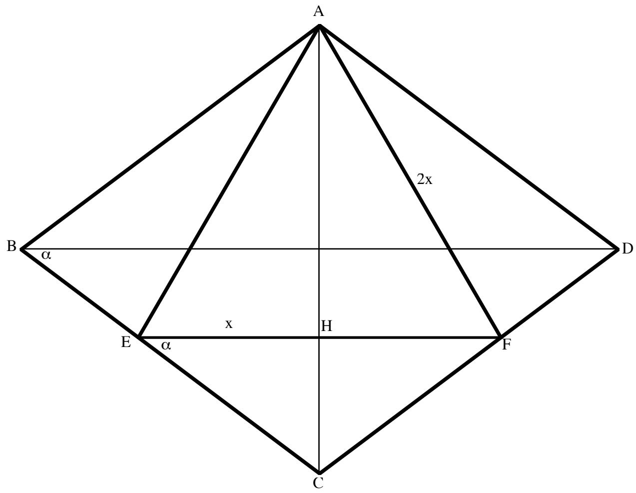
De la vie d'un triangle équilatéral dans un losange…

Données de départ :

Un losange de côtés unitaires et d'angle 2α en B et D, dans lequel est inscrit un triangle équilatéral.



But :

Déterminer les évolutions du triangle lorsque α varie et trouver l'angle qui correspondra au triangle d'aire maximale.

Exploration préalable :

En faisant varier α on s'aperçoit que la valeur initiale est zéro, qu'il y aura un cas intéressant à 45° (le losange est alors un carré) et que le processus s'arrêtera pour 60°, le triangle étant à ce moment superposé à la moitié du losange.

Donc le cadre est ainsi défini : $\boxed{0° \le \alpha \le 60°}$

Pour des raisons aussi bien esthétiques que de symétrie, on pourrait faire l'hypothèse que l'une ou l'autre de ces valeurs (45° et 60°) représentent le maximum cherché mais passons aux calculs.

Calculs :

L'aire du triangle est donnée par $A(x) = x^2\sqrt{3}$. Reste à trouver *x* en fonction de α.

Pour ce faire on a : $\overline{AC} = 2\sin\alpha$, $\overline{HC} = x\tan\alpha$ et $\overline{AH} = x\sqrt{3}$.

En d'autres termes : $2\sin\alpha = x\sqrt{3} + x\tan\alpha$, d'où on tire que $x = \dfrac{2\sin\alpha}{\sqrt{3} + \tan\alpha}$.

L'aire du triangle est maintenant donnée par $\boxed{A(\alpha) = \dfrac{4\sqrt{3}\sin^2\alpha}{\left(\sqrt{3} + \tan\alpha\right)^2}.}$

Dans le cadre de notre problème cette fonction est définie, continue et dérivable donc la recherche des zéros de sa dérivée est pertinente, sous réserve d'un maximum au bord mais ceci peut être rapidement écarté car $A(60°) = \dfrac{\sqrt{3}}{4} \approx 0.433$ alors que $A(45°) = 2\sqrt{3} - 3 \approx 0.464$, ce qui pourrait renforcer l'idée d'un max à 45°. Le calcul de la dérivée $A'(\alpha)$ peut se simplifier si on se souvient que si une fonction prend un extremum en une certaine valeur, celle-ci reste invariante pour la fonction mise au carré. On peut donc se rabattre sur la dérivée de $A^*(\alpha) = \dfrac{\sin\alpha}{\sqrt{3} + \tan\alpha}$. Quelques manipulations classiques nous livrent alors :

$$A^{*\prime}(\alpha) = 0 \Leftrightarrow \tan^3\alpha = \sqrt{3} \Leftrightarrow \boxed{\alpha_{max} = \arctan\sqrt[6]{3} \approx 50{,}216° \text{ avec } A(\alpha_{max}) \approx 0.475}$$

Conclusion :

Il faut parfois se méfier de ses intuitions! Ce résultat est assez inattendu, en tout cas pour moi...