Pour mémoriser, il faut comprendre le sens des opérations

D'après les travaux de Jean Luc Bregeon, IUFM d'Auvergne
http://pagesperso-orange.fr/jean-luc.bregeon/

Mémorisation de la table d'addition

Savoir sa table d'addition, c'est

- Connaître le résultat. C'est le cas pour certains résultats qu'on considère « simples », particulièrement les doubles.
- Reconstruire le résultat, c'est-à-dire utiliser ses connaissances arithmétiques pour le retrouver.
Ex : pour calculer 3+6, un élève peut remplacer par 6+3 et procéder ensuite par surcomptage (7, 8, 9)

Stratégies à mettre en œuvre à l'école

▪ Avoir une bonne reconnaissance mentale des nombres (dès la GS)

▪ Apprendre le plus rapidement possible (CP)
- les doubles
- les « amis » de 10

▪ Développer des procédures de reconstruction des résultats et particulièrement :

- L'utilisation des « presque doubles »	ex : 6 + 7 c'est (6 + 6) + 1, c'est 12 + 1
- Le passage de la dizaine	ex : 7 + 4 c'est (7 + 3) + 1, c'est 10 + 1

Les trois sens de la soustraction

Le sens « enlever ».

Céline a 28 images. Elle donne 3 images à sa soeur. Combien lui en reste-t-il ?

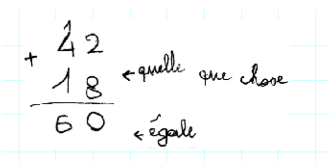
Ce sens est rapidement compris des élèves, et permet d'introduire le signe -

Pour obtenir le résultat, l'élève peut dessiner des images et en barrer 3 ou bien, s'il effectue un réel calcul, décompter (27, 26, 25). Il y est d'autant plus invité qu'on trouve dans l'énoncé la présence du mot inducteur « donne ».

Du point de vue du calcul, ce sens est particulièrement adapté lorsqu'on <u>enlève peu</u> ou bien lorsqu'on enlève un nombre entier de dizaines, de centaines.

Le sens « pour aller à ».

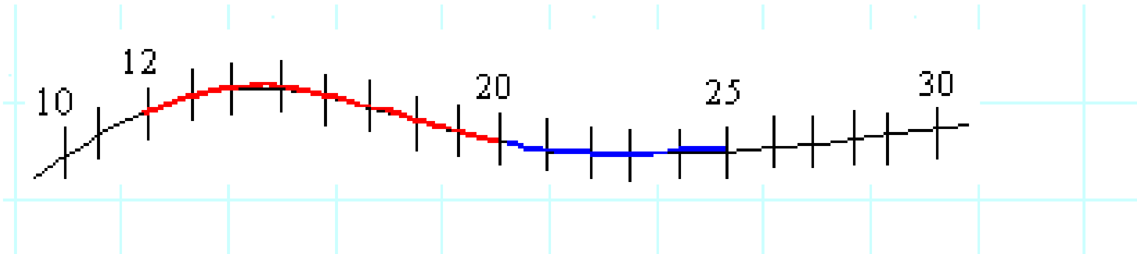
Stéphanie avait 42 images. Sa maman lui donne d'autres images. Stéphanie a maintenant 60 images. Combien d'images lui a donné sa maman ?



Du point de vue du calcul, ce sens facilite la recherche du résultat d'une soustraction dans le cas où on <u>enlève beaucoup</u>

▪ Autre exemple, calculer 41 – 38, il est plus simple de procéder par surcomptage : 39, 40, 41 que par soustraction.

▪ La représentation de la droite numérique est une visualisation intéressante de ce sens :



Il en résulte la possibilité de réaliser des calculs en faisant des « bonds »

de 12 à 20	8	
de 20 à 25	5	8 + 5 = 13
de 12 à 25	**13**	

Le passage par la dizaine supérieure est ainsi mieux explicité.

Le sens écart.

Antoine a 13 images et Lucas a 28 images. Qui a le plus d'images ? Combien en a- t-il en plus ?

L'écart entre deux nombres A et B (on suppose A inférieur à B) est le nombre qu'il faut ajouter à A pour obtenir B ainsi que le nombre qu'il faut enlever à B pour obtenir A.

Il faut bien prendre conscience que dans cet énoncé (problème de comparaison), <u>rien n'invite à la soustraction</u> 28 – 13 et que fournir une telle écriture manifeste déjà une réelle expertise. Pour y accéder, il faut d'abord transformer le problème en une situation d'égalisation : combien faut-il donner d'images à Antoine pour qu'il en ait autant que Lucas ?, ce qui conduit à un glissement vers le sens « pour aller à ».

Du point de vue du calcul, les deux sens « pour aller à » et « écart » sont assez proches,

Mais il ne faudrait pas réduire le sens écart au sens « pour aller à ». La caractéristique particulière de ce sens écart, par rapport aux précédents, est sa commutativité : l'écart entre A et B est aussi l'écart entre B et A.

Un déplacement sur la droite numérique dans le sens « négatif » (de B vers A) est envisageable.

Le sens complexe de la multiplication

La multiplication est une opération qui, à partir de deux nombres, fournit un autre nombre appelé produit. La difficulté vient de la manière dont on conçoit ce produit.

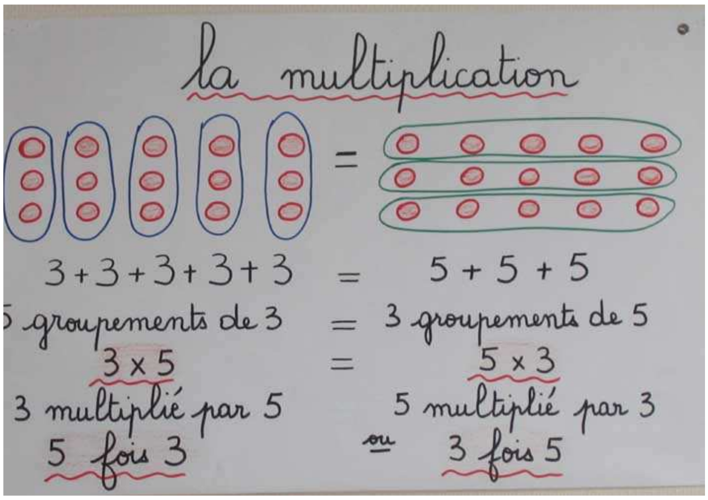
Exemple 1 (Evaluations CE2)
Beaucoup d'erreurs d'élèves dans le calcul mental du **produit 13 x 2**
Une enquête auprès d'enseignants montre que ceux-ci ont dicté de trois manières différentes : « treize fois deux » ; « deux fois treize » et « treize multiplié par deux ».
Or, selon le choix effectué (particulièrement « deux fois treize »), les réussites des élèves ne sont pas identiques…

- « treize fois deux » traduit l'action du nombre 13 sur le nombre 2 : il s'agit de la multiplication externe dont l'opérateur est x13 (le multiplicateur 13 est le nombre qui agit)

- « deux fois treize » traduit l'action du nombre 2 sur le nombre 13 : il s'agit de la multiplication externe dont l'opérateur est x2. Dans ce cas, il s'agit de prendre le double de 13, ce qui conduit facilement au résultat.

- « treize multiplié par deux» traduit la multiplication interne de 13 et de 2. Dans son acception actuelle, c'est une expression « neutre » qui n'induit aucun multiplicateur. C'est au calculateur de faire ensuite la traduction la plus appropriée.

Exemple 2 : que penser de cet affichage ?

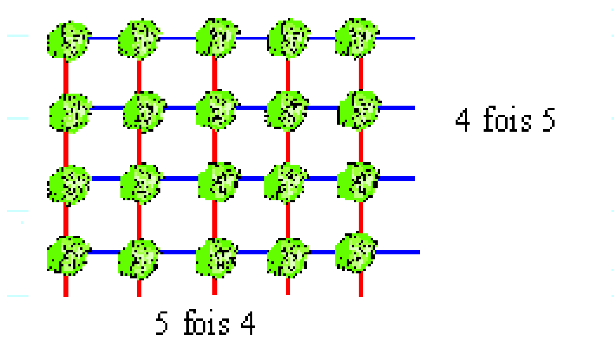


La construction du sens de la multiplication et du produit de deux nombres doit s 'appuyer sur la représentation première de l'opération, c'est-à-dire sur l'idée que, quand on multiplie, on répète plusieurs fois le même nombre et qu'on obtient ainsi un nombre plus grand.

▪ Il faut proposer aux élèves de produire différentes écritures additives répétées en relation avec le mot fois, afin d'installer ce sens premier de la multiplication.

4 x 3 = 3 + 3 + 3 + 3
3 x 4 = 4 + 4 + 4

▪ La seconde étape de la démarche consiste à introduire le signe x en faisant apparaître la commutativité : « a fois b » et « b fois a » sont deux facettes d'un même nombre qu'on notera indifféremment a x b ou b x a et qu'on appellera « a multiplié par b » ou « b multiplié par a »

Cette notion difficile à comprendre doit se traduire par une disposition en lignes et en colonnes.	

En définitive, un choix intéressant est de ne pas lier directement <u>l'ordre de ce qui est dit avec l'ordre de ce qui est écrit</u> et de permettre la lecture ou l'écriture dans les deux sens.

« Un jardinier a cueilli 4 bouquets de 12 roses. Combien a-t-il cueilli de roses ? »

L'élève (CE) doit avoir le choix (calcul réfléchi)

- de représenter les résultats (colonnes, lignes)
- de faire des additions réitérées
- d'écrire le résultat sous la forme 4 x 12 ou 12 x 4

Ensuite, au moment de la technique opératoire, on pourra rechercher l'économie et l'efficacité (ex : il est plus facile de poser 120 multiplié par 3 que la réciproque)

Les tables de multiplication

La table de multiplication (Pythagore) est constituée de différentes tables de multiplication, chacune d'elles étant constituée d'une ligne (ou d'une colonne).
En utilisant le mot « fois », on trouve les deux présentations pour la table de 2

<table>
<tr>
<td>
<table>
<tr><td>1 fois 2</td><td>2</td></tr>
<tr><td>2 fois 2</td><td>4</td></tr>
<tr><td>3 fois 2</td><td>6</td></tr>
<tr><td>4 fois 2</td><td>8</td></tr>
<tr><td>5 fois 2</td><td>10</td></tr>
<tr><td>6 fois 2</td><td>12</td></tr>
<tr><td>7 fois 2</td><td>14</td></tr>
<tr><td>8 fois 2</td><td>16</td></tr>
<tr><td>9 fois 2</td><td>18</td></tr>
<tr><td>10 fois 2</td><td>20</td></tr>
</table>
</td>
<td>
<table>
<tr><td>2 fois 1</td><td>2</td></tr>
<tr><td>2 fois 2</td><td>4</td></tr>
<tr><td>2 fois 3</td><td>6</td></tr>
<tr><td>2 fois 4</td><td>8</td></tr>
<tr><td>2 fois 5</td><td>10</td></tr>
<tr><td>2 fois 6</td><td>12</td></tr>
<tr><td>2 fois 7</td><td>14</td></tr>
<tr><td>2 fois 8</td><td>16</td></tr>
<tr><td>2 fois 9</td><td>18</td></tr>
<tr><td>2 fois 10</td><td>20</td></tr>
</table>
</td>
</tr>
<tr>
<td>C'est celle qui s'appuie le mieux sur le sens de la multiplication tel que l'enfant le perçoit. Il peut ainsi établir plus facilement des associations entre les nombres. Par exemple, s'il sait « 4 fois 2 » (8), il peut déduire « 5 fois 2 » (10) car c'est 8 + 2.</td>
<td>Cette présentation ne permet pas le raisonnement. Il ne peut s'agir alors que d'un apprentissage par cœur sans construction de sens.</td>
</tr>
</table>

Pour mémoriser, il faut :

- **savoir représenter (ex : 5 x 2 en lignes et colonnes)**
- **savoir identifier (5 x 2 c'est aussi 2 x 5, 5 + 5, 2 + 2 + 2 + 2 + 2)**
- **apprendre à raisonner (5 x 2 c'est 2 de plus que 4 x 2)**

Le sens de la division

Roger Bastien
Les revues pédagogiques de la mission laïque française

Le terme diviser peut revêtir au moins deux sens distincts

- **séparer en plusieurs parties, désunir, disjoindre (sens commun)**
- **partager en parties égales (sens mathématique)**

Le passage du sens commun au sens mathématique pose problème aux élèves de cycle 3.

Exemple
Combien de bonds de 15 cm seront nécessaires à la grenouille pour parcourir une distance de 180 cm ?

Deux stratégies

On procède à partir de 0 par ajouts successifs de 15 cm

Ce qui se traduit par une réflexion sur les multiples successifs de 15 : 15 x 12

On procède par retraits successifs à partir de 180 pour aller à 0

$180 - 15 = 165 \qquad 165 - 15 = 150 \qquad 150 - 15 = 135$ etc.

12 est le nombre de retraits successifs de bonds de 15 cm. 12 est le quotient de 180 : 15

Pour se rapprocher des différents sens possibles de la division, il faut appréhender

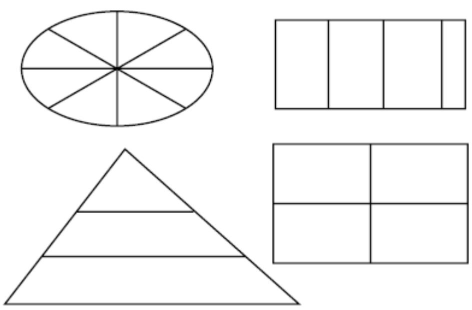
▪ La notion de partage dès la GS sous forme manipulatoire

Exemples

Tri d'objets, gâteau à partager entre …

▪ La notion de parts égales au CP

Exemples



Voici la découpe que maman a faite pour 4 gâteaux.
Est-ce que toutes les parts sont égales pour chacun des gâteaux ?
Dans quels gâteaux les parts sont elles égales ?
Dans quels gâteaux les parts sont elles inégales ?

Voici un jeu de 52 cartes pour 6 joueurs

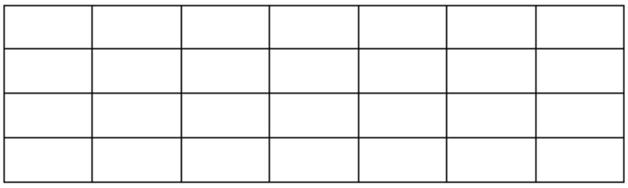
Peux-tu en distribuer 5, 6, 7, 8, 9 ?

▪ Les notions de doubles et moitiés, de triple et de tiers dès le CE1

Exemple : Je possède un paquet de 14 billes et je veux en donner autant à Marie, Pierre, Julien. Combien de billes pourra recevoir chaque enfant ?

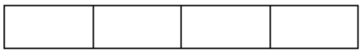
L'élève devra se positionner sur a=2q ; a=3q mais aussi sur les restes possibles.

▪ La multiplication au CE2 permet de comprendre la notion de division exacte.



$7 \times 4 = 28$

et



$4 \times ? = 28$

Au CM, pour que la notion de division apparaisse, il est nécessaire qu'une contrainte forte soit à surmonter (dividende ou diviseur ne permettant pas de calculs rapides ou des solutions instantanées)

Exemple 1

Une colonie de vacances achète des jeux pour les enfants : le vendeur envoie une facture de 500€ pour 76 jeux. Quel est le prix d'un jeu ?

On peut utiliser une méthode additive et soustractive.
une méthode intuitive (par essais)

Exemple 2

Avec un sac de 1000 billes, combien peut-on créer de sacs de 12 billes ?

Les procédures additives et soustractives sont longues (82 itérations successives)
C'est le mode multiplicatif qui va permettre une approche de la réponse.
Exemples :
12 x 20 = 240
12 x 60 = 720
12 x 90 = 1080
12 x 80 = 960 Le nombre de sacs est compris entre 80 et 90

12 x 85 = 1020
12 x 84 = 1008
12 x 83 = 996 Il faut ensuite interpréter le résultat

Si les nombres sont relativement grands sans être complexes, les élèves peuvent évoluer de procédures additives et soustractives à des procédures par encadrements.

Principales difficultés rencontrées par les élèves

1- La technique usuelle nécessite l'emploi simultané de plusieurs opérations (division, multiplication, soustraction)
2- Elle demande une bonne aisance du calcul mental et une parfaite connaissance des tables de multiplication
3- Elle oblige au maintien en mémoire de nombreux résultats partiels.
4- Si on ne pose pas les soustractions partielles, celles-ci peuvent faire intervenir des retenues supérieures à 1, ce qui est inhabituel pour les élèves.
5- Les chiffres écrits successivement pour constituer le quotient sont le résultat d'une approximation ("en ...combien de fois...") qui peut conduire à essayer un chiffre erroné donc provisoire. La division est la seule opération dans laquelle un chiffre calculé peut ne pas être définitif.