriques entre elles. Inversement, la spirale coupe les rayons en proportions géométriques.

couverte de Bernoulli avec celle de Leibniz. Bernoulli a découvert la chaînette comme conséquence de la caractéristique physique d'une chaîne pendant librement sous son propre poids. Leibniz démontra que la géométrie de cette courbe était elle-même une conséquence de l'hypergéométrie gouvernant l'action physique de la chaîne. Autrement dit, la chaîne est guidée, pour ainsi dire, par une courbure logarithmique invisible. Ceci est une parfaite illustration de la méthode de Leibniz, l'*analysis situs*, par laquelle il a réussi à déterminer l'invisible à partir de ce qui est visible ; ce qui guide à partir de ce qui est guidé.

Pensez à la petite expérience décrite ci-dessus. Le trajet que nous devons suivre afin de maintenir une égalité des forces est guidé par la courbure d'une courbe logarithmique. Ceci est une démonstration que l'espace n'est pas euclidien.

De même que l'action de la planète est une expression de principes sous-jacents au système solaire, et que le trajet de la lumière est une expression d'un principe de moindre temps, ainsi le trajet de la chaîne suspendue est une expression d'un principe de nature logarithmique. Mais ceci nous amène-t-il à conclure qu'il existe une multiplicité d'hypergéométries, ou existe-t-il un principe unificateur nous permettant d'unifier ces trois phénomènes apparemment disparates ? ■