

CAPES Interne 2007 - épreuve 1 - Corrigé

Partie I Majorations, minorations, encadrements

I.1 On a : $c(0) = 1$ et $s(0) = 0$. De plus, $c(1) = \frac{e + \frac{1}{e}}{2} \simeq 1,54$ et $s(1) = \frac{e - \frac{1}{e}}{2} \simeq 1,18$.

I.2 L'ensemble de définition de c et s est \mathbb{R} donc est symétrique par rapport à 0. De plus, $\forall x \in \mathbb{R}, c(-x) = c(x)$ et $s(-x) = -s(x)$.
Donc la fonction c est paire et la fonction s est impaire.

I.3.1

- $\forall x \in \mathbb{R}, (c(x))^2 - (s(x))^2 = (c(x) - s(x))(c(x) + s(x)) = e^{-x} \times e^x = 1$.
- $\forall x \in \mathbb{R}, c(x) > 0$ et $(c(x))^2 = 1 + (s(x))^2$. Donc $c(x) = \sqrt{1 + (s(x))^2} \geq 1$.

I.3.2

- $\forall x \in \mathbb{R}^+, s(x) = \frac{e^x}{2} \left(1 - \frac{1}{e^{2x}}\right)$ et $0 < \frac{1}{e^{2x}} \leq 1$ sur \mathbb{R}^+ . Donc $\forall x \in \mathbb{R}^+, s(x) \geq 0$.
- $\forall x \in \mathbb{R}, c(x) - s(x) = e^{-x} > 0$.

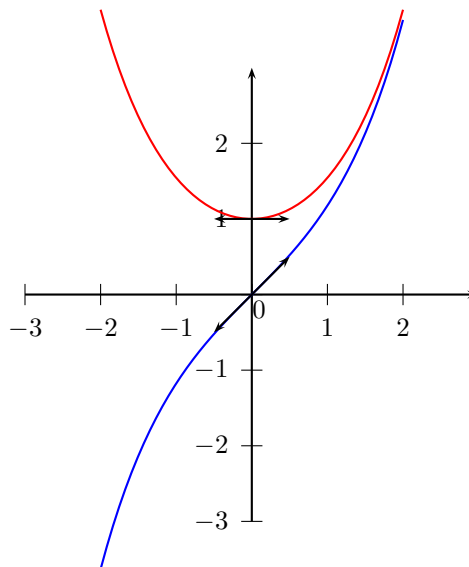
Finalement, on a donc bien : $\forall x \in \mathbb{R}^+, 0 \leq s(x) < c(x)$.

I.4.1 c et s sont des sommes de composées de fonctions dérivables sur \mathbb{R} . Donc c et s sont dérivables sur \mathbb{R} .
 $\forall x \in \mathbb{R}, c'(x) = s(x)$ et $s'(x) = c(x)$.

I.4.2 A l'aide des résultats précédents, on peut dresser les deux tableaux de variations suivants :

x	$-\infty$	0	$+\infty$	x	$-\infty$	0	$+\infty$
$c'(x)$	-	\emptyset	+	$s'(x)$		+	
$c(x)$	$+\infty$		$+\infty$	$s(x)$	$-\infty$	0	$+\infty$

I.4.3 Les courbes représentatives des fonctions c (en rouge) et s (en bleu) sont tracées ci-dessous :



I.5.1 Soit ϕ la fonction définie sur \mathbb{R}^+ par $\phi(x) = s(x) - x$. ϕ est définie, continue et dérivable sur \mathbb{R}^+ et $\forall x \in \mathbb{R}^+$, on a : $\phi'(x) = c(x) - 1 \geq 0$. La fonction ϕ est donc croissante sur \mathbb{R}^+ . Comme $\phi(0) = 0$, on a donc : $\forall x \in \mathbb{R}^+, x \leq s(x)$.

I.5.2 D'après la question précédente, on a donc : $\forall x \in \mathbb{R}^+, \int_0^x t dt \leq \int_0^x s(t) dt$ donc $\frac{x^2}{2} \leq c(x) - 1$.

Donc $\forall x \in \mathbb{R}^+, 1 + \frac{x^2}{2} \leq c(x)$.

En intégrant à nouveau cette inégalité entre 0 et x avec $x \geq 0$, on a : $\forall x \in \mathbb{R}^+, x + \frac{x^3}{6} \leq s(x)$.

I.6.1 Comme c est croissante sur $[0; 1]$, $c(0) = 1$ et $c(1) \simeq 1,54$, on a : $\forall x \in [0; 1], 1 \leq c(x) \leq c(1) \leq 2$. En intégrant cette inégalité entre 0 et x avec $x \in [0; 1]$, on obtient l'inégalité $s(x) - 0 \leq 2x$ d'où : $\forall x \in [0; 1], s(x) \leq 2x$. En intégrant à nouveau cette inégalité entre 0 et x avec $x \in [0; 1]$, on obtient l'inégalité $c(x) - 1 \leq x^2$ d'où : $\forall x \in [0; 1], c(x) \leq 1 + x^2$.

I.6.2 En intégrant cette dernière inégalité entre 0 et x avec $x \in [0; 1]$, on obtient l'inégalité $\forall x \in [0; 1], s(x) \leq x + \frac{x^3}{3}$. En intégrant à nouveau cette inégalité entre 0 et x avec $x \in [0; 1]$, on obtient l'inégalité : $\forall x \in [0; 1], c(x) \leq 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{12}$.

I.6.3 En utilisant les inégalités obtenues à la question I.5.2 et à la question I.6.2, on a :

$$\forall x \in [0; 1], \quad 0 \leq c(x) - \left(1 + \frac{x^2}{2}\right) \leq \frac{x^3}{12} \quad \text{et} \quad 0 \leq s(x) - \left(x + \frac{x^3}{6}\right) \leq \frac{x^3}{6}.$$

Comme $x \in [0; 1]$, on a : $\frac{x^3}{12} \leq \frac{1}{12}$ et $\frac{x^3}{6} \leq \frac{1}{6}$.

$$\text{D'où : } \forall x \in [0; 1], \quad 0 \leq c(x) - \left(1 + \frac{x^2}{2}\right) \leq \frac{1}{12} \quad \text{et} \quad 0 \leq s(x) - \left(x + \frac{x^3}{6}\right) \leq \frac{1}{6}.$$

Partie II Vers une approximation de la fonction c par des fonctions polynômes

II.1 $\forall x \in \mathbb{R}$, on a : $\int_0^x 1 \times s(t) dt = [ts(t)]_0^x - \int_0^x tc(t) dt$ (les fonctions utilisées sont définies, continues et dérivables sur \mathbb{R}). Il vient donc : $c(x) = 1 + \int_0^x xc(t) dt - \int_0^x tc(t) dt$. D'où : $\forall x \in \mathbb{R}, c(x) = 1 + \int_0^x (x-t)c(t) dt$.

En intégrant à nouveau par parties (à deux reprises) l'intégrale de l'égalité ci-dessus (les fonctions utilisées sont définies, continues et dérivables sur \mathbb{R}), on a donc :

$$\forall x \in \mathbb{R}, c(x) = 1 + \left[\frac{(x-t)^2}{2} c(t) \right]_0^x - \int_0^x \frac{(x-t)^2}{2} s(t) dt = 1 + \frac{x^2}{2} - \left(\left[\frac{(x-t)^3}{3!} s(t) \right]_0^x - \int_0^x \frac{(x-t)^3}{3!} c(t) dt \right)$$

d'où l'égalité : $\forall x \in \mathbb{R}, c(x) = 1 + \frac{x^2}{2} + \int_0^x \frac{(x-t)^3}{3!} c(t) dt$.

II.2 Raisonnons par récurrence. L'égalité est vraie pour $n = 1$ (d'après II.1). Supposons-la vraie à un rang $n \geq 1$. Au rang $n + 1$, on a (en intégrant par partie à deux reprises, les fonctions utilisées sont toujours définies, continues et dérivables sur \mathbb{R}) :

$$\forall x \in \mathbb{R}, c(x) = 1 + \sum_{k=1}^n \frac{x^{2k}}{(2k)!} + \int_0^x \frac{(x-t)^{2n+1}}{(2n+1)!} c(t) dt = 1 + \sum_{k=1}^n \frac{x^{2k}}{(2k)!} + \left(\left[\frac{(x-t)^{2n+2}}{(2n+2)!} c(t) \right]_0^x - \int_0^x \frac{(x-t)^{2n+2}}{(2n+2)!} s(t) dt \right)$$

$c(x) = 1 + \sum_{k=1}^{n+1} \frac{x^{2k}}{(2k)!} - \left(\left[\frac{(x-t)^{2n+3}}{(2n+3)!} s(t) \right]_0^x - \int_0^x \frac{(x-t)^{2n+3}}{(2n+3)!} c(t) dt \right)$ et l'égalité est donc vraie au rang $n + 1$.

Donc : $\forall n \geq 1 \forall x \in \mathbb{R}, c(x) = 1 + \sum_{k=1}^n \frac{x^{2k}}{(2k)!} + \int_0^x \frac{(x-t)^{2n+1}}{(2n+1)!} c(t) dt$

II.3 Comme $a > 0$ et comme la fonction c est croissante sur $[0; a]$, on a : $\forall x \in [0; a], c(t) \leq c(a)$.

Donc pour tout $n > 0$, on a : $\int_0^a \frac{(a-t)^{2n+1}}{(2n+1)!} c(t) dt \leq c(a) \left[-\frac{(a-t)^{2n+2}}{(2n+2)!} \right]_0^a$ et donc :

$$\forall n > 0, \int_0^a \frac{(a-t)^{2n+1}}{(2n+1)!} c(t) dt \leq \frac{a^{2n+2}}{(2n+2)!} c(a)$$

II.4.1 $\forall n > 0, v_n \neq 0$ et $\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{a^2}{(2n+1)(2n+2)}$. Le membre de droite tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$. Donc

$\forall \varepsilon > 0, \exists N > 0, \forall n \geq N, \frac{a^2}{(2n+1)(2n+2)} \leq \varepsilon$. En particulier, en prenant $\varepsilon = \frac{1}{2}$, il existe donc $N > 0$ tel que $\forall n \geq N, \frac{v_{n+1}}{v_n} \leq \frac{1}{2}$.

II.4.2 $\forall n \geq N$, on a : $\frac{v_n}{v_N} = \frac{v_n}{v_{n-1}} \times \dots \times \frac{v_{N+1}}{v_N} \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n-(N+1)+1}$. Donc : $\forall n \geq N$, on a : $v_n \leq \frac{1}{2^{n-N}} v_N$.

II.4.3 $\forall n \geq N$, on a : $0 \leq v_n \leq \frac{1}{2^{n-N}} v_N$ et $\frac{1}{2^{n-N}}$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$. Ainsi, on a donc : $v_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

II.5 D'après le II.2, on a : $c(a) = u_n + \int_0^a \frac{(a-t)^{2n+1}}{(2n+1)!} c(t) dt$.

On a donc : $|u_n - c(a)| = \int_0^a \frac{(a-t)^{2n+1}}{(2n+1)!} c(t) dt \leq \frac{a^{2n+2}}{(2n+2)!} c(a)$ et $\frac{a^{2n+2}}{(2n+2)!} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ d'après II.4.3.

Ainsi : $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} c(a)$.

Partie III Les fonctions c et s et l'hyperbole

III.1 On a les équivalences suivantes : $M(x, y) \in \mathcal{H}^+ \iff M(x, y) \in \mathcal{H}$ et $(x \geq 0$ et $y \geq 0) \iff y^2 = 1 - x^2$ et $(x \geq 0$ et $y \geq 0) \iff y = \sqrt{1 - x^2}$ et $x \geq 0$.

Donc \mathcal{H}^+ est la courbe représentative de f .

III.2 $\forall x \in [1; +\infty[, x - \sqrt{x^2 - 1} = \frac{(x - \sqrt{x^2 - 1})(x + \sqrt{x^2 - 1})}{x + \sqrt{x^2 - 1}} = \frac{1}{x + \sqrt{x^2 - 1}} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$.

Donc la droite d'équation $y = x$ est asymptote à \mathcal{H}^+ .

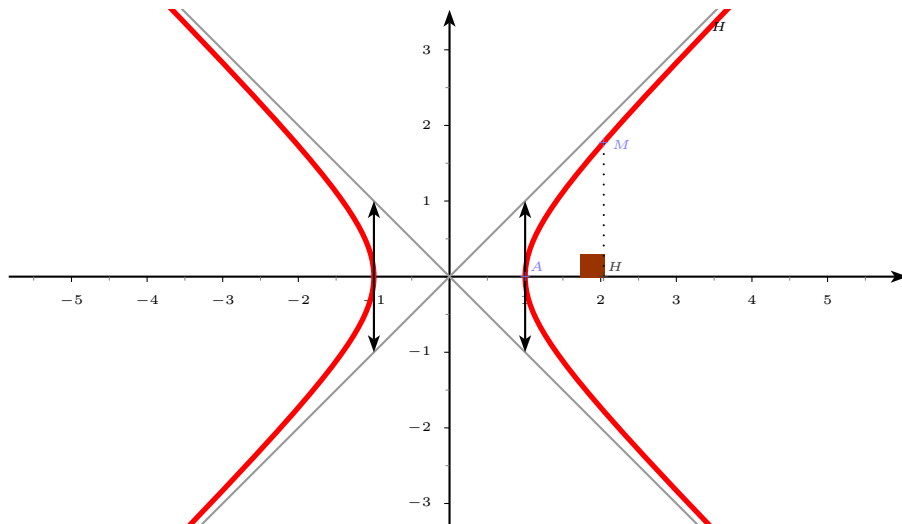
III.3 On a les équivalences suivantes :

$M(x, y) \in \mathcal{H} \iff M(x, -y) \in \mathcal{H}$ donc \mathcal{H} est symétrique par rapport à (Ox) .

$M(x, y) \in \mathcal{H} \iff M(-x, y) \in \mathcal{H}$ donc \mathcal{H} est symétrique par rapport à (Oy) .

On peut donc restreindre la construction de \mathcal{H} au premier quadrant (c'est à dire à \mathcal{H}^+) puis construire \mathcal{H} grâce aux symétries.

III.4 Voici la courbe \mathcal{H} .



III.5.1 Soit $x \geq 1$. On a : $\mathcal{A}(x) = 4 \times \left(\mathcal{A}_{HOM} - \int_1^x \sqrt{t^2 - 1} dt \right) = 4 \times \left(\frac{x \times \sqrt{x^2 - 1}}{2} - F(x) \right) = 4 \times g(x)$.

III.5.2 La fonction \mathcal{A} est dérivable sur $]1; +\infty[$ et $\mathcal{A}'(x) = 4 \times g'(x) = \frac{2}{\sqrt{x^2 - 1}} > 0$. Donc la fonction \mathcal{A} est strictement croissante sur $[1; +\infty[$.

III.5.3 $\forall x > 1$, on a : $\sqrt{x^2 - 1}^2 \leq x^2$ donc $\frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}} \geq \frac{1}{x}$. On a donc : $\forall x > 1$, $g'(x) \geq \frac{1}{2x}$.

III.5.4 • En utilisant le résultat précédent, on a : $\forall t \geq 1$, $\int_1^t g'(x) dx \geq \int_1^t \frac{1}{2x} dx$ d'où $g(t) - g(1) \geq \frac{\ln(t)}{2}$. Ainsi $g(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$.
 • Soit $a \geq 0$. g est strictement croissante sur $[1; +\infty[$ donc réalise une bijection de $[1; +\infty[$ vers $[0; +\infty[$. Donc il existe un unique x_a tel que $g(x_a) = \frac{a}{2}$ donc tel que $\mathcal{A}(x_a) = 4 \times g(x_a) = 2a$.

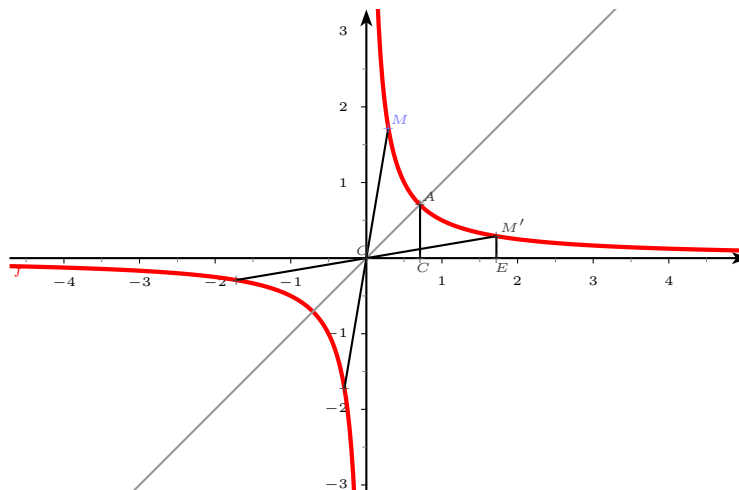
III.6.1 • Les vecteurs \vec{T} et \vec{J} forment une famille libre donc forme une base du plan (on est en dimension 2).
 • $\|\vec{T}\|^2 = \|\vec{J}\|^2 = 1$ donc les vecteurs \vec{T} et \vec{J} sont normés.
 • $\vec{T} \cdot \vec{J} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0$ donc les vecteurs \vec{T} et \vec{J} sont orthogonaux.
 Donc (O, \vec{T}, \vec{J}) est un repère orthonormal du plan.

III.6.2 Pour tout point $M(x, y)$, on a : $\vec{OM} = x\vec{v} + y\vec{j} = X\vec{T} + Y\vec{J} = \left(\frac{X+Y}{\sqrt{2}}\right)\vec{v} + \left(\frac{Y-X}{\sqrt{2}}\right)\vec{j}$.
 Par identification, on obtient : $\begin{cases} x = \frac{X+Y}{\sqrt{2}} \\ y = \frac{Y-X}{\sqrt{2}} \end{cases}$

III.6.3 On a les équivalences : $M(x, y) \in \mathcal{H} \iff x^2 - y^2 = 1 \iff \frac{(X+Y)^2}{2} - \frac{(Y-X)^2}{2} = 1 \iff XY = \frac{1}{2}$. Donc dans le repère (O, \vec{T}, \vec{J}) , \mathcal{H} est la courbe représentative de la fonction h .

III.7.1 En résolvant le système obtenu à la question III.6.3 avec $x = 1$ et $y = 0$, on trouve les coordonnées de A dans le repère (O, \vec{T}, \vec{J}) qui sont : $A\left(\frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

III.7.2 Dans le repère (O, \vec{i}, \vec{j}) :



III.7.3 Le point M de coordonnées $(c(a); s(a))$ dans le repère (O, \vec{i}, \vec{j}) a pour coordonnées $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}e^{-a}; \frac{\sqrt{2}}{2}e^a\right)$ dans le repère (O, \vec{i}, \vec{j}) et $M' \left(\frac{\sqrt{2}}{2}e^a; \frac{\sqrt{2}}{2}e^{-a}\right)$.

Donc pour tout $a \geq 0$, on a : $\mathcal{A}(c(a)) = 4 \times \left(\mathcal{A}_{AOC} + \int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\frac{e^a}{\sqrt{2}}} \frac{1}{2t} dt - \mathcal{A}_{OM'H} \right)$

d'où $\mathcal{A}(c(a)) = 4 \times \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{2} \left(\ln \frac{e^a}{\sqrt{2}} - \ln \frac{1}{\sqrt{2}} \right) - \frac{\frac{e^a}{\sqrt{2}} \times \frac{e^{-a}}{\sqrt{2}}}{2} \right)$

Donc $\mathcal{A}(c(a)) = 2a$.

III.7.4 Pour tout $a \geq 0$, l'unique nombre réel x_a cherché au III.5.4 vaut donc $c(a)$.

Ainsi les coordonnées du point M telles que l'aire hachurée au III.5 soit égale à $2a$ sont $(c(a); s(a))$.

Corrigé écrit par David-Yann VINCENT, david-yann.vincent@ac-rouen.fr (si vous trouvez une "coquille", merci de me la signaler)