

Comment Gauss a déterminé l'orbite de Cérès (3ème partie)



JONATHAN TENNENBAUM

11. A L'APPROCHE DU POINT CRITIQUE

Nous sommes au début du XIX^e siècle. Les astronomes se mobilisent pour retrouver l'astéroïde Cérès. Ceux qui utilisent l'outil mathématique élaboré par Laplace dans sa Mécanique céleste échouent dans leurs efforts. Le vieux Laplace, en personne, affirme qu'il est impossible de déterminer l'orbite de Cérès à partir des données limitées que nous disposons. Pourtant, le jeune Gauss est sur la voie de la résolution du problème, malgré le fait que chaque observation ne représente rien de plus qu'une ligne de visée, sans indication sur la distance. Nous publions ici l'avant-dernière partie de cet article retraçant l'approche de Gauss.

Nous nous rapprochons du point critique de la solution de Gauss. Les constructions de cette section et des suivantes sont élémentaires mais d'un caractère hautement polyphonique.

Regardons brièvement le chemin parcouru et ajoutons quelques idées nouvelles au processus en cours.

Reprécisons d'abord la nature du problème : nous disposons de trois observations de Piazzi donnant la position apparente de Cérès dans le ciel vue depuis la Terre, à trois instants spécifiés séparés d'environ une vingtaine de jours. Le premier objectif de Gauss est de déterminer

la distance de Cérès à la Terre pour au moins l'une de ces observations.

Deux difficultés « préoccupantes » semblent nous barrer la route.

La première réside dans le fait que les observations du mouvement de Cérès ont été effectuées à partir d'un point qui, lui aussi, est en mouvement. La position et le mouvement apparent de Cérès, tels qu'ils sont vus depuis la Terre, sont donc le résultat de plusieurs processus simultanés, parmi lesquels le véritable mouvement orbital de Cérès, le mouvement orbital de la Terre ainsi que sa rotation quotidienne. De plus, Gauss a dû « corriger » les observations pour tenir compte de la précession des équinoxes (le léger décalage de l'axe de rotation terrestre), l'aberration optique, la réfraction, etc.

La deuxième difficulté est qu'il n'y a rien dans les observations de Cérès qui, en soi, nous donne une indication directe sur la distance à laquelle l'objet pourrait se trouver de la Terre. Chaque observation ne définit rien de plus qu'une « ligne de visée », une direction dans laquelle l'objet a été observé. Nous pouvons représenter la situation de la manière suivante (**Figure 11.1**) : de chacun des trois points E_1, E_2, E_3 représentant les positions de la Terre (ou plus précisément, celles de l'observatoire de Piazzi) aux trois instants d'observation, traçons des lignes « infinies » L_1, L_2, L_3 , chacune dans la direction

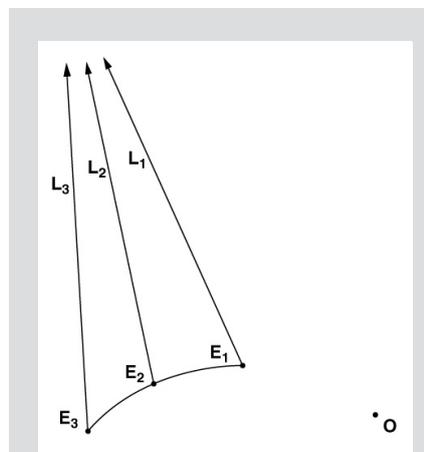


Figure 11.1. Les points P_1, P_2, P_3 doivent se trouver sur les lignes de visée L_1, L_2, L_3 . Mais où ?

selon laquelle Cérès a été observé aux instants correspondants. En ce qui concerne les véritables positions de Cérès dans l'espace (P_1, P_2, P_3), les observations nous disent seulement que P_1 se trouve quelque part sur L_1 , que P_2 se trouve quelque part sur L_2 et que P_3 se trouve quelque part sur L_3 . Pour un empiriste, les distances le long de ces droites restent totalement inconnues.

Nous savons cependant quelque chose de plus. Si Cérès fait partie du système solaire, son mouvement doit être gouverné par l'ordre harmonique de ce système tel qu'il est, entre autres, exprimé par les contraintes de Gauss et de Kepler. Celles-ci reflètent la courbure de l'espace-temps dans lequel ont lieu les événements enregistrés par Piazzi, et c'est en fonction de cette courbure que nous devons « lire » ses observations.

D'après la première contrainte de Gauss, l'orbite de Cérès s'inscrit dans un plan passant par le centre du Soleil. Cette simple proposition devrait déjà transformer notre « lecture » des observations. Plutôt que de se trouver « quelque part » le long de leurs droites respectives, les points P_1, P_2 et P_3 correspondent à l'intersection entre les trois droites L_1, L_2 et L_3 et un certain plan passant par le Soleil (**Figure 11.2a**). Nous ne savons pas encore de quel plan il s'agit, mais l'existence même d'une telle intersection réduit déjà beaucoup le degré d'indétermi-

nation du problème et introduit une relation entre les trois positions (toujours inconnues) et les distances.

En effet, imaginez un plan variable qui puisse pivoter autour du centre du Soleil ; pour chacune des positions de ce plan, nous avons trois points d'intersection avec les droites L_1, L_2 et L_3 . Considérez maintenant, en fonction de l'« inclinaison » variable du plan, de quelle manière *se transforme* la configuration de ces trois points l'un par rapport à l'autre et par rapport au Soleil (**Figure 11.2b**). En ce qui concerne la relation géométrique entre les trois positions réelles de Cérès, pouvons-nous déterminer une caractéristique qui distinguerait *a priori* ce groupe spécifique de points de tous les autres générés par l'intersection des trois droites avec un plan arbitraire passant par le centre du Soleil ?

Grâce au travail de la section précédente, nous avons déjà une partie de la réponse (**Encadré 1**). Nous avons trouvé que le rapport entre la deuxième position de Cérès (P_2) et les deux autres (P_1 et P_3) s'exprime par un *parallélogramme* dont les sommets sont O et P_2 ainsi que deux points Q_1 et Q_3 se trouvant respectivement sur les axes OP_1 et OP_3 . De plus, nous avons découvert que les positions Q_1 et Q_3 , définissant ces deux déplacements, peuvent être précisément caractérisés dans les termes de rapports d'aires triangulaires délimitées par les posi-

tions P_1, P_2 et P_3 (ainsi que O).

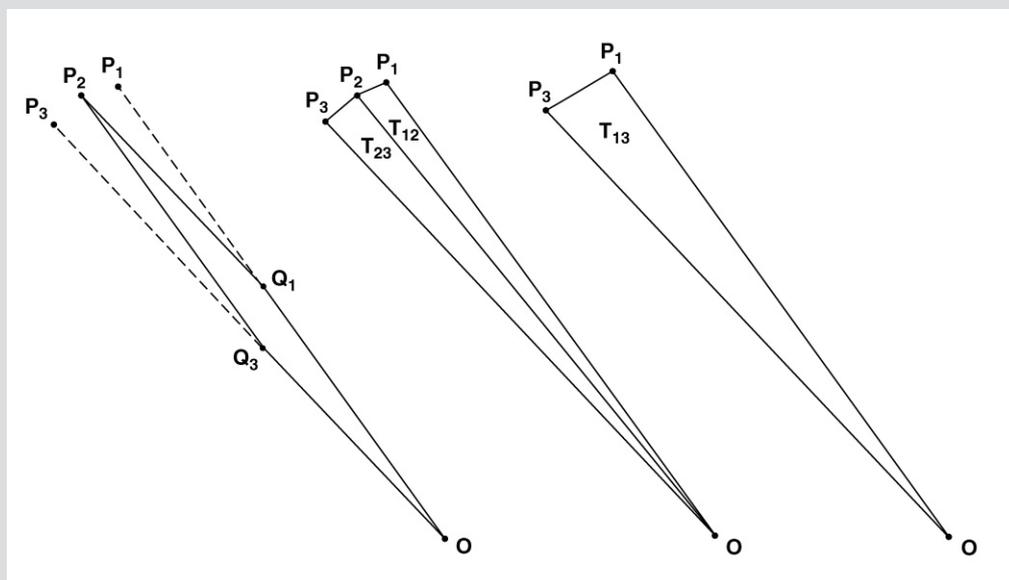
A partir de maintenant, il nous arrivera de désigner les rapports $T_{23} : T_{13}$ et $T_{12} : T_{13}$ (ou T_{23} / T_{13} et T_{12} / T_{13}) comme étant les « coefficients » déterminant les relations entre les trois positions en question.

Nous avons déjà remarqué dans la section précédente que les aires triangulaires intervenant dans ces relations sont *presque* identiques aux secteurs orbitaux balayés par la planète au cours de son mouvement entre les positions correspondantes. Or, grâce à la « loi des aires » de Kepler, nous *connaissons* leurs rapports pour être les rapports des durées écoulées. Nous les avons même calculés dans la section précédente grâce aux données de Piazzi.

Cependant, l'aire de chaque secteur orbital *dépasse* celle du triangle correspondant de l'aire d'une lunule délimitée par l'arc orbital et le segment de droite reliant les deux positions correspondantes de la planète.

Dans la mesure où les trois positions de la planète sont relativement proches les unes des autres – et c'est le cas pour Cérès aux instants d'observation de Piazzi – la surface de la lunule ne représente qu'une faible fraction de celle des triangles (et des secteurs). Dans ce cas, les rapports des triangles $T_{23} : T_{13}$ et $T_{12} : T_{13}$ seront « très proches » des rapports des secteurs orbitaux correspondants

Encadré 1



La relation de P_2 à P_1 et P_3 s'exprime par un parallélogramme formé à partir des déplacements OQ_1 et OQ_3 , le long des axes OP_1 et OP_3 respectivement. Les points Q_1 et Q_3 divisent les segments OP_1 et OP_3 selon des proportions qui peuvent être exprimées à partir des aires des triangles T_{12}, T_{23} et T_{13} . Nous savons en fait depuis la section 10 que :

$$OQ_1 / OP_1 = T_{23} / T_{13} \text{ et } OQ_3 / OP_3 = T_{12} / T_{13}.$$

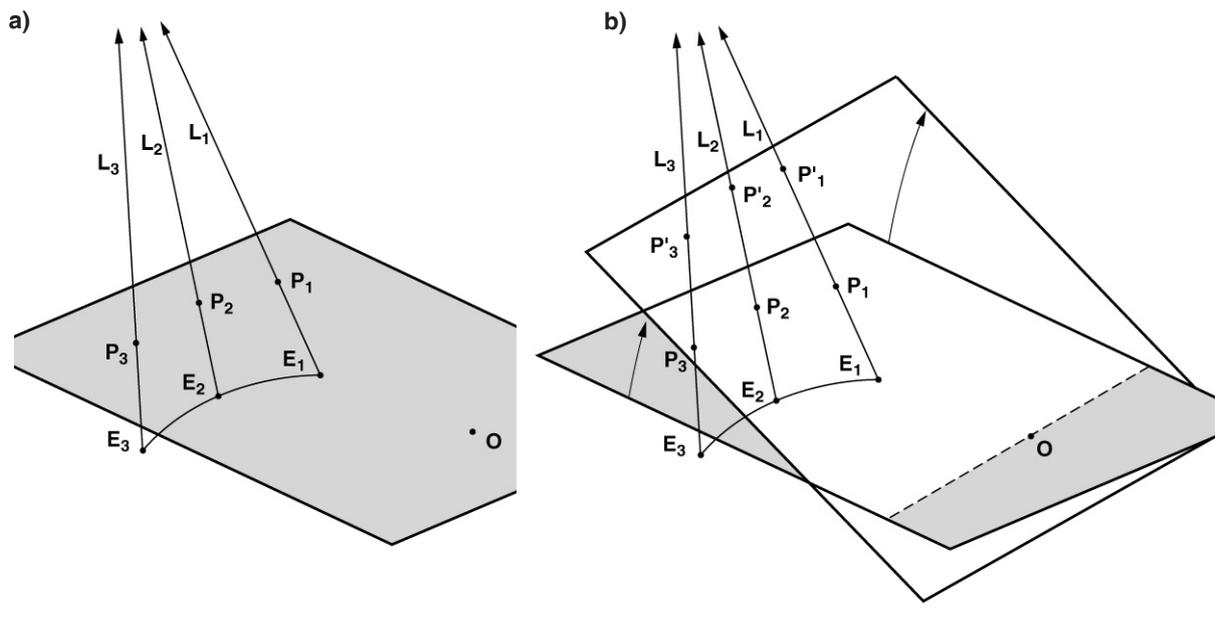


Figure 11.2. a) P_1 , P_2 et P_3 qui sont des positions de l'orbite de Cérés, doivent toutes se trouver sur un plan passant par le Soleil. b) Chaque position hypothétique du plan orbital définit une configuration différente des positions de P_1 , P_2 et P_3 les unes par rapport aux autres.

$S_{23}:S_{13}$ et $S_{12}:S_{13}$, dont les valeurs ont été calculées à la section 10.

Pouvons-nous considérer la petite différence d'aires entre les triangles et les secteurs comme « une marge d'erreur acceptable » en première approximation ? Si c'est le cas, alors nous pouvons reprendre les valeurs numériques calculées à la section 10 à partir des rapports de durées écoulées et dire, approximativement :

$$T_{23} / T_{13} = S_{23} / S_{13} = 0,513,$$

$$T_{12} / T_{13} = S_{12} / S_{13} = 0,487.$$

En supposant, dans un premier temps, que ces équations sont à peu près correctes, que vont-elles nous apprendre au sujet de la configuration des points P_1 , P_2 et P_3 ?

Pour en avoir une idée, nous invitons le lecteur à réaliser l'expérience graphique suivante : choisissez un point fixe O pour représenter le centre du Soleil et choisissez deux autres points *quelconques* pour P_1 et P_3 . Déterminez ensuite les positions correspondantes de Q_1 et Q_3 sur les segments OP_1 et OP_3 de manière à ce que OQ_1 représente 0,513 fois la longueur totale de OP_1 et OQ_3 0,487 fois la longueur totale de OP_3 . Combinez les déplacements de OQ_1 et OQ_3 selon la loi des parallélogrammes pour déterminer une position de P_2 . Changez ensuite les positions de P_1 et P_3 pour voir comment la position de P_2 évolue.

Qu'est-ce qui reste constant dans la relation entre P_2 , P_1 et P_3 ? Examinez également l'effet produit lorsque l'on remplace les « coefficients » par une paire d'autres valeurs, par exemple 0,6 et 0,9.

A l'évidence, en *spécifiant* les valeurs des rapports en fonction desquels la position de P_2 est déterminée par celles de P_1 et P_3 , nous avons *considérablement réduit* l'étendue de tous les triplets « possibles » qui pourraient être retenus pour les trois positions de Cérés.

Représentez vous à nouveau la variété d'un « triplet » de points tels qu'ils sont obtenus par l'intersection d'un plan variable passant par le centre du Soleil et des trois lignes de visée L_1 , L_2 et L_3 (**Figure 11.2**). Combien de ces triplets présentent cette relation particulière entre le deuxième point et les deux autres, définie à partir de ces valeurs spécifiques pour les coefficients ? Si l'on réfléchit à cette question en dessinant plusieurs exemples, on arrive rapidement à la conviction qu'en dehors de certains cas particuliers pour L_1 , L_2 et L_3 et pour les valeurs des coefficients, cette configuration particulière ne convient que pour *un seul* plan. Ainsi, dans la pratique, les positions des trois points en question sont déterminées de manière unique, à partir du moment où sont donnés

L_1 , L_2 et L_3 et les coefficients.

Si c'est le cas, le problème que nous nous sommes posé doit avoir intrinsèquement une solution ! En fait, il doit exister une manière de déterminer la distance entre la Terre et Cérés à partir de rien d'autre que les droites L_1 , L_2 et L_3 (telles qu'elles sont données par les observations de Piazzi), les positions de la Terre et des valeurs suffisamment précises des coefficients définis ci-dessus. Pour voir comment on peut y arriver, réfléchissez au parallélogramme exprimant la relation entre la deuxième position de Cérés et les deux autres (**Encadré 1**). Ce parallélogramme exprime le fait que la position P_2 de Cérés (toujours inconnue) résulte de la combinaison de deux déplacements OQ_1 et OQ_3 . A propos des positions de Q_1 et Q_3 , nous savons qu'ils se trouvent respectivement sur les segments OP_1 et OP_3 et qu'ils divisent ces segments selon les proportions (« coefficients ») dont nous connaissons les valeurs ou du moins approximativement (**Figure 11.3**). Malheureusement, du fait que nous ne connaissons pas P_1 et P_3 , nous n'avons aucun moyen direct de déterminer les positions de Q_1 et Q_3 dans l'espace.

Examinons la situation plus attentivement. Considérons d'abord la relation entre le déplacement OQ_1

et les positions du Soleil, de la Terre et de Cérès à l'instant de la première observation. Ces positions forment un triangle dont les côtés sont OE_1 , OP_1 et E_1P_1 (**Figure 11.4a**). Le point Q_1 se trouve sur l'un des côtés, en l'occurrence OP_1 , et le divise suivant la proportion définie par le premier coefficient. Cependant, nous ne pouvons rien dire au sujet des longueurs de OP_1 et E_1P_1 , ni de l'angle entre elles, et donc la position de Q_1 reste inconnue pour l'instant.

Mais qu'en est-il des points qui correspondent à Q_1 sur les autres côtés du triangle ? Tracez la parallèle à E_1P_1 passant par Q_1 . Cette parallèle passe par OE_1 en un point que nous appellerons F_1 . Ce dernier divise le segment OE_1 selon la même proportion que Q_1 divise OP_1 (en effet, par construction, OF_1Q_1 et OE_1P_1 sont des triangles similaires). Comme nous l'avons signalé, nous connaissons approximativement cette proportion. Du fait que la position de la Terre (E_1) est connue, nous pouvons déterminer directement la position de F_1 , en divisant le segment connu OE_1 selon cette même proportion.

Ce résultat va nous rapprocher de notre but d'une dimension supplémentaire ! Constatez que – par construction – le segment F_1Q_1 est parallèle et congruent à un sous-segment de la ligne de visée E_1P_1 . Appelons ce sous-segment E_1G_1 . En d'autres termes, pour arriver à l'emplacement de Q_1 en partant de O , nous devons d'abord

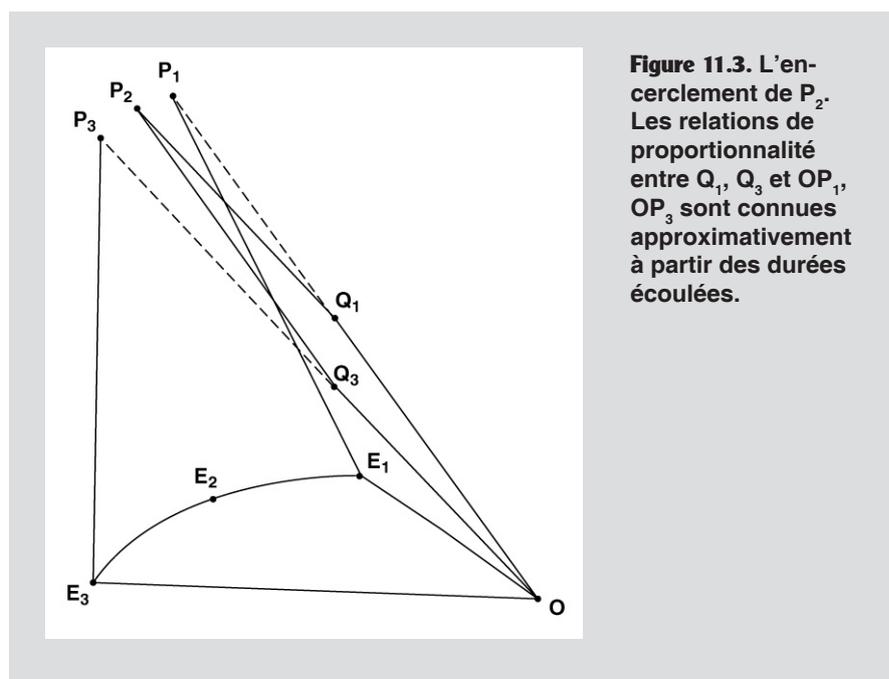


Figure 11.3. L'encerclement de P_2 . Les relations de proportionnalité entre Q_1 , Q_3 et OP_1 , OP_3 sont connues approximativement à partir des durées écoulées.

aller de O à F_1 , déplacement que nous venons de construire, puis effectuer un deuxième déplacement équivalent au déplacement E_1G_1 , mais appliqué à F_1 plutôt qu'à E_1 . Nous ne connaissons pas la grandeur de ce deuxième déplacement mais nous connaissons sa direction, qui est celle de la ligne de visée L_1 donnée par la première observation de Piazzi.

Utilisons la même démarche pour les positions correspondant à la troisième observation de Piazzi, c'est-à-dire le triangle OE_3P_3 (**Figure 11.4b**). En divisant le segment OE_3 selon la

valeur du deuxième coefficient, on détermine la position d'un point F_3 tel que la droite F_3Q_3 est parallèle à la ligne de visée E_3P_3 . Le déplacement OQ_3 est ainsi équivalent à la combinaison de OF_3 et d'un déplacement dans la direction définie par la ligne de visée E_3P_3 , c'est-à-dire L_3 .

Nous sommes maintenant très près de pouvoir déterminer la position de P_2 ! Rappelez-vous que nous avons décomposé le déplacement OP_2 comme étant la combinaison de OQ_1 et OQ_3 . Chacun de ces deux derniers déplacements a été par

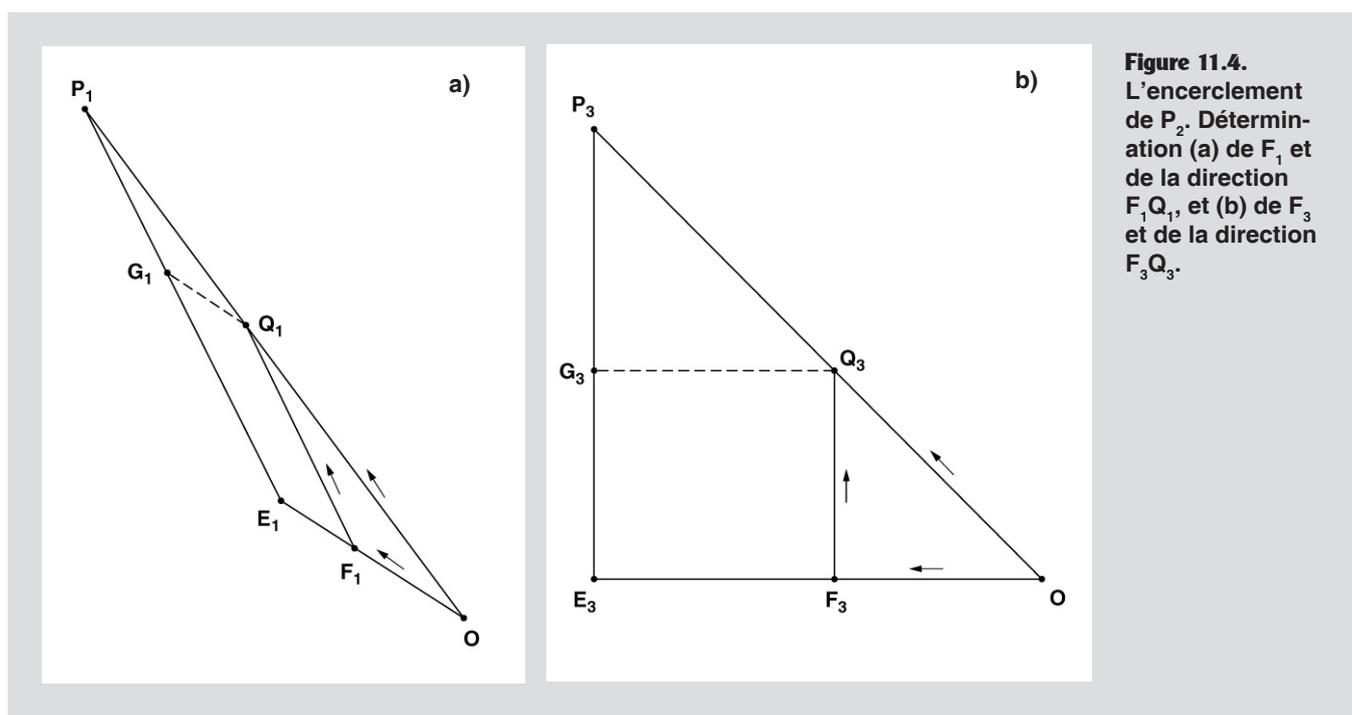


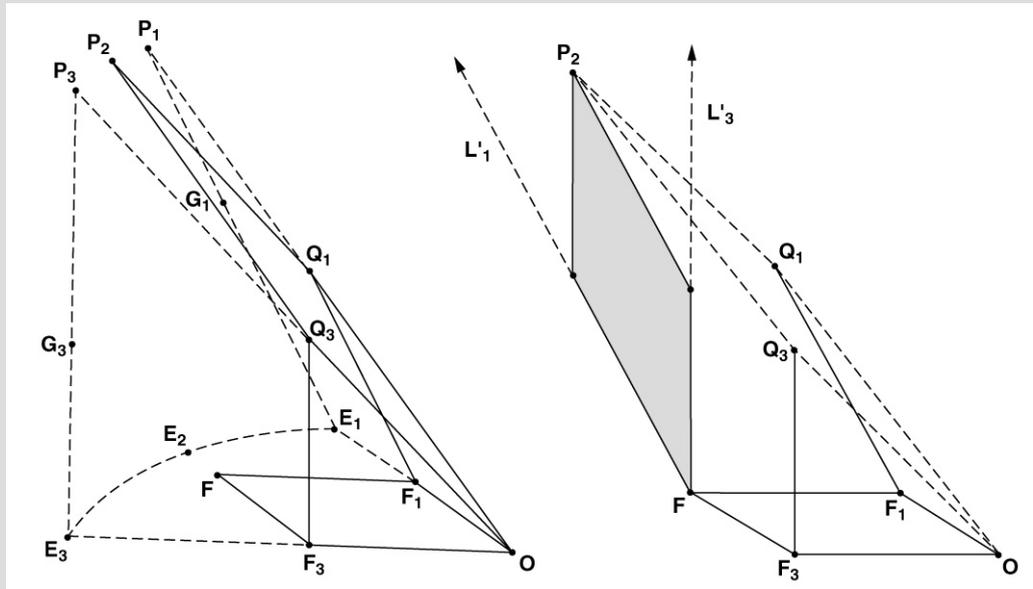
Figure 11.4. L'encerclement de P_2 . Détermination (a) de F_1 et de la direction F_1Q_1 , et (b) de F_3 et de la direction F_3Q_3 .

Encadré 2

La position de P_2 résulte de la combinaison des déplacements OQ_1 et OQ_3 . Par ailleurs, nous avons dans nos constructions :

$OQ_1 = OF_1 + F_1Q_1$ et
 $OQ_3 = OF_3 + F_3Q_3$.

Combinez les déplacements OF_1 et OF_3 pour obtenir la position de F , puis effectuez les deux autres déplacements F_1Q_1 et F_3Q_3 . Ceci conduit à la construction d'un parallélogramme de sommet F et dont les côtés sont parallèles et congruents aux segments F_1Q_1 et F_3Q_3 . Les directions de ces segments sont parallèles aux lignes de visées de Piazzi de E_1 à P_1 et de E_3 à P_3 . Le résultat final doit être P_2 ; cela nous indique que P_2 se trouve sur le plan passant par F et déterminé par ces deux lignes de visée.



ailleurs décomposé en un déplacement connu (respectivement OF_1 et OF_3) et un déplacement le long d'une des directions déterminées par les observations de Piazzi. En d'autres termes, OP_2 est le résultat de quatre

déplacements dont deux sont connus en grandeur et en direction et deux autres en direction seulement (**Encadré 2**).

Comme nous avons supposé dès le début que le résultat d'une série de

déplacements de ce type ne dépend pas de manière sensible de l'ordre suivant lequel ils sont combinés, nous pouvons imaginer que nous pouvons effectuer ces déplacements, dont le résultat mène de O à P_2 , de la manière

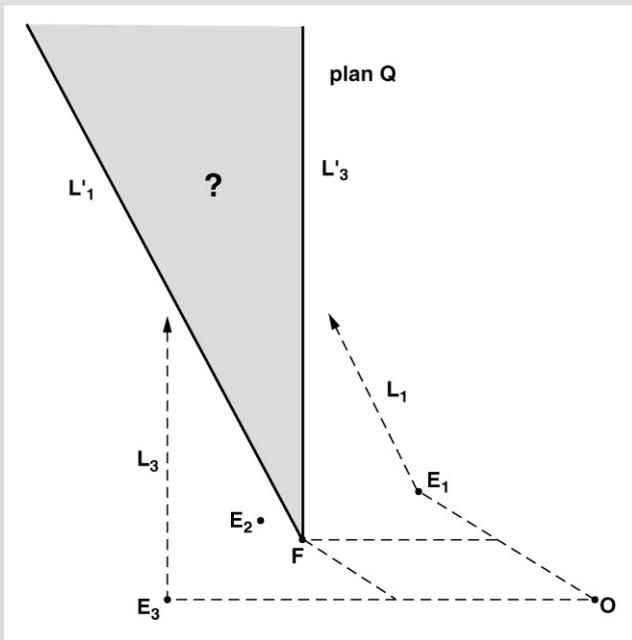


Figure 11.5. P_2 se trouve sur le plan Q passant par le point F , mais où ?

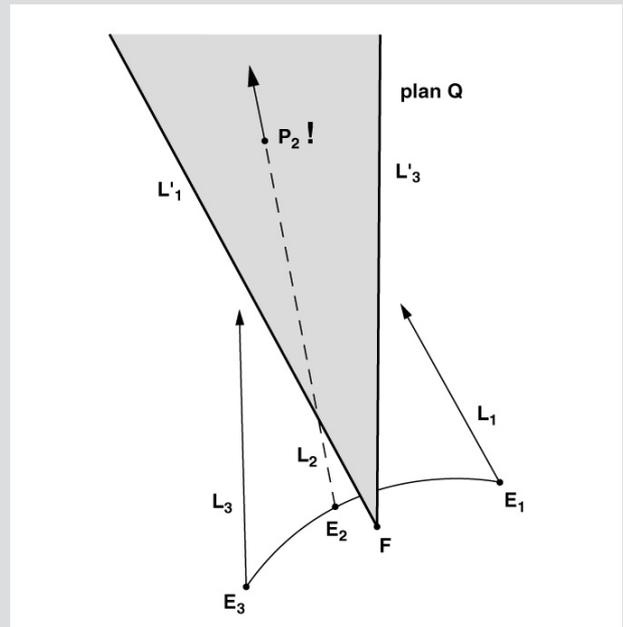


Figure 11.6. Localisation de P_2 . La droite L_2 passant par E_2 croise le plan Q au point P_2 . E_2P_2 est la distance cruciale que nous recherchons.

suivante. Combinez d'abord les déplacements OF_1 et OF_3 : le résultat est un point F se trouvant dans le plan de l'écliptique. Nous pouvons déterminer directement la position de F à partir des positions connues de F_1 et F_3 . Appliquez ensuite les deux déplacements restant pour obtenir P_2 à partir de F.

Qu'apprenons-nous sur la nature de la relation entre P_2 et F ? Nous ne connaissons pas l'amplitude des déplacements conduisant de F à P_2 mais nous connaissons leurs deux directions. Ce sont les directions définies par les lignes de visée initiales de Piazzi. Ah ! Ces deux directions rapportées au point F définissent une *plan spécifique* passant par F. Nous n'avons qu'à tracer deux droites L_1 et L_3 parallèles à ces deux lignes de visée et passant par F ; le plan en question, appelons le Q, est le plan dans lequel

se trouvent L_1 et L_3 (Figure 11.5). Du fait que ce plan contient les directions des deux déplacements en question, le résultat de la combinaison de ces derniers – c'est-à-dire P_2 à partir de F – se trouvera dans tous les cas en un point de ce plan.

Ainsi, P_2 se trouve sur ce plan mais où ? N'oubliez pas la deuxième observation de Piazzi qui a été retenue ! Cette observation définit une droite L_2 passant par E_2 et sur laquelle se trouve P_2 . Où se trouve-t-il ? A l'évidence au point d'intersection de L_2 et du plan que nous venons de construire ! (Figure 11.6) La distance le long de L_2 entre E_2 et ce point d'intersection (c'est-à-dire E_2P_2) est justement la distance que nous recherchions. *Eurêka !*

Ceci – avec une contribution supplémentaire de Gauss *particulièrement cruciale* – définit le cœur de la méthode à partir de laquelle

nous pouvons effectivement calculer la distance de la Terre à Cérès. Il suffit seulement de traduire cette construction géométrique sous une forme permettant des calculs précis.

Cependant, il reste un obstacle de taille sur le chemin que nous avons parcouru vers la solution. Nous le découvrirons, ainsi que le remède ingénieux que lui a appliqué Gauss, à la section 12.

Entre-temps, nous invitons le lecteur à réfléchir sur ce qui suit : la possibilité de trouver P_2 , comme l'intersection de la droite L_2 et d'un certain plan passant par F, présuppose que F ne coïncide pas avec l'origine de la droite, c'est-à-dire E_2 . En fait, la taille de l'espace entre F et E_2 reflète la différence de la courbure entre les orbites de Cérès et de la Terre sur l'intervalle entre la première et la troisième observation.

12. UNE DIFFICULTÉ INATTENDUE NOUS CONDUIT À DE NOUVELLES DÉCOUVERTES

A la section 11, nous avons remporté une bataille majeure dans nos efforts pour déterminer l'orbite de Cérès. Cependant, la guerre n'est pas encore gagnée. Comme nous allons le voir tout de suite, le plus grand défi reste encore à relever.

Nous avons développé une cons-

truction géométrique qui nous donne une approximation de la deuxième position de Cérès. Cette construction comprend les étapes suivantes :

1. Les trois observations choisies définissent les directions de trois lignes de visée joignant les positions de l'observatoire de Piazzi aux positions de Cérès, à chacun des instants d'observation. A partir de ces infor-

mations et de la connaissance du mouvement (orbital et rotationnel) de la Terre, déterminez les positions de l'observateur E_1, E_2, E_3 , et construisez les droites L_1, L_2, L_3 , issues de chacune de ces positions et suivant les directions correspondantes* (Figure 12.1).

2. A partir des instants donnés par les observations de Piazzi, calculez les rapports des temps écoulés entre le premier et le deuxième, le deuxième et le troisième et le premier et le troisième instants, c'est-à-dire :

$$t_2 - t_1 : t_3 - t_1 \text{ et } t_3 - t_2 : t_3 - t_1.$$

3. D'après la loi des aires de Kepler, les valeurs calculées ci-dessus coïncident avec les rapports des aires des secteurs orbitaux, $S_{12} : S_{13}$ et $S_{23} : S_{13}$ balayées par Cérès pendant les intervalles de temps correspondants. Nous avons *supposé*, par ap-

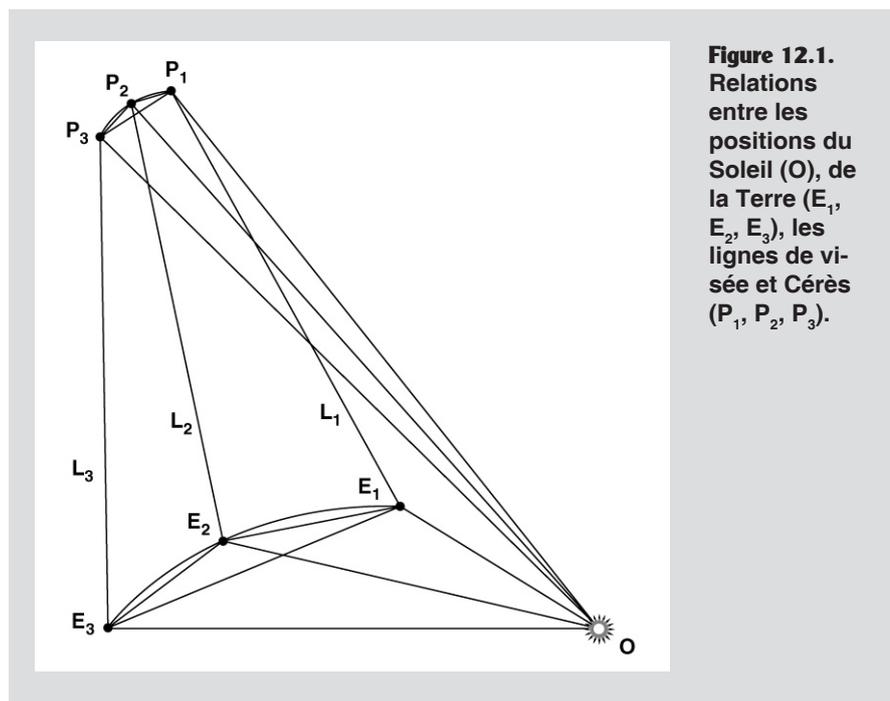


Figure 12.1. Relations entre les positions du Soleil (O), de la Terre (E_1, E_2, E_3), les lignes de visée et Cérès (P_1, P_2, P_3).

* Pour information, Piazzi a donné les positions apparentes suivantes correspondant au 2 janvier, au 22 janvier et au 11 février 1801 :

	ascension droite	déclinaison
2 janvier	51°47'49"	15°41'05"
22 janvier	51°42'21"	17°03'18"
11 février	54°10'23"	18°47'59"

Ces « positions » ne sont rien d'autre que les directions dans lesquelles pointent les lignes L_1, L_2, L_3 .

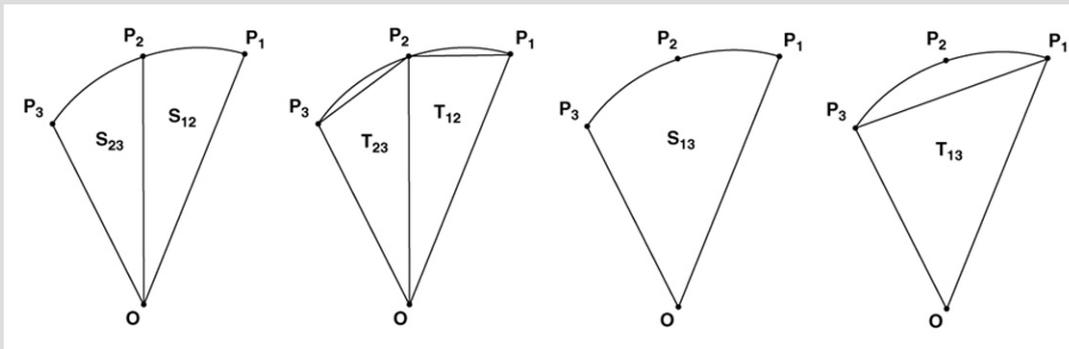


Figure 12.2. Les secteurs orbitaux S_{12} , S_{23} , S_{13} et les aires triangulaires correspondantes T_{12} , T_{23} , T_{13} .

proximation, qu'il serait possible de négliger la différence relativement faible entre les rapports des aires des *secteurs orbitaux*, d'une part, et ceux des *aires triangulaires* correspondantes formées à partir de la position du Soleil et de celles de Cérès, d'autre part (**Figure 12.2**).

4. Partant de là, nous avons supposé que les rapports des durées écoulées, calculés en 2, donnent des *approximations* suffisamment précises pour les valeurs des rapports des aires triangulaires $T_{12} : T_{13}$ et $T_{23} : T_{13}$. Les véritables valeurs de ces rapports, que nous appellerons respectivement « d » et « c », sont les coefficients qui définissent la relation spatiale entre la *deuxième* position de Cérès et les *première* et *troisième*, suivant la « loi du parallélogramme » pour la combinaison et la décomposition de mouvements simples dans l'espace.

5. En utilisant les valeurs approximatives de c et d déduites des temps écoulés de la manière indiquée ci-dessus, construisez un point F dans le plan de l'orbite terrestre de telle manière que *la relation de F aux positions de la Terre E_1 et E_3 soit la même que celle que l'on vient de déduire entre la deuxième et les première et troisième positions de Cérès*.

Pour l'énoncer clairement : divisez les longueurs des segments du Soleil à la Terre (OE_1 et OE_3) selon les rapports définis par les valeurs approximatives des coefficients c et d. En d'autres termes, construisez respectivement les points F_1 et F_3 sur les segments OE_1 et OE_3 , de telle manière que $OF_1 / OE_1 = t_2 - t_2 / t_3 - t_1$ et $OF_3 / OE_3 = t_2 - t_1 / t_3 - t_1$. Construisez ensuite le point F tel qu'il résulte des deux déplacements OF_1 et OF_3 ; F sera ainsi le quatrième sommet d'un parallélogramme construit à partir des points O, F_1 et F_3 (**Figure 12.3**).

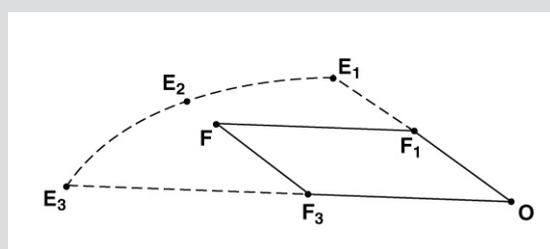


Figure 12.3. Détermination du point F par combinaison des déplacements selon OE_1 et OE_3 .

6. Tracez ensuite les droites L'_1 et L'_3 parallèles à L_1 et L_3 et passant par F. Elles définissent un plan unique Q passant par F.

7. Déterminez le point P qui est l'intersection entre la droite L_2 et le plan Q. En d'autres termes, « projetez » la deuxième position de la Terre E_2 le

long de la ligne de visée définie par la deuxième observation jusqu'à atteindre le plan Q (**Figure 12.4**). Ce point P est notre première approximation de la position de Cérès P_2 !

A partir des méthodes classiques de géométrie analytique et descriptive, telles qu'elles ont été développées par Fermat et perfectionnées par Gaspard Monge, nous pouvons traduire cette construction géométrique en calculs numériques afin de déterminer la distance E_2P à partir des données de Piazzi.

Il faudrait peut-être mieux réfléchir deux fois avant de se lancer dans des calculs laborieux. Telle qu'elle se présente, notre méthode repose sur une approximation grossière pour estimer la valeur des coefficients cruciaux c et d. Rappelez-vous que nous avons décidé d'ignorer la différence entre les secteurs orbitaux et les triangles correspondants. Nous pourrions défendre la validité de cette étape d'approximation à partir des arguments suivants.

D'abord, nous ne nous

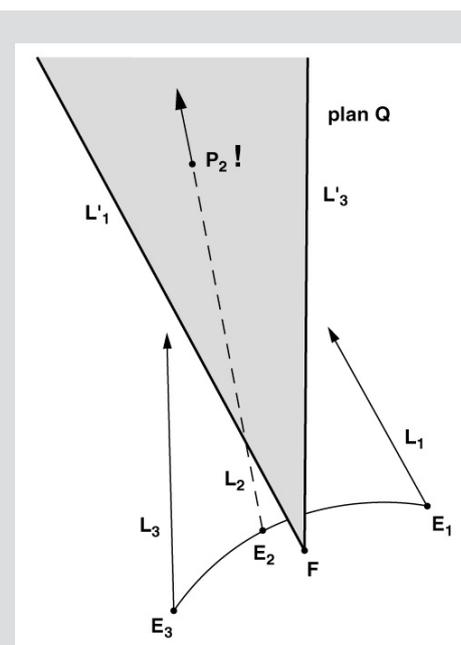


Figure 12.4. L'intersection entre la droite L_2 et le plan Q, détermine le point P_2 .

intéressons ici qu'aux rapports et non aux valeurs absolues des secteurs et des triangles. Par ailleurs, les différences en question – c'est-à-dire les aires en forme de lunules délimitées par les arcs orbitaux et les cordes reliant les positions orbitales correspondantes – ne sont certainement que des fractions infimes des aires *totales* des secteurs orbitaux. De ce fait, elles ne devraient avoir qu'un effet « marginal » sur les valeurs des *rapports* de ces aires.

En fait, des calculs simples réalisés à partir du cas hypothétique d'une orbite circulaire entre Mars et Jupiter*, montre que nous pouvons nous attendre à une erreur de l'ordre de 0,25% dans la détermination des coefficients *c* et *d*, lorsque l'on néglige la différence entre les secteurs et les triangles. Pas trop mal, n'est-ce pas ?

Avant de chanter victoire, jetons un coup d'œil sur les effets possibles de cette marge d'erreur dans les coefficients sur le reste de la construction.

Observons le problème de plus près. Une erreur de *x* pour cent dans les valeurs de *c* et *d*, produira une erreur d'un même pourcentage

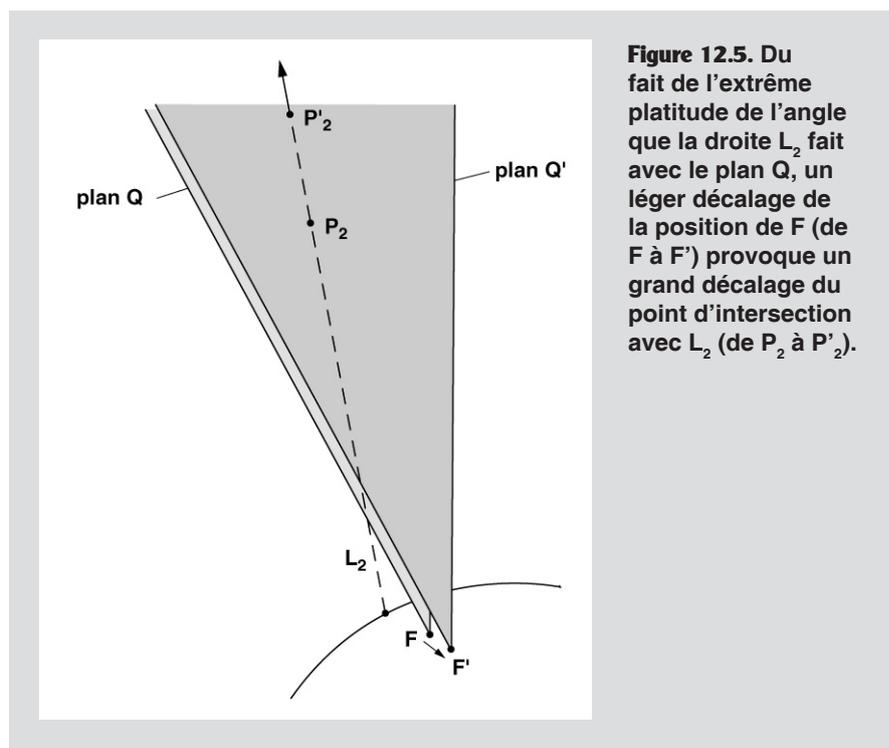


Figure 12.5. Du fait de l'extrême platitude de l'angle que la droite L_2 fait avec le plan Q, un léger décalage de la position de F (de F à F') provoque un grand décalage du point d'intersection avec L_2 (de P_2 à P'_2).

dans les positions de F_1 et F_3 , et au maximum deux fois cette erreur dans le processus de combinaison de OF_1 et OF_3 pour créer F. Une erreur quelconque dans la position de F produit cependant un déplacement

correspondant dans la position du plan Q, dont l'intersection avec L_2 définit notre approximation de la position de Cérès. Cela étant posé, les *directions* des droites L_1 , L_2 et L_3 issues d'observations faites pendant une période relativement courte, ne diffèrent entre elles que de quelques degrés. Du fait que l'orientation du plan Q est déterminée par des lignes parallèles à L_1 et L_3 en F, cela implique que L_2 formera un angle extrêmement « plat » avec le plan. Un décalage minime dans la position du plan va donc provoquer un changement *beaucoup plus important* dans l'emplacement de son intersection avec L_2 . De combien ? Si nous analysons la configuration relative de L_2 , de Q et de l'écliptique correspondant à la situation des observations de Piazzi, nous trouverons qu'une erreur dans la position de F peut entraîner une erreur de *dix à vingt fois* plus grande dans l'emplacement du point d'intersection (**Figure 12.5**). Cela nous conduit à une erreur considérable, de l'ordre de 5 à 10%, dans notre estimation pour la distance de la Terre à Cérès E_2P_2 .

Par ailleurs, il est un fait que les calculs préliminaires que nous avons effectués avec des orbites circulaires sous-estiment *fortement* l'erreur dans les coefficients de *c* et de *d*, qui existerait dans le cas d'une orbite plutôt *non circulaire* (ce qui est le cas pour Cérès). Dans ce cas, cette erreur peut

* Pour avoir une idée de combien grande pourrait être cette erreur supposée marginale, examinons un cas hypothétique. Supposez que la planète inconnue se déplace sur une orbite circulaire, à mi-chemin entre Mars et Jupiter, disons à une distance de 3 Unités astronomiques (UA) du Soleil (trois fois la distance entre la Terre et le Soleil). La période de la planète serait dans ce cas la racine carrée de $3 \times 3 \times 3$, c'est-à-dire environ 5,196152 années. Au cours d'une durée de 20 jours (la durée approximative entre deux observations successives choisies par Gauss), la planète devrait parcourir une certaine fraction de la révolution complète autour du Soleil équivalente à 20 divisé par le nombre de jours d'une période orbitale complète de 5,196152 années, c'est-à-dire $20 / (365,256364 \times 5,196152)$ ou encore 0,010538. Pour trouver l'aire balayée pendant les 20 jours, nous n'avons qu'à faire le produit de 0,010538 par l'aire délimitée par une révolution complète. Cette dernière étant égale à $\pi (-3,141593)$ fois le carré du rayon orbital (3×3), nous obtenons 0,297951 UA².

Calculons ensuite l'aire du triangle entre le Soleil et deux positions de la planète séparées par 20 jours. L'angle balayé depuis le Soleil par ce mouvement est de $0,010538 \times 360^\circ$, c'est-à-dire $3,79398^\circ$. La hauteur et la base de ce triangle isocèle, dont les deux côtés égaux sont de même longueur que le rayon orbital, peuvent être estimées graphiquement ou calculées par les fonctions trigonométriques. Pour ce triangle, on trouve une hauteur de 2,998356 UA et une base (la corde entre les deux positions planétaires) de 0,198600 UA pour une aire de 0,2977737 UA².

Si l'on compare les deux valeurs que l'on vient d'obtenir, on trouve que l'aire du secteur orbital n'excède celle du triangle « que » de 0,000214 UA². Etant donné qu'une unité astronomique vaut 150 millions de kilomètres, cette « petite » aire correspond « seulement » à environ 5 000 milliards de kilomètres carrés ! Par ailleurs, le rapport du secteur au triangle est d'environ 1,000718. Si, dans les rapports qui définissent les coefficients *c* et *d*, on remplace les aires triangulaires T_{12} et T_{23} par les secteurs correspondants S_{12} et S_{23} , on introduit une erreur de l'ordre de 0,07%. Notez cependant que ces estimations ne s'appliquent que dans le cas de durées écoulées égales à 20 jours – telles que celles entre la première et la deuxième et entre la deuxième et la troisième positions. La première et la troisième positions sont, quant à elles, séparées par 40 jours. Si l'on refait les calculs dans ce cas, on trouve une aire de secteur orbital de 0,595902 UA² et une aire de triangle de 0,594170 UA², c'est-à-dire que la différence est d'environ 0,00193 UA² – presque *huit fois* plus que précédemment – et le rapport est de 1,0029 correspondant à une erreur de 0,29%. C'est l'erreur à laquelle il faut s'attendre lorsque l'on remplace S_{13} par T_{13} dans les rapports définissant les rapports *c* et *d*.

A partir de ces calculs préliminaires, nous pouvons conclure que la plus grande source d'erreur dans notre estimation des coefficients *c* et *d* est la différence entre S_{13} et T_{13} .

s'élever à 2% ou plus, ce qui conduit à une erreur finale de 20 à 30% dans notre estimation de la distance de l'objet.

Une marge d'incertitude aussi énorme rendrait toute prévision de la position de Cérès complètement inutile.

Retour à la courbure

La réalité a rejeté notre approche rudimentaire consistant à ignorer les différences entre les secteurs orbitaux et les triangles correspondants. En fait, ces différences sont les caractéristiques les plus cruciales de l'orbite elle-même « dans le petit » ; elles résultent de la courbure de l'orbite telle qu'elle est reflétée dans le fait que la trajectoire de la planète entre deux points, aussi proches soient-ils, « s'écarte » toujours de la ligne droite*.

Pour s'attaquer au problème, pas moins de *trois niveaux* du processus doivent être pris en considération :

(i) La courbure dans l'« infiniment petit » qui intervient dans n'importe quel intervalle arbitrairement petit, et qui « façonne » continuellement l'orbite à chaque instant du processus de génération.

(ii) La courbure de l'orbite dans « le grand », considérée comme totalement réalisée « dans le futur » et qui, ironiquement, est antérieure au mouvement orbital lui-même ; ceci étant bien entendu défini dans le contexte du système solaire dans son ensemble.

(iii) Les intervalles géométriques entre les positions discrètes P_1 , P_2 , etc., de l'orbite, en tant que moments ou événements du processus, et dont les relations réciproques constituent une sorte de *tension* entre l'effet cumulatif ou intégré de courbure « dans le petit », et la courbure « dans le

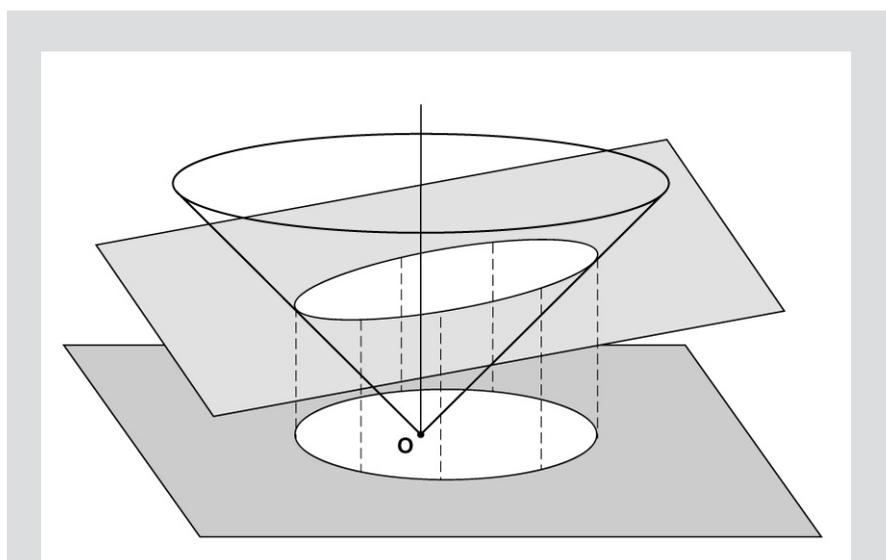


Figure 12.6. Construction d'un cône circulaire ayant pour sommet le point O, la position du Soleil sur un plan horizontal. En coupant le cône avec un second plan nous engendrons une ellipse. En projetant cette ellipse sur le plan horizontal, nous engendrons une seconde ellipse. Nous allons utiliser cette construction pour examiner les relations entre les secteurs orbitaux et les aires triangulaires formées à partir des positions observées de Cérès.

grand » – agissant, en quelque sorte, depuis le futur.

Euler, Newton et Laplace ont rejeté cela en linéarisant à la fois dans le grand et dans le petit. Du point de vue de Newton et de Laplace, l'orbite considérée *comme un tout* – quelle affaire ! – n'a aucune existence *efficiente*. Une orbite n'est que la trace accidentelle d'un processus qui se déroule en aveugle d'étape en étape, sous l'impulsion de « forces » momentanées – à la manière des politiques de gestion de crise telles qu'elles ont été appliquées ces dernières années ! Pour un newtonien, seule la « force » que vous pouvez éprouver « ici et maintenant » a un caractère de réalité. Mais la « force aveugle » de Newton n'est qu'une construction purement linéaire dépourvue de contenu scientifique.

Vous pouvez suivre la voie entropique qui consiste à déduire algébriquement la « loi de la force » à partir des lois de Kepler mais, en dépit des efforts sophistiqués de Laplace *et al.*, il est axiomatiquement impossible de déduire l'ordre képlérien du système solaire dans son ensemble à partir de la physique de Newton.

En fait, les efforts de Burkhardt et d'autres pour déterminer l'orbite de Cérès en utilisant l'outil mathématique élaboré par Laplace dans sa *Mécanique céleste*, ont conduit à un échec total. Selon ce que son ami von Zach avait rapporté à Gauss, le vieux Laplace qui – du haut des sommets de l'Olympe où il semblait siéger – avait suivi les discussions et débats au sujet de Cérès, arrivant à la conclusion qu'il était *impossible* de déterminer l'orbite à partir des données limitées de Piazzi. Laplace avait recommandé l'arrêt des recherches en attendant qu'un astronome ait la chance de retrouver la planète. Lorsque von Zach rapporta les résultats des calculs de Gauss, et l'accord extraordinaire entre l'orbite proposée par Gauss et l'ensemble des observations de Piazzi, il s'attira le mépris de Laplace et de ses amis. Toutefois, la réalité donna rapidement raison à Gauss.

Ce qui est caractéristique de la supériorité axiomatique de la méthode

* Le lecteur scrupuleux qui se sera réellement donné la peine de représenter la position de F en utilisant les rapports des durées donnés ci-dessus, aura découvert que F se trouve sur la ligne droite qui relie E_1 et E_3 . On peut alors noter les choses suivantes :

(i) Dans la mesure où l'on utilise comme coefficients les rapports des temps écoulés, la somme de ces coefficients est invariablement égale à 1.

(ii) Considérons deux points quelconques A et B. Si nous divisons les segments OA et OB selon des coefficients dont la somme est égale à 1 et effectuons les déplacements correspondants le long des deux axes, alors le point résultant de la combinaison de ces déplacements se trouve toujours le long de la ligne droite joignant A et B.

(iii) En conséquence, P_2 ne se trouvant pas sur le segment P_2P_3 du fait de la courbure de l'orbite de Cérès, la somme des véritables valeurs de c et d sera toujours différente de 1 et, en fait, supérieure.

de Gauss, et de celle de Kepler avant lui, c'est que Gauss voit les orbites comme des entités efficaces. Avec cette approche, examinons les relations entre P_1 , P_2 et P_3 qui doivent nécessairement découler du fait que ces positions sont les moments d'une orbite képlérienne unique.

Une métaphore géométrique

A cette fin, construisez la représentation suivante de la variété de toutes les orbites potentielles (vues comme des totalités « réalisées ») ayant un foyer commun au centre du Soleil, et se trouvant dans un plan donné (Figure 12.6). Représentez ce plan comme un plan horizontal passant par un point O représentant le centre du Soleil. Construisez au-dessus de ce plan un cône circulaire dont le sommet est O et dont l'axe est perpendiculaire au plan.

En coupant le cône par un autre plan variable, on génère tout le réseau des sections coniques. La projection de chacune de ces sections coniques sur le plan horizontal donne également une section conique ; et les sections coniques résultantes sur le plan horizontal ont également le point O comme foyer commun* (voir appendice « L'ellipse en tant que projection conique »).

Cette construction peut être « lue » comme une métaphore géométrique, juxtaposant deux « espaces » différents et axiomatiquement incompatibles. Dans cette métaphore, le cône représente l'espace invisible du processus de création (que Lyndon LaRouche appelle parfois la variété continue), et le plan horizontal représente l'espace des phénomènes visibles. La section conique projetée est l'image visible, « projetée » d'une singularité de l'espace supérieur.

A partir de cette construction, examinons la relation entre P_1 , P_2 , P_3 et l'orbite unique sur laquelle se trouvent ces trois points. Nous pouvons déterminer cette orbite par une

* J'ai présenté l'idée de base de cette construction pour la première fois en avril 1983 dans un article non publié intitulé « Development of Conical Functions as a Language for Relativistic Physics ».

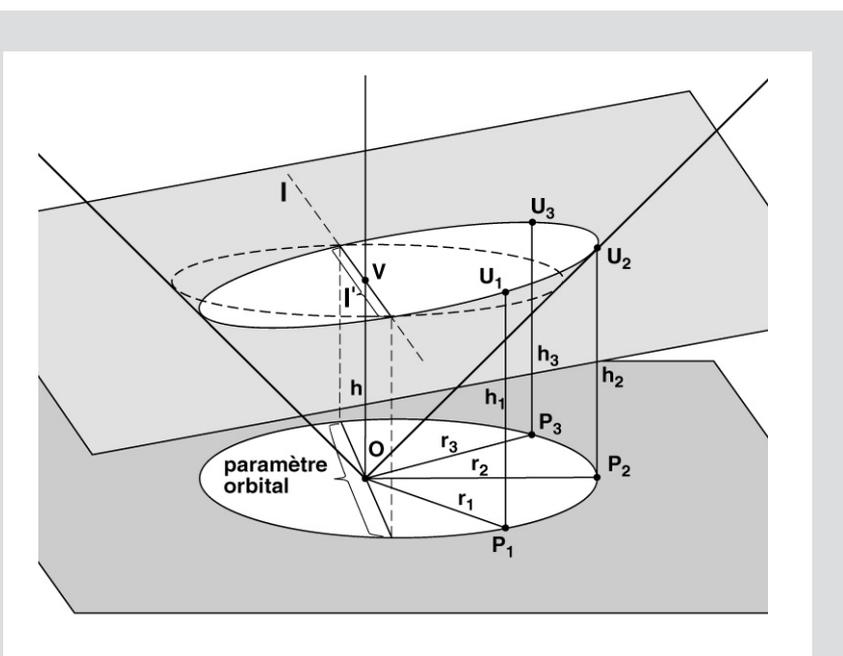


Figure 12.7. Nous utilisons notre construction pour mettre en relation les positions P_1 , P_2 , P_3 , les distances radiales r_1 , r_2 , r_3 , les hauteurs h_1 , h_2 , h_3 , et le paramètre orbital.

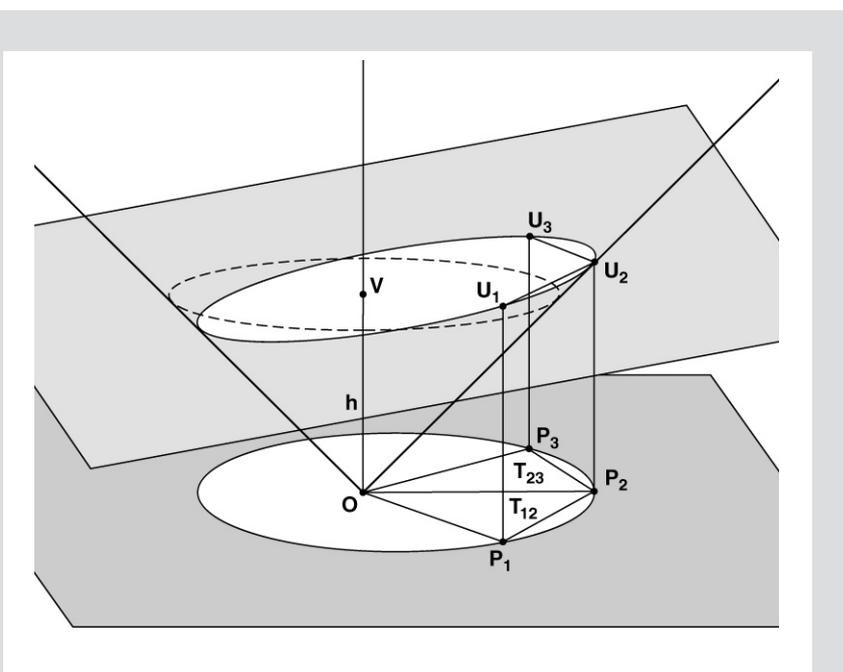


Figure 12.8. Quelle est la relation entre les aires triangulaires T_{12} , T_{23} , T_{13} et la hauteur h de V ?

« projection inverse » comme il suit (Figure 12.7).

A chaque point P_1 , P_2 , P_3 , tracez une perpendiculaire au plan horizontal. Ces trois perpendiculaires croisent le cône en des points U_1 , U_2 , U_3 . Ces derniers déterminent à leur tour un plan unique coupant le cône et générant ainsi une section conique

passant par ces points. La projection de cette section conique sur le plan horizontal « visible » est ainsi l'unique orbite sur laquelle se trouvent P_1 , P_2 et P_3 . Notez que les hauteurs h_1 , h_2 , h_3 des points U_1 , U_2 , U_3 au-dessus du plan horizontal sont proportionnelles aux distances radiales entre P_1 , P_2 , P_3 et O .

Remarquez une autre singularité qui apparaît au cours du processus : le plan déterminé par U_1 , U_2 et U_3 passe par l'axe du cône en un point V. La hauteur de ce point sur l'axe au-dessus de O est en fait directement liée au « paramètre » de l'orbite qui joue un rôle clef dans la formulation des lois de Kepler par Gauss. Ce dernier a montré que l'aire balayée par une planète au cours de son mouvement sur une orbite donnée pendant un intervalle de temps donné, est proportionnelle (par une constante universelle du système solaire) à la durée de l'intervalle de temps multipliée par la racine carrée du « paramètre orbital ». L'intégration de cela dans la représentation conique que nous venons de présenter nous ouvre une nouvelle piste vers la solution de notre problème.

En fait, si nous coupons le cône horizontalement à la hauteur de V, alors l'intersection de ce plan horizontal avec le plan de U_1 , U_2 , U_3 sera une ligne droite l perpendiculaire au grand axe de la section conique. Cette droite coupe la section conique en deux points symétriquement opposés par rapport à V et à la même hauteur. Le segment l' de l (délimité par ces deux points) définit la largeur de la section conique en V. Ce segment est également un diamètre de la section circulaire du cône en V, qui est ainsi proportionnel à la hauteur h de V sur l'axe. Projetez-le maintenant sur le plan horizontal de P_1 , P_2 , P_3 . L'image de l', équivalente à l' en longueur, est le diamètre perpendiculaire de l'orbite au foyer O, exactement la longueur que Gauss avait appelée « paramètre orbital ».

Tout ce qui précède est illustré très simplement à la **figure 12.7**. Le résultat immédiat de cela est que le paramètre orbital de Gauss qui gouverne la relation entre le temps écoulé et l'aire balayée par le mouvement de la planète sur son orbite, est proportionnel à la hauteur h du point V sur l'axe du cône.

Par ailleurs, notre méthode de « projection inverse » nous permet de déterminer V *directement* à partir des trois positions P_1 , P_2 , P_3 , en construisant le plan passant par les points correspondants U_1 , U_2 , U_3 . La « retombée inattendue » de ces considérations est que nous disposons d'une manière simple pour déterminer le paramètre orbital de Gauss pour n'importe quelle orbite, à partir de rien de plus que les positions de

trois points quelconques de cette orbite. Nous pouvons cependant en dire plus encore.

Nous avons trouvé précédemment une manière d'exprimer la relation spatiale entre P_1 , P_2 , P_3 (par rapport à O), en fonction des rapports des aires triangulaires T_{12} , T_{23} , T_{13} . Tout cela nous indique l'existence d'une *relation fonctionnelle simple* entre ces aires triangulaires et la valeur du paramètre orbital (ou encore la hauteur de V). Ce dernier est à son tour en relation fonctionnelle aux valeurs des durées correspondantes et des secteurs orbitaux du fait des contraintes de Gauss (**Figure 12.8**).

Notre construction conique nous

a donné un chaînon manquant pour la nécessaire cohérence entre les secteurs orbitaux et les triangles correspondants. Cela va nous permettre d'aller au-delà de l'approximation grossière présentée dans la section précédente, et de déterminer la distance de Cérès avec une précision que Laplace et ses amis considéraient impossible.

Nous allons le voir en détail dans la section suivante. Il est cependant clair que nous avons progressé d'une dimension critique supplémentaire vers la victoire. La clef de notre réussite a été une sortie dans la « variété continue » sous-jacente aux orbites planétaires.

13. SAISIR LA GÉOMÉTRIE INVISIBLE DE LA CRÉATION

Dans la section précédente, nous avons laissé de côté l'aspect visible de l'orbite de Cérès pour nous intéresser à sa *génération* dans un domaine supérieur. À l'aide d'une métaphore géométrique simple, nous avons représenté ce domaine supérieur par un cône circulaire d'axe vertical, et le domaine « visible » inférieur par un plan horizontal. Nous avons fait en sorte que le plan passe par le sommet du cône, point où nous avons localisé le centre du Soleil, et avons établi une correspondance entre des relations d'événements du domaine visible et des événements de l'espace supérieur « conique », au moyen d'une projection du cône vers le plan suivant la direction de l'axe.

En fait, si nous traçons l'orbite de Cérès sur le plan horizontal, cette courbe est l'image projetée d'une section conique sur le cône.

Comment est-il possible d'utiliser la géométrie de l'espace visuel pour « cartographier » des relations dans un « espace supérieur » d'un caractère axiomatique différent ? Seulement sous la forme d'un paradoxe. Bien entendu, aucune représentation « littérale » n'est possible, pas plus que nous n'avons à l'esprit une simple analogie. Lorsque nous représentons l'espace visuel par un plan *en deux dimensions* (dans l'espace visuel !), et l'espace supérieur comme un cône en « trois dimensions » projeté sur le plan, nous ne

cherchons pas à suggérer que l'espace est « supérieur » en vertu du fait qu'il possède « davantage de dimensions ». Nous cherchons plutôt à « montrer » dans l'axe du cône de notre construction, le signe d'un *type* différent d'ordonnancement que dans l'espace visuel – l'une des caractéristiques fondamentales de l'ordonnement transfini et « anti-entropique » de l'Univers dans son ensemble.

Si l'on réfléchit sur l'ironie de cette application de constructions dans la géométrie élémentaire à une telle cartographie métaphorique, l'idée suivante se présente d'elle-même : la géométrie de l'espace visible s'est avérée *appropriée* pour un processus de découverte de la réalité extérieure à l'espace visible, lorsqu'elle n'est pas considérée comme quelque chose de fixe et de statique, mais comme quelque chose de constamment *re-défini et développé* par notre activité cognitive, de la même manière que l'on développe le système musical bien tempéré par la composition classique. Ne devrions-nous pas considérer la géométrie élémentaire du point de vue selon lequel l'espace visuel est créé et « formé » *dans le but* de donner à la raison un chemin pour saisir la « géométrie invisible » de la création elle-même ?

En gardant à l'esprit ces ironies, revenons au défi devant lequel nous a placé la discussion de la section précédente. Nous avons développé

une méthode pour construire une approximation de la position de Cérès qui ne prenait pas en compte de manière adéquate la courbure de l'espace-temps dans le petit. Cette approximation nous a fait introduire une source d'erreur qui peut conduire à des différences majeures entre notre estimation de la distance entre la Terre et Cérès et la véritable distance. Si Gauss n'avait pas corrigé cette faute, sa tentative de prévision de l'orbite de Cérès se serait avérée un échec.

Nous n'avons pas d'autre choix que d'enquêter sur la courbure dans le petit qui caractérise la relation spatiale entre trois positions quelconques P_1, P_2, P_3 d'une planète, en vertu du seul fait qu'elles sont des « moments » de la même et unique orbite képlérienne. Et de faire cela sans supposition concernant la forme particulière de la section conique orbitale.

Nous avons projeté les trois positions sur le cône, déterminant ainsi trois points U_1, U_2 et U_3 . Ces derniers déterminent un plan *unique* qui coupe le cône selon une section conique dont la projection sur le plan horizontal est la forme visible de l'orbite de Cérès. L'intersection du plan $U_1U_2U_3$ avec l'axe du cône donne un point V qui constitue une singularité très importante. La section circulaire du cône à la « hauteur » de V est coupée par le plan $U_1U_2U_3$ en deux points, qui sont les extrémités d'un diamètre l' passant par V . Ce diamètre se projette sans changement de longueur sur le segment qui représente la largeur de l'orbite de Cérès, mesurée perpendiculairement à l'axe de l'orbite en son foyer O . Cette longueur est ce que Gauss appelle le « paramètre orbital » (Figure 13.1).

Ainsi, le paramètre de Gauss est égal à la section du cône en V qui est elle-même proportionnelle à la hauteur de V sur l'axe du cône. Le facteur de proportionnalité dépend de l'angle au sommet du cône ; ce facteur prend la valeur 1 si nous choisissons un angle au sommet égal à 90° (de telle sorte que la surface du cône fasse un angle de 45° avec le plan horizontal en O). Choisissons cette valeur pour cet angle. Nous pouvons alors dire que la hauteur h de V sur l'axe est égale à la moitié du paramètre orbital (Figure 13.2).

Rappelez-vous maintenant que d'après la reformulation des contraintes de Kepler par Gauss, l'aire

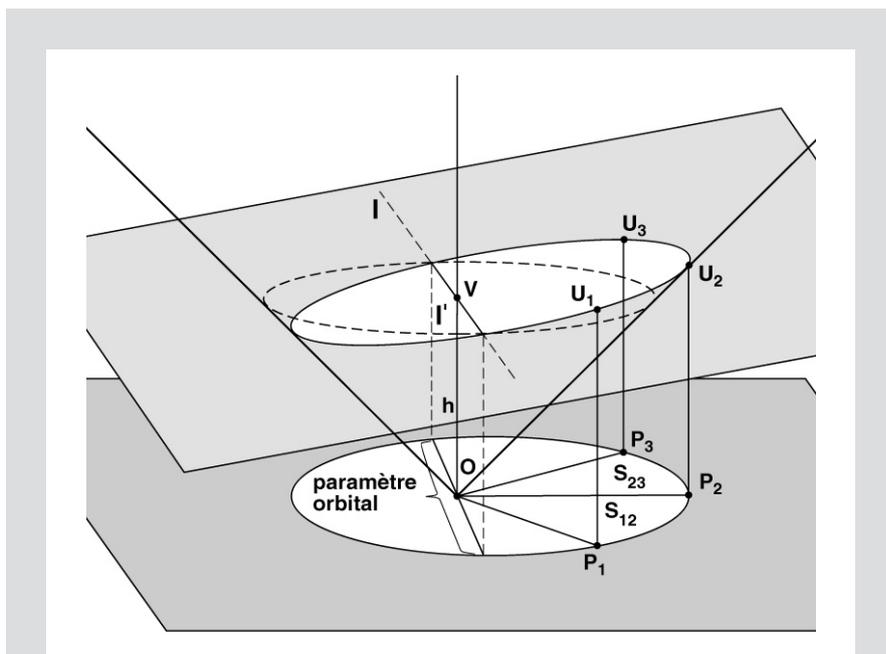


Figure 13.1. Le paramètre orbital est la projection du diamètre l' de la section circulaire du cône à la hauteur h de V . Le diamètre l' est obtenu par l'intersection des sections circulaire et elliptique.

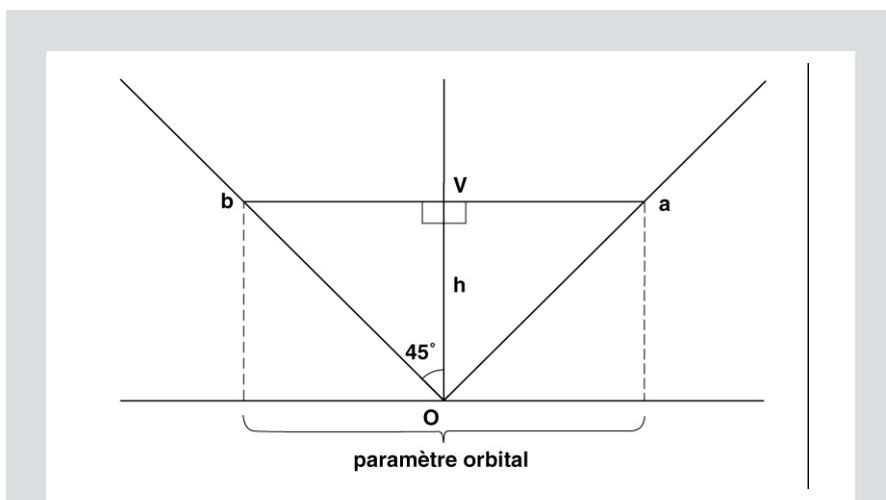


Figure 13.2. La relation entre la hauteur h et le paramètre orbital. L'illustration représente une vue en coupe du cône selon le plan défini par l'axe vertical et le segment l' (représenté ici entre les points a et b). Du fait que l'angle au sommet du cône est de 90° , les triangles aVO et bVO sont des triangles isocèles. Par conséquent, $h = aV = bV = 1/2(ab) =$ demi-paramètre de l'orbite.

balayée par la planète pendant un intervalle de temps quelconque, est proportionnelle à la durée écoulée multipliée par la racine carrée du demi-paramètre (voir section 8). Notre analyse a montré que la constante de proportionnalité est égale à p lorsque la durée est mesurée en années, la distance en unités astronomiques et l'aire en unités astronomiques au

carré.

A partir de ces considérations, nous pouvons maintenant exprimer les aires des secteurs orbitaux de Cérès en terme de durées écoulées et de hauteur h du point V sur le cône. Nous avons, par exemple :

$$S_{12} = \sqrt{h} \times \pi \times (t_2 - t_1), \text{ et}$$

$$S_{23} = \sqrt{h} \times \pi \times (t_3 - t_2).$$

A la fin de la section précédente,

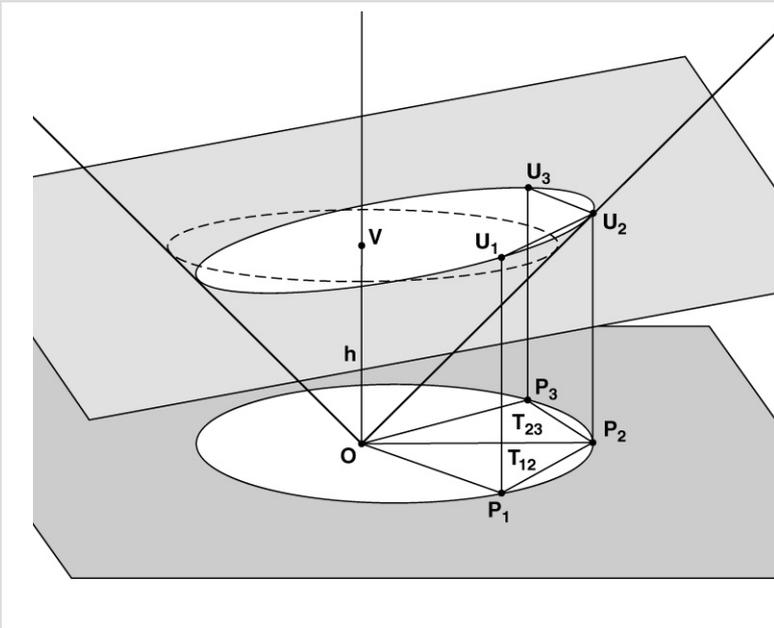


Figure 13.3. Notre projection conique qui contient à la fois les aires triangulaires et les secteurs elliptiques ainsi que le paramètre orbital h , va nous permettre de trouver une approximation « adaptée » des coefficients cruciaux pour déterminer l'orbite de Cérès.

nous avons remarqué que la valeur de h doit être, d'une manière ou d'une autre, exprimable en fonction des aires triangulaires T_{12} , T_{23} et T_{13} ; que le lien résultant entre S_{12} et S_{23} via h devrait finalement nous donner une approximation beaucoup plus « fine » des rapports $T_{12} : T_{13}$ et $T_{23} : T_{13}$ que ne l'avait permis notre approche rudimentaire initiale (**Figure 13.3**).

Avant de nous lancer dans une bataille cruciale, retenons ce qui suit pour ne pas perdre de vue l'ensemble des conceptions qui précèdent. Le paramètre orbital, représenté maintenant par h , trouve sa signification par sa présence dans les relations entre :

- (i) l'orbite képlérienne considérée comme un tout ;
- (ii) le réseau d'« intervalles géométriques » entre trois positions quelconques P_1 , P_2 et P_3 de l'orbite ;
- (iii) la courbure de chaque « moment d'action » arbitrairement petit dans le mouvement de la planète, tel qu'il est exprimé dans le secteur orbital correspondant, et surtout dans la relation entre le secteur « courbe » et l'aire triangulaire correspondante.

Gauss a concentré son attention sur le secteur et le triangle délimités par la première et la troisième positions (S_{13} et T_{13}). Nos calculs expérimentaux de la section précédente

montrent que la différence entre les deux était la principale source d'erreur dans notre méthode de calcul de la distance entre la Terre et Cérès. Gauss a donc cherché une manière d'estimer correctement cette aire.

Gauss a remarqué que la plus grande part de la différence de surface entre S_{13} et T_{13} , c'est-à-dire la lunule délimitée par l'arc de P_1 à P_3 et le segment P_1P_3 , est constituée par le triangle $P_1P_2P_3$. Appelons ce triangle – le triangle formé par les trois positions de la planète – « T_{123} ». Gauss a remarqué également que T_{123} est égal à la somme de T_{12} et T_{23} moins T_{13} (**Figures 12.2 et 13.4**).

Comment notre exploration de la géométrie conique nous permettra-t-elle de saisir quelque chose sur ce petit « différentiel » T_{123} ? Nous avons annoncé plus haut que la « hauteur h doit être, d'une manière ou d'une autre, exprimable en fonction des aires triangulaires T_{12} , T_{23} et T_{13} ». Il est temps maintenant de tenir cette promesse.

Une proposition élémentaire de la géométrie descriptive

Ceux qui ont été éduqués dans la culture géométrique de Fermat, Desargues, Monge, Carnot et Poncelet ne rencontreront aucune difficulté dans ce qui suit. Mais la plupart d'entre nous (y compris, accessoirement, l'auteur de ces lignes), lorsqu'ils finissent leurs études, sont des analphabètes en matière de géométrie.

Ce problème peut cependant être surmonté avec un peu de courage.

Rappelez-vous comment nous avons utilisé les aires triangulaires T_{12} , T_{23} et T_{13} pour mesurer les relations entre la position de Cérès P_2 et P_1 , P_3 , comme combinaison de déplacements le long des axes OP_1 et OP_3 . Nous touchons, à l'évidence, un problème de géométrie relatif à un domaine plus général.

La nature de la relation que nous cherchons ici devient plus claire, si nous laissons provisoirement les observations de Piazzi de côté et si, à la place, nous examinons le cas hypothétique où P_1 , P_2 et P_3 seraient beaucoup plus espacés – disons, par exemple, qu'ils forment des angles à peu près égaux (c'est-à-dire de

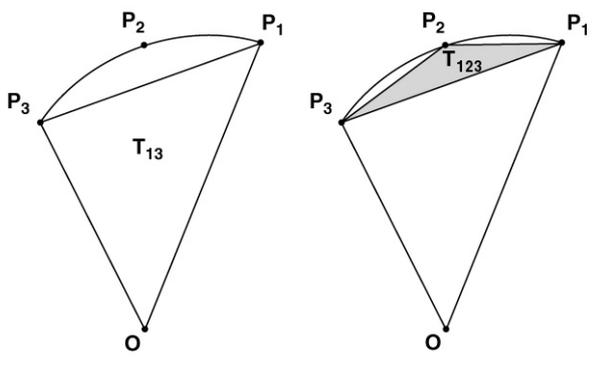


Figure 13.4. La plus grande part de la différence de surface entre S_{13} et T_{13} , qui est une aire en forme de lunule, est constituée par le triangle T_{123} .

120°) en O (Figure 13.5). Nous avons alors dans ce cas un triangle $P_1P_2P_3$ dans le plan horizontal qui contient le point O et qui est divisé suivant les lignes radiales OP_1, OP_2, OP_3 en trois triangles plus petits T_{12}, T_{23} et T_{13} . Au-dessus du triangle $P_1P_2P_3$, se trouve le triangle $U_1U_2U_3$ qui se projette exactement sur celui-là. Le deuxième triangle repose en quelque sorte sur des « pilotis » au-dessus du premier. Ces pilotis sont les segments verticaux P_1U_1, P_2U_2 et P_3U_3 dont les longueurs sont h_1, h_2 et h_3 . Le point V se trouve à l'endroit où l'axe du cône traverse le triangle $U_1U_2U_3$. Comment la hauteur de V dépend-elle des hauteurs h_1, h_2 et h_3 ? C'est un problème plus simple pour celui qui a un peu de culture en géométrie synthétique que pour celui qui est passé par les manuels cartésiens de « géométrie analytique » utilisés habituellement dans les écoles et les universités. L'approche préconisée ici est aux antipodes de celle des « coordonnées cartésiennes ». Ne voyez pas le réseau de positions et l'organisation de l'espace en général comme une entité statique et morte. Pensez au contraire en termes physiques ; pensez en termes de changement, de déplacement, de travail. Par exemple : qu'arriverait-il à la hauteur de V, si nous changions la hauteur de l'un des points U_1, U_2 ou U_3 ?

Supposez, par exemple, que nous laissions U_2 et U_3 fixes et que nous élevions la hauteur de U_1 d'une certaine quantité arbitraire d le long de la ver-

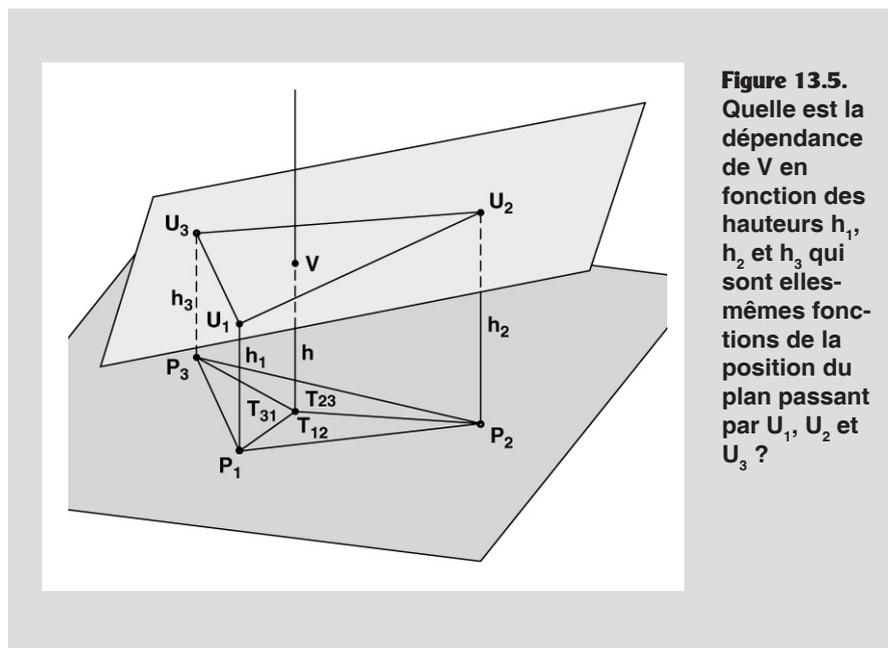


Figure 13.5. Quelle est la dépendance de V en fonction des hauteurs h_1, h_2 et h_3 qui sont elles-mêmes fonctions de la position du plan passant par U_1, U_2 et U_3 ?

ticale jusqu'à une nouvelle position U'_1 (Figure 13.6). Le nouveau triangle $U'_1U_2U_3$ rencontre l'axe du cône en un point V' plus élevé que V. Notre travail immédiat va être de caractériser la relation fonctionnelle entre les segments parallèles VV' et $U_1U'_1$.

Les deux triangles $U_1U_2U_3$ et $U'_1U_2U_3$ ont un côté commun, U_2U_3 , et constituent une figure en forme de cale. Coupez cette figure par un plan vertical passant par les segments VV' et $U_1U'_1$. L'intersection contient le segment $U_1U'_1$ et les droites passant par U_1 et V , d'une part, et U'_1 et V' , d'autre part, pour se croiser en un point M se trouvant lui-même sur

le segment U_2U_3 . Deux triangles sont formés dans ce plan vertical à partir de ces sommets : $U_1MU'_1$ et le sous-triangle VMV' . Etant donné que VV' est parallèle à $U_1U'_1$, ces deux triangles sont similaires.

Le rapport de similarité de ces triangles détermine une relation d'un intérêt immédiat pour nous puisqu'il s'agit de celle entre le changement de hauteur de V (la longueur VV') et le changement de hauteur de U_1 (la longueur $U_1U'_1$).

Pour déterminer le rapport de similarité entre les triangles, il nous suffit d'établir la proportionnalité entre une paire quelconque de côtés correspondants. Considérez le rapport $MV : MU_1$, c'est-à-dire le rapport par lequel V divise le segment MU_1 . Ce rapport reste inchangé lorsqu'on projette le segment sur le plan $P_1P_2P_3$. Suivant cette projection, U_1 se projette en P_1 , V en O et M en un point N sur la droite P_2P_3 .

Notre problème se ramène à déterminer le rapport par lequel O divise le segment NP_1 – ce dernier étant l'image projetée du segment MU_1 . C'est très simple ! Voyez P_2P_3 comme la base du triangle $P_1P_2P_3$ (Figure 13.7). Tracez une droite parallèle à P_2P_3 passant par P_1 . La distance séparant cette droite de P_2P_3 est appelée hauteur du triangle $P_1P_2P_3$, dont le produit par la base P_2P_3 est égal à deux fois l'aire du triangle T_{123} . Tracez ensuite la parallèle à P_2P_3 passant par le point O. L'espace entre cette droite et P_2P_3 est la hauteur du triangle OP_2P_3 , dont le produit par la base P_2P_3 est égal à deux fois l'aire du triangle T_{23} .

Ainsi, le rapport des distances entre la première et la deuxième de ces droites et entre la première et la troisième – c'est-à-dire des distances entre P_2P_3 et chacune de ses deux parallèles – est équivalent au rapport entre T_{23} et T_{123} . Cependant, le rapport des distances entre ces parallèles se retrouve dans la proportion entre les segments formés par n'importe quelle droite coupant les trois

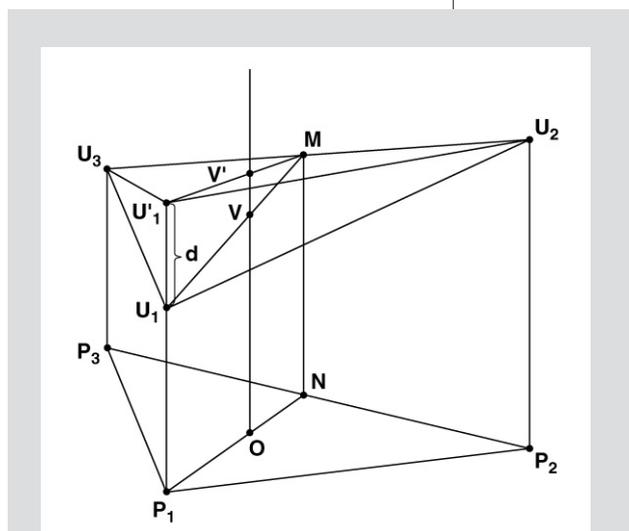


Figure 13.6. Déplacez le plan des points U de U_1 vers U'_1 de manière à générer V' . Quelle est la relation fonctionnelle entre les segments UU' et VV' ?

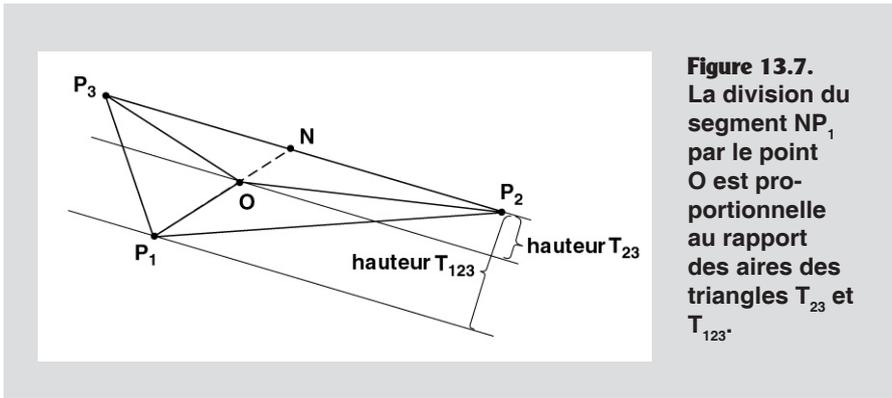


Figure 13.7.
La division du segment NP_1 par le point O est proportionnelle au rapport des aires des triangles T_{23} et T_{123} .

autres. Si l'on prend, par exemple, la ligne passant par O et P_1 (qui croise P_2P_3 en N), on trouve :

$$NO:NP_1 :: T_{23}:T_{123}$$

Par « projection inverse », la même chose reste vraie pour le rapport de MV et MU_1 , ainsi que, par similarité, pour le rapport entre VV' et $U_1U'_1$.

Notre travail est essentiellement terminé. Nous avons trouvé que lorsque la hauteur de U_1 varie d'une certaine quantité « d », la hauteur de V varie d'une quantité dont le rapport à d est celui de T_{23} à T_{123} . En d'autres termes, la variation de la hauteur de V sera de $d \times (T_{23} / T_{123})$, ou encore : $T_{123} \times \text{variation de la hauteur de } V = T_{23} \times \text{variation de la hauteur de } U_1$.

Que se passe-t-il alors si nous repartons d'une situation où toutes les hauteurs sont égales à zéro et si nous élevons les trois sommets en même temps des hauteurs respectives h_1, h_2 et h_3 ? Elever U_1 de h_1 provoque une élévation de V de l'altitude zéro jusqu'à $h_1 \times (T_{23} / T_{123})$. Si l'on applique ensuite le même raisonnement à U_2 plutôt qu'à U_1 , on trouve qu'élever U_2 de la hauteur h_2 va produire une élévation supplémentaire de V d'une quantité $h_2 \times (T_{13} / T_{123})$.

Si l'on élève finalement U_3 de la hauteur h_3 , on élève V d'une quantité supplémentaire $h_3 \times (T_{12} / T_{123})$. La hauteur finale h de V sera donc égale à $[h_1 \times (T_{23} / T_{123})] + [h_2 \times (T_{13} / T_{123})] + [h_3 \times (T_{12} / T_{123})]$ ou, en d'autres termes, $h \times T_{123} = h_1 \times T_{23} + h_2 \times T_{13} + h_3 \times T_{12}$.

ou, en d'autres termes, $h \times T_{123} = h_1 \times T_{23} + h_2 \times T_{13} + h_3 \times T_{12}$.

Tout cela s'applique pour le cas où les points P_1, P_2 et P_3 sont séparés par des angles suffisamment grands pour que O soit à l'intérieur du triangle $P_1P_2P_3$ ($= T_{123}$). Dans le cas réel qui nous concerne ici, le triangle T_{123} est très petit et O se trouve à l'extérieur de celui-ci (Figure 13.8a). Néanmoins, il n'est pas très difficile de constater – et le lecteur devrait le vérifier à titre d'exercice – que rien n'est essentiellement changé dans l'élaboration des relations, en dehors d'un point élémentaire d'analysis situs. Nous avons pris soin de vérifier qu'il y avait un ordre consistant dans les sommets et les triangles, correspondant à une rotation autour du point O dans la direction du mouvement de la planète. Dans ce contexte, « T_{13} » désignait un triangle dont l'angle en O est l'angle balayé selon une rotation continue de P_3 vers P_1 (Figure 13.8b). Dans le cas qui nous occupe ici, O se trouvant à l'extérieur du triangle $P_1P_2P_3$ et les déplacements de P_1 à P_2 et de P_2 à P_3 étant très petits, l'angle de cette rotation est presque égal à 360° (Figure 13.8c). Formulé plus simplement, on peut dire que le triangle résultant

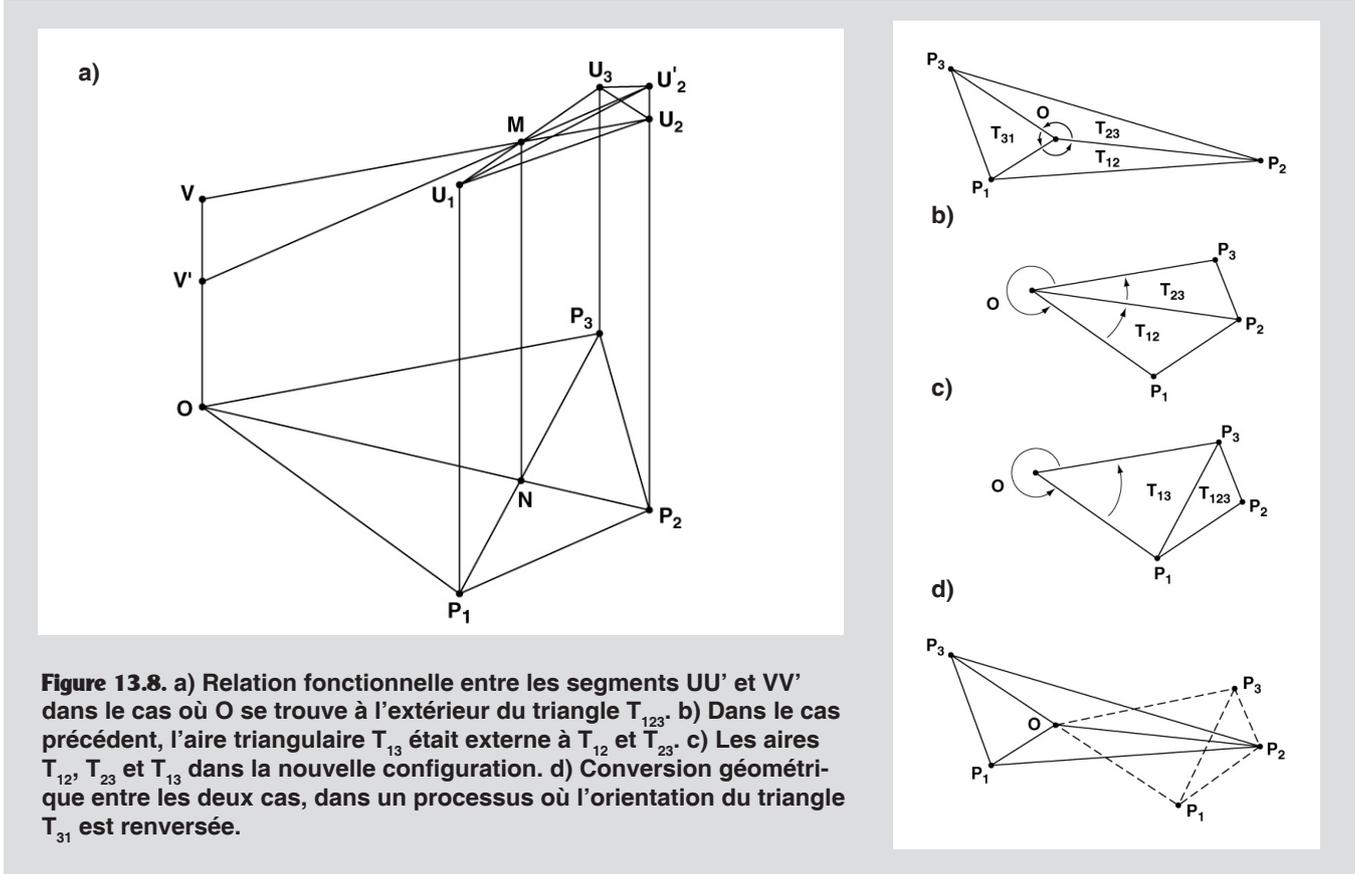


Figure 13.8. a) Relation fonctionnelle entre les segments UU' et VV' dans le cas où O se trouve à l'extérieur du triangle T_{123} . b) Dans le cas précédent, l'aire triangulaire T_{13} était externe à T_{12} et T_{23} . c) Les aires T_{12}, T_{23} et T_{13} dans la nouvelle configuration. d) Conversion géométrique entre les deux cas, dans un processus où l'orientation du triangle T_{31} est renversée.

de la rotation OP_1P_3 est le même que OP_3P_1 et les aires T_{13} et T_{31} désignent la même figure – cependant, leurs orientations sont différentes.

Comme Gauss le fait remarquer dans ses discussions sur l'*analysis situs* de la géométrie élémentaire, notre estimation des aires doit prendre en compte les différences d'orientation, donc la valeur à assigner à T_{13} doit être la même qu'à T_{31} en valeur absolue mais *opposée en signe*. En d'autres termes, $T_{13} = -T_{31}$. Si l'on examine les

constructions définissant la dépendance fonctionnelle entre h et h_1, h_2, h_3 , dans le cas où l'angle de P_3 à P_1 est supérieur à 180° , nous constatons que ce *changement de signe* est nécessaire pour donner la valeur correcte de la contribution de la hauteur de U_2 à la hauteur de V , c'est-à-dire $h_2 \times -(T_{13} / T_{123})$. En fait, si nous élevons U_2 , la hauteur de V est réduite. En conséquence, la relation des aires et des hauteurs dans le cas de nos trois positions de Cérès prend la forme

suivante : $h \times T_{123} = (h_1 \times T_{23}) - (h_2 \times T_{13}) + (h_3 \times T_{12})$;
ou encore :

$$T_{123} = \frac{(h_1 \times T_{23}) - (h_2 \times T_{13}) + (h_3 \times T_{12})}{h}$$

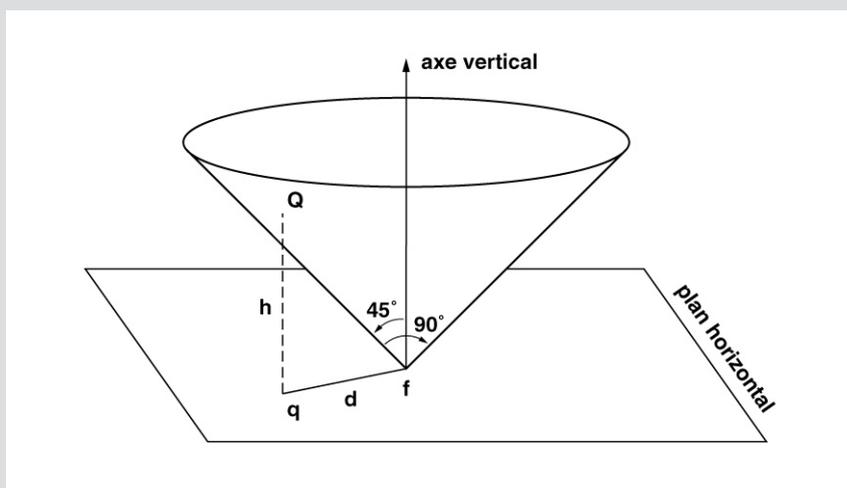
C'est un point de départ pour évaluer la « différentielle triangulaire » T_{123} qui mesure l'effet de la courbure d'espace-temps dans le petit.

À SUIVRE

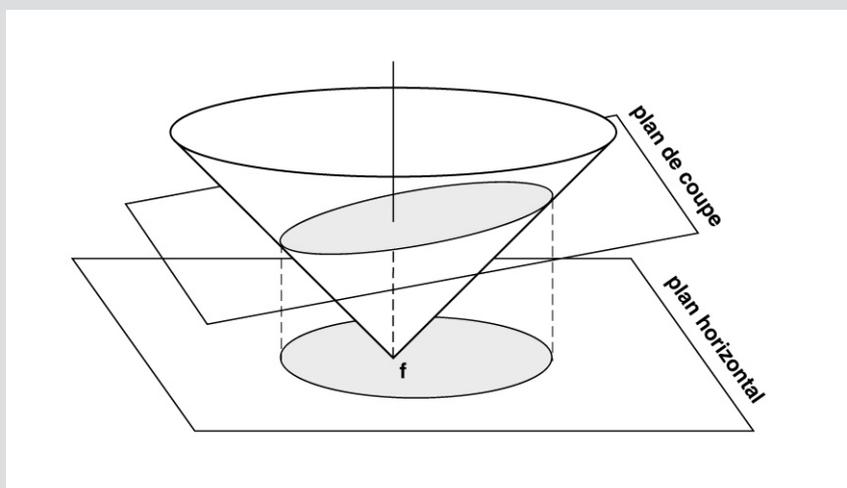
APPENDICE : L'ELLIPSE EN TANT QUE PROJECTION CONIQUE

Les relations harmoniques sous-jacentes dans une ellipse deviennent plus intelligibles si nous concevons l'ellipse comme une sorte d'ombre ou de projection, provenant d'une géométrie conique supérieure. Les conséquences de cela sont développées dans la section 12. Nous nous contentons ici de présenter les éléments de base de la construction géométrique en question.

a) Etant donné un plan horizontal et un point f sur ce plan, considérons l'axe vertical passant par f et le cône de révolution autour de cet axe, de sommet f , et dont l'angle au sommet est de 90° . Notons la caractéristique cruciale de la relation entre le cône et le plan horizontal : pour tout point q du plan, la distance d de f à q est égale à la « hauteur » h du point Q se trouvant à la verticale de q sur le cône.



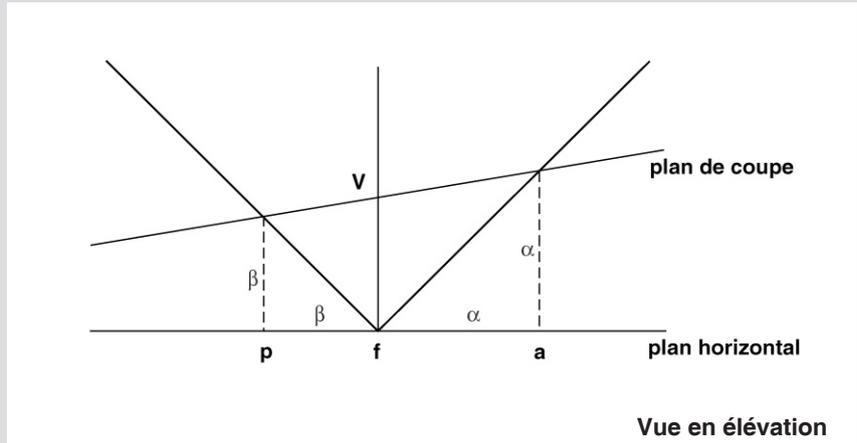
b) Si on coupe le cône avec un plan, on crée une section conique. Pour le cas qui nous intéresse ici, on considère que le plan forme un angle de plus de 45° avec l'axe vertical : la section conique est donc une ellipse. Projétons ensuite cette ellipse verticalement sur le plan horizontal. On obtient, comme nous allons le voir ci-après, une ellipse dont f est un foyer.



c) Pour comprendre les relations ainsi créées, examinons la projection de la figure précédente sur un plan vertical passant par l'axe vertical et le grand axe des deux ellipses. Ce plan est perpendiculaire au plan qui coupe le cône ainsi qu'au plan horizontal.

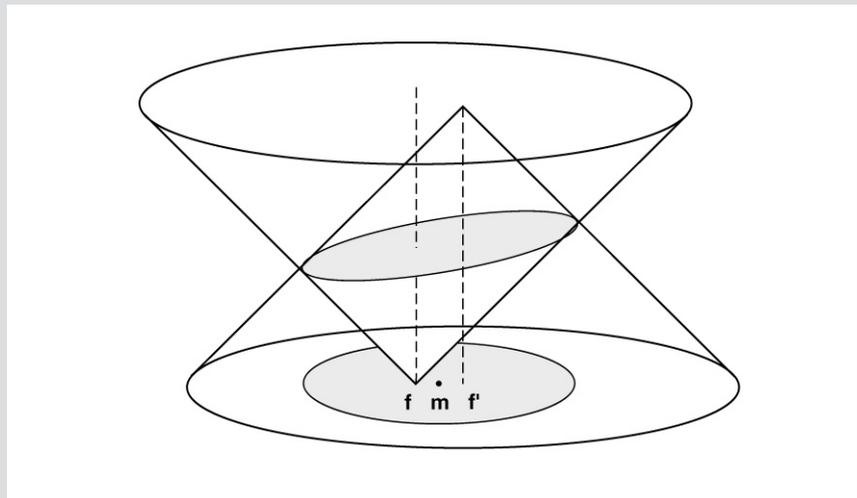
On peut constater que le segment fV est égal au segment D [voir la figure (I), appendice, *Fusion* n°75], qui définit le demi-paramètre de l'ellipse projetée. (En effet, le point q du segment D sur l'ellipse coïncide avec la position de f quand l'ellipse est vue en élévation perpendiculairement à son grand axe ; le point Q du cône au-dessus de q coïncide avec V , et sa hauteur, qui est égale à D , coïncide avec fV .) Ceux qui sont habiles en géométrie pourront facilement calculer la longueur fV en fonction de α et β à partir du diagramme.

Le résultat est $fV = 2\alpha\beta / (\alpha + \beta)$, ce qui confirme l'expression du demi-paramètre que nous avons trouvé d'une autre manière à la figure (I).



d) Double projection conique.

L'ellipse formée à partir de la section du cône par un plan, peut être également réalisée à partir de l'intersection de ce cône avec un autre cône, congruent avec le premier mais orienté en sens inverse, dont l'axe serait la ligne verticale passant par le point f' symétrique de f par rapport au point milieu m de l'ellipse projetée.



e) Si l'on observe en élévation cette construction « à deux cônes », comme précédemment, on peut voir pourquoi les points f et f' correspondant aux points sommets des cônes, coïncident avec les foyers de l'ellipse. Prenons q un point arbitraire du périmètre de l'ellipse projetée et Q le point correspondant sur la section conique. Alors, en vertu de la symétrie de la construction et de la relation entre les « hauteurs » et les distances aux points f et f' , Qq et Qq' sont respectivement équivalents aux distances réelles entre q et f , f' (c'est-à-dire les distances réelles dans le plan de l'ellipse projetée, et non celles en élévation). Du fait que la distance entre les deux plans horizontaux est constante, $Qq + Qq'$ est constante, et est égale, par conséquent, à la somme des distances qf et qf' .

