

## Problème 1

Le but de ce problème est l'étude de quelques spécificités des fonctions numériques  $c$  et  $s$  de la variable réelle  $x$  définies sur  $\mathbb{R}$  respectivement par :

$$c(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad \text{et} \quad s(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}.$$

Les trois parties de ce problème peuvent être traitées indépendamment l'une de l'autre.

### Partie I

#### Majorations, minoration, encadrements

1. Calculer  $c(0)$  et  $s(0)$  ; donner une valeur approchée de  $c(1)$  et de  $s(1)$  à  $10^{-2}$  près.
2. Démontrer que la fonction  $c$  est paire et que la fonction  $s$  est impaire.
- 3.

3.1. Justifier que, pour tout réel  $x$ , on a :

- ◆  $[c(x)]^2 - [s(x)]^2 = 1$  ;
- ◆  $c(x) \geq 1$ .

3.2. Vérifier que, pour tout réel  $x$  positif, on a :

$$0 \leq s(x) < c(x).$$

4.

- 4.1. Justifier que les fonctions  $c$  et  $s$  sont dérivables sur  $\mathbb{R}$  ; déterminer les fonctions dérivées correspondantes.
- 4.2. Dresser le tableau de variation de chacune des fonctions  $c$  et  $s$ .
- 4.3. Tracer les courbes représentatives des fonctions  $c$  et  $s$  dans un même repère orthonormal du plan d'unité graphique 1cm.

5.

5.1. Démontrer que, pour tout réel  $x$  positif, on a :

$$x \leq s(x).$$

5.2. En déduire les inégalités suivantes pour tout réel  $x$  positif :

- ◆  $1 + \frac{x^2}{2} \leq c(x)$  ;
- ◆  $x + \frac{x^3}{6} \leq s(x)$ .

6.

6.1. Démontrer que, pour tout réel  $x$  compris entre 0 et 1, on a :

$$\blacklozenge \quad s(x) \leq 2x;$$

$$\blacklozenge \quad c(x) \leq 1 + x^2.$$

6.2. En déduire les inégalités suivantes pour tout réel  $x$  compris entre 0 et 1 :

$$\blacklozenge \quad s(x) \leq x + \frac{x^3}{3};$$

$$\blacklozenge \quad c(x) \leq 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{12}.$$

6.3. Justifier que, pour tout réel  $x$  compris entre 0 et 1, on a :

$$0 \leq c(x) - \left(1 + \frac{x^2}{2}\right) \leq \frac{1}{12}.$$

Qu'en est-il pour  $s(x)$  ?

## Partie II

### Vers une approximation de la fonction $c$ par des fonctions polynômes

1. Démontrer, à l'aide d'une intégration par parties, que pour tout réel  $x$ , on a :

$$c(x) = 1 + \int_0^x (x-t) c(t) dt.$$

En déduire que, pour tout réel  $x$ , on a :

$$c(x) = 1 + \frac{x^2}{2} + \int_0^x \frac{(x-t)^3}{3!} c(t) dt.$$

2. Démontrer que, pour tout réel  $x$ , la relation suivante est satisfaite pour tout entier  $n$  strictement positif :

$$c(x) = 1 + \sum_{k=1}^n \frac{x^{2k}}{(2k)!} + \int_0^x \frac{(x-t)^{2n+1}}{(2n+1)!} c(t) dt.$$

Un nombre réel strictement positif  $a$  étant donné, on cherche, dans la suite de cette partie, à

montrer que  $c(a) = 1 + \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{a^{2k}}{(2k)!}$ .

3. Démontrer que pour tout entier  $n$  strictement positif, on a :

$$\int_0^a \frac{(a-t)^{2n+1}}{(2n+1)!} c(t) dt \leq \frac{a^{2n+2}}{(2n+2)!} c(a).$$

4. On note  $v_n = \frac{a^{2n}}{(2n)!}$  où  $n$  est un entier strictement positif.

4.1. Prouver qu'il existe un entier  $N$  tel que pour tout entier  $n$  supérieur ou égal à  $N$ , on a :

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} \leq \frac{1}{2}.$$

4.2. Démontrer que pour tout entier  $n$  supérieur ou égal à  $N$ , on a :

$$v_n \leq \frac{1}{2^{n-N}} v_N.$$

4.3. Démontrer que la suite  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge et préciser sa limite.

5. On considère la suite de réels  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie par :

♦  $u_0 = 1$  ;

♦ pour tout entier  $n$  strictement positif,  $u_n = 1 + \sum_{k=1}^n \frac{a^{2k}}{(2k)!}$ .

Démontrer que la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers  $c(a)$ .

### Partie III

#### Les fonctions $c$ et $s$ et l'hyperbole

*On admettra que si une fonction continue sur l'intervalle  $[1 ; +\infty[$  est monotone ou strictement monotone sur l'intervalle  $]1 ; +\infty[$ , il en est de même sur l'intervalle  $[1 ; +\infty[$ .*

Le plan étant muni d'un repère orthonormal  $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ , on considère la courbe  $\mathcal{C}$  d'équation  $x^2 - y^2 = 1$ .

On note  $\mathcal{C}^+$  l'ensemble des points de  $\mathcal{C}$  admettant des coordonnées  $x$  et  $y$  positives.

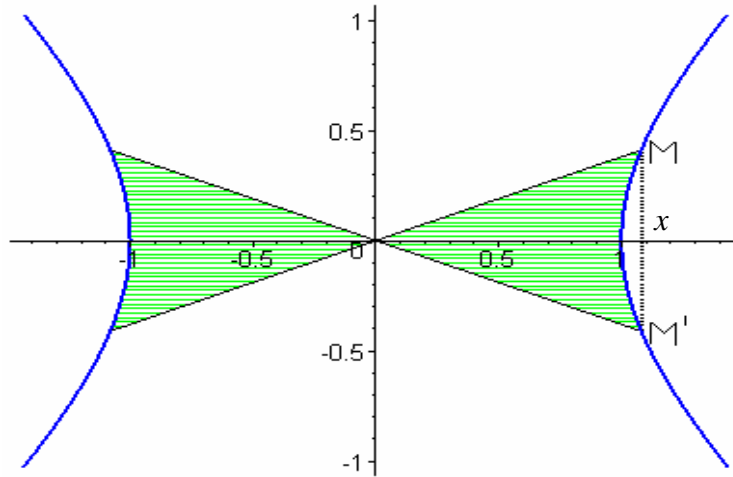
1. Justifier que la courbe  $\mathcal{C}^+$  est la courbe représentative dans le repère  $(O ; \vec{i}, \vec{j})$  de la fonction  $f$  qui à tout réel  $x$  de l'intervalle  $[1 ; +\infty[$  associe  $\sqrt{x^2 - 1}$ .

2. Démontrer que la droite d'équation  $y = x$  est asymptote à la courbe  $\mathcal{C}^+$ .

3. Démontrer que la courbe  $\mathcal{C}$  peut être obtenue à partir de la courbe  $\mathcal{C}^+$  par des symétries que l'on précisera.

4. Tracer la courbe  $\mathcal{C}$  dans le repère  $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ .

Un nombre réel positif  $a$  étant donné, on cherche, dans la suite de cette partie, à montrer que les coordonnées du point  $M$  de  $\mathcal{C}^+$  tel que l'aire hachurée représentée ci-dessous soit égale à  $2a$  sont  $(c(a), s(a))$ .



5. On note :

- ◆  $F$  la primitive de la fonction  $f : x \mapsto \sqrt{x^2 - 1}$  définie sur l'intervalle  $[1 ; +\infty[$  et nulle en 1 ;
- ◆  $\mathcal{A}$  la fonction qui à tout réel  $x$  supérieur ou égal à 1 associe l'aire de la partie hachurée représentée ci-dessus et correspondant au point  $M$  d'abscisse  $x$  de la courbe  $\mathcal{C}^+$  ;
- ◆  $g$  la fonction numérique de variable réelle  $x$  définie sur l'intervalle  $[1 ; +\infty[$  par :

$$g(x) = \frac{x\sqrt{x^2 - 1}}{2} - F(x).$$

5.1. Justifier la relation suivante, pour tout réel  $x$  supérieur ou égal à 1 :

$$\mathcal{A}(x) = 4g(x).$$

5.2. Démontrer que la fonction  $\mathcal{A}$  est strictement croissante sur l'intervalle  $[1 ; +\infty[$ .

5.3. Justifier l'inégalité suivante, pour tout réel  $x$  strictement supérieur à 1 :

$$g'(x) \geq \frac{1}{2x}.$$

5.4. Dédurre de ce qui précède :

- ◆  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$  ;
- ◆ Quel que soit le réel  $a$  positif, il existe un unique réel  $x_a$  supérieur ou égal à 1 tel que :

$$\mathcal{A}(x_a) = 2a.$$

6. Soient  $\vec{I} = \frac{\vec{i} - \vec{j}}{\sqrt{2}}$  et  $\vec{J} = \frac{\vec{i} + \vec{j}}{\sqrt{2}}$ .

Pour tout point M du plan de coordonnées  $(x, y)$  dans le repère  $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ , on note  $(X, Y)$  ses coordonnées dans le repère  $(O ; \vec{I}, \vec{J})$ .

6.1. Prouver que  $(O ; \vec{I}, \vec{J})$  est un repère orthonormal du plan.

6.2. Exprimer  $x$  et  $y$  en fonction de  $X$  et  $Y$ .

6.3. En déduire que, dans le repère  $(O ; \vec{I}, \vec{J})$ ,  $\mathcal{C}$  est la courbe représentative de la fonction  $h : X \mapsto \frac{1}{2X}$ , définie sur  $\mathbb{R}^*$ .

7. On note A le point de coordonnées  $(1, 0)$  dans le repère  $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ .

7.1. Quelles sont les coordonnées du point A dans le repère  $(O ; \vec{I}, \vec{J})$  ?

7.2. Tracer la courbe  $\mathcal{C}$ , le point A, la droite  $(O ; \vec{i})$  et représenter la partie hachurée précédente dans le repère  $(O ; \vec{I}, \vec{J})$ .

7.3. Calculer l'aire  $\mathcal{A}(c(a))$  en fonction de  $a$ .

7.4. Conclure.