Fiches brevet

Résumé de cours

et

Exemples

CALCUL SUR LES FRACTIONS

Fractions égales

On obtient une fraction égale en multipliant (ou en divisant) numérateur et dénominateur par un même nombre non nul : pour tous nombres a, b, k (avec b et k non nuls)

- $\frac{a}{b} = \frac{a \times k}{b \times k}$
- $\frac{a}{b} = \frac{a \div k}{b \div k}$

Exemple : simplification de fractions

- $\frac{25}{75} = \frac{25 \div 25}{75 \div 25} = \frac{1}{3}$
- $\frac{35}{42} = \frac{35 \div 7}{42 \div 7} = \frac{5}{6}$

Position du signe "−"

Pour tous nombres entiers a et b (avec $b \neq 0$) on a $\frac{-a}{b} = \frac{a}{-b} = -\frac{a}{b}$ et $\frac{-a}{-b} = \frac{a}{b}$

Addition, soustraction

Pour tous nombres entiers a, b, c ($c \neq 0$), on a : $\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}$ et $\frac{a}{c} - \frac{b}{c} = \frac{a-b}{c}$

Exemples : les deux fractions ont le même dénominateur

- $\frac{5}{7} + \frac{8}{7} = \frac{5+8}{7} = \frac{13}{7}$
- $\frac{15}{11} - \frac{8}{11} = \frac{15-8}{11} = \frac{7}{11}$

Exemples : les deux fractions n'ont pas le même dénominateur

On commence alors par réduire les deux fractions au même dénominateur :

- $\frac{5}{6} + \frac{7}{3} = \frac{5}{6} + \frac{14}{6} = \frac{19}{6}$
- $\frac{5}{6} - \frac{7}{8} = \frac{20}{24} - \frac{21}{24} = \frac{-1}{24}$

Multiplication

Pour tous nombres entiers a, b, c et d (avec $b, d \neq 0$), on a : $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{a \times c}{b \times d}$

Exemples :

- $5 \times \frac{2}{3} = \frac{5}{1} \times \frac{2}{3} = \frac{5 \times 2}{1 \times 3} = \frac{10}{3}$
- $\frac{5}{4} \times \frac{7}{3} = \frac{5 \times 7}{4 \times 3} = \frac{35}{12}$
- **Simplifiez avant** d'effectuer les produits : $\frac{15}{11} \times \frac{33}{25} = \frac{15 \times 33}{11 \times 25} = \frac{5 \times 3 \times 11 \times 3}{11 \times 5 \times 5} = \frac{9}{5}$

Inverse, division

Soient a, b, c et d quatre nombres entiers (avec $b, c, d \neq 0$) :

- L'**inverse** de la fraction $\frac{c}{d}$ est $\frac{d}{c}$
- Diviser par une fraction revient à multiplier par l'inverse de cette fraction : $\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c}$

Exemples :

- $5 \div \frac{2}{3} = 5 \times \frac{3}{2} = \frac{15}{2}$
- $\frac{5}{4} \div 3 = \frac{5}{4} \div \frac{3}{1} = \frac{5}{4} \times \frac{1}{3} = \frac{5}{12}$
- $\frac{4}{15} \div \frac{12}{35} = \frac{4}{15} \times \frac{35}{12} = \frac{4 \times 35}{15 \times 12} = \frac{4 \times 5 \times 7}{3 \times 5 \times 3 \times 4} = \frac{7}{3 \times 3} = \frac{7}{9}$

Calcul sur les puissances

Définitions

Soit n un entier naturel, soit a un nombre non nul quelconque : alors on définit

$$a^n = \underbrace{a \times a \times a \times \cdots \times a}_{\text{n facteurs}} \quad \text{et} \quad a^{-n} = \frac{1}{a^n} = \frac{1}{\underbrace{a \times a \times a \times \cdots \times a}_{\text{n facteurs}}} \quad (\text{On pose } a^0 = 1)$$

Exemples : • $4^3 = 4 \times 4 \times 4 = 64$ • $3^{-2} = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}$ • $2^{10} = \underbrace{2 \times 2 \times \cdots \times 2}_{\text{10 facteurs}} = 1024$

Cas particulier : les puissances de 10

Si n est un nombre entier positif, $10^n = 1\underbrace{00\ldots0}_{\text{n zéros}}$ et $10^{-n} = \underbrace{0,0\ldots0}_{\text{n zéros}}1$

Exemples : • $10^5 = 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 = 100\,000$ • $10^{-4} = \frac{1}{10^4} = \frac{1}{10\,000} = 0,0001$

Opérations sur les puissances

Si a est un nombre non nul quelconque, n et p deux nombres entiers (positifs ou négatifs) :

Multiplication : $a^n \times a^p = a^{n+p}$ **Inverse :** $\frac{1}{a^n} = a^{-n}$

Division : $\frac{a^n}{a^p} = a^{n-p}$ **Exponientiation :** $(a^n)^p = a^{n \times p}$

Exemple : $\frac{(7^4)^2 \times 7^{-2}}{7^4} = \frac{7^{4\times2} \times 7^{-2}}{7^4} = \frac{7^8 \times 7^{-2}}{7^4} = \frac{7^{8-2}}{7^4} = \frac{7^6}{7^4} = 7^{6-4} = 7^2 = 49$

Propriétés

Si a et b sont des nombres non nul quelconque, n un nombre entier (positif ou négatif) : $(a \times b)^n = a^n \times b^n$ et $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$

Exemples : • $20^4 = (2 \times 10)^4 = 2^4 \times 10^4 = 16 \times 1\,000 = 16\,000$ • $\left(\frac{-3}{2}\right)^3 = \frac{(-3)^3}{2^3} = \frac{-27}{8}$

Ecriture scientifique

Tout nombre décimal peut s'écrire de manière unique sous la forme $a \times 10^n$, où a est un nombre décimal compris entre 1 et 10 (10 exclus), et où n est un nombre entier relatif.

Exemples : • $752\,000 = 7,52 \times 10^5$ • $0,0051 = 5,1 \times 10^{-3}$ • $21 \times 10^3 = 2,1 \times 10^4$

Un exercice-type :

Donner l'écriture décimale et scientifique du nombre $A = \frac{70 \times 10^3 \times 2 \times 10^{-5}}{2,8 \times 10^{-4}}$

$$A = \frac{70 \times 10^3 \times 2 \times 10^{-5}}{2,8 \times 10^{-4}} = \frac{70 \times 2}{2,8} \times \frac{10^3 \times 10^{-5}}{10^{-4}} = \frac{140}{2,8} \times \frac{10^{-2}}{10^{-4}} = 50 \times 10^2 = 5\,000 = 5 \times 10^3$$

Racines carrées

Définition

Soit a un nombre **positif** ; il existe un unique nombre **positif** dont le carré est égal à a. Ce nombre est appelé **racine carrée de** a, et se note $\sqrt{a}$.

Exemples : • $\sqrt{9} = 3$ • $\sqrt{25} = 5$ • $\sqrt{100} = 10$

Les nombres dont la racine carrée est un nombre entier sont appelés **carrés parfaits** ; en voici la liste des quinze premiers :

a	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100	121	144	169	196	225
$\sqrt{a}$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15

Propriétés

- Pour tout nombre a positif, $\left(\sqrt{a}\right)^2 = a$
- Pour tout nombre a, $\sqrt{a^2} = a$ si a est positif, $\sqrt{a^2} = -a$ si a est négatif
- Pour tous nombres a et b positifs, $\sqrt{a \times b} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$
- Pour tous nombres a et b positifs ($b \neq 0$), $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$

Exemples :

• $\sqrt{7}^2 = 7$ • $\sqrt{4^2} = 4$ • $\sqrt{(-5)^2} = 5$ • $\sqrt{\frac{9}{16}} = \frac{\sqrt{9}}{\sqrt{16}} = \frac{3}{4}$ • $\frac{\sqrt{48}}{\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{48}{3}} = \sqrt{16} = 4$

• $\sqrt{900} = \sqrt{9 \times 100} = \sqrt{9} \times \sqrt{100} = 3 \times 10 = 90$ • $\sqrt{0,16} = \sqrt{\frac{16}{100}} = \frac{\sqrt{16}}{\sqrt{100}} = \frac{4}{10} = 0,4$

• $5\sqrt{3}^2 = 5 \times 3 = 15$ • $\left(2\sqrt{6}\right)^2 = 2^2 \times \left(\sqrt{6}\right)^2 = 4 \times 6 = 24$

• $\sqrt{50} = \sqrt{25 \times 2} = \sqrt{25} \times \sqrt{2} = 5\sqrt{2}$ • $\sqrt{2} \times \sqrt{18} = \sqrt{2 \times 18} = \sqrt{36} = 6$

⚠ **Attention !** En général, $\sqrt{a+b} \neq \sqrt{a} + \sqrt{b}$, comme le montre l'exemple suivant : $\sqrt{16} + \sqrt{9} = 4 + 3 = 7$ mais $\sqrt{16+9} = \sqrt{25} = 5$

Utiliser les identités remarquables :

$\left(3 + 2\sqrt{5}\right)^2 = (3)^2 + 2 \times 3 \times 2\sqrt{5} + \left(2\sqrt{5}\right)^2 = 9 + 12\sqrt{5} + 20 = 29 + 12\sqrt{5}$

Eliminer le radical du dénominateur d'une écriture fractionnaire :

• $\frac{10}{\sqrt{5}} = \frac{10 \times \sqrt{5}}{\sqrt{5} \times \sqrt{5}} = \frac{10\sqrt{5}}{5} = 2\sqrt{5}$ • $\frac{1}{\sqrt{2}-1} = \frac{1 \times (\sqrt{2}+1)}{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)} = \frac{\sqrt{2}+1}{\left(\sqrt{2}\right)^2 - 1^2} = \frac{\sqrt{2}+1}{1}$

Simplifier une expression contenant des radicaux :

Ecrire sous la forme $a\sqrt{3}$ l'expression $\sqrt{75} - 6\sqrt{27} + 7\sqrt{300}$

$$\begin{aligned}
\sqrt{75} - 6\sqrt{27} + 7\sqrt{300} &= \sqrt{25 \times 3} - 6\sqrt{9 \times 3} + 7\sqrt{100 \times 3} \\
&= 5\sqrt{3} - 6 \times 3\sqrt{3} + 7 \times 10\sqrt{3} \\
&= 5\sqrt{3} - 18\sqrt{3} + 70\sqrt{3} \\
&= (5 - 18 + 70)\sqrt{3} \\
&= 57\sqrt{3}
\end{aligned}$$

ARITHMÉTIQUE

Diviseur, multiple

Soient a et b deux nombres entiers positifs non nuls. On dira que a est un **diviseur** de b, ou que b est **divisible** par a, ou encore que b est un **multiple** de a s'il existe un nombre entier k tel que $b = k \times a$

Exemples : • 15 est un multiple de 3 (car $15 = 5 \times 3$) • 42 est divisible par 7

Critères de divisibilité

- Un nombre est **divisible par 2** s'il se termine par 2, 4, 6, 8 ou 0.
- Un nombre est **divisible par 3** si la somme de ses chiffres est un multiple de 3.
- Un nombre est **divisible par 4** si ses deux derniers chiffres forment un multiple de 4.
- Un nombre est **divisible par 5** s'il se termine par 0 ou 5.
- Un nombre est **divisible par 9** si la somme de ses chiffres est un multiple de 9.

Exemples : • 180 est divisible par 2, 3, 4, 5 et 9 • 105 est divisible par 3 et 5

Plus Grand Commun Diviseur (PGCD)

Si a et b sont deux nombres entiers positifs, on note PGCD(a ;b) le **plus grand diviseur qui soit commun à a et à b.**

Déterminer le PGCD de deux nombres en écrivant la liste de leurs diviseurs :

On cherche PGCD(72 ;40). On écrit la liste complète des diviseurs de ces deux nombres : Les diviseurs de 40 sont 1, 2, 4, 5, $\boxed{8}$, 10, 20 et 40. Ceux de 72 sont 1, 2, 3, 4, 6, $\boxed{8}$, 9, 12, 18, 24, 36 et 72. On en déduit que PGCD(72 ;40)=8

Déterminer le PGCD de deux nombres par soustractions successives :

On cherche PGCD(72 ;40).

$72 - 40 = 32 \quad 40 - 32 = 8 \quad 32 - 8 = 24 \quad 24 - 8 = 16 \quad 16 - 8 = 8 \quad 8 - 8 = 0$

On a donc PGCD(72 ;40)=8

Déterminer le PGCD par l'algorithme d'Euclide

Dividende	Diviseur	Quotient	Reste
72	40	1	32
40	32	1	$\boxed{8}$
32	8	4	0

On cherche PGCD(72 ;40). Le PGCD est le dernier reste non nul, c'est-à-dire PGCD(72 ;40)=8.

Nombres premiers entre eux et fractions irréductibles

Deux nombres a et b sont dits **premiers entre eux** si PGCD(a ;b)=1.
Si a et b sont premiers entre eux, alors la fraction $\frac{a}{b}$ est **irréductible**.

Simplifier une fraction pour la rendre irréductible

Si on simplifie une fraction $\frac{a}{b}$ par le PGCD de a et de b, alors on obtient une fraction irréductible.
Par exemple : PGCD(72 ;40)=8 nous permet de rendre irréductible $\frac{40}{72} = \frac{40 \div 8}{72 \div 8} = \frac{5}{9}$

CALCUL LITTÉRAL

1. Réduire une expression littérale :

Exemples :
- $2x + 5x = (2+5)x = 7x$
- $x + 6x = 1x + 6x = 7x$
- $2x \times 5x = 10x^2$
- $2x - 5x = (2-5)x = -3x$
- $x - \frac{2}{3}x = \frac{3}{3}x - \frac{2}{3}x = \frac{1}{3}x$
- $(3x)^2 = 9x^2$

2. Enlever des parenthèses précédées d'un signe + ou − :

Règle d'omission des parenthèses

Si une parenthèse est précédée d'un signe +, alors on peut supprimer ces parenthèses en conservant les signes intérieurs à cette parenthèse.
Si une parenthèse est précédée d'un signe −, alors on peut supprimer ces parenthèses en changeant les signes intérieurs à cette parenthèse.

Exemples :
- $2+(x+5) = 2+x+5$
- $2-(x+5) = 2-x-5$
- $2+(x-5) = 2+x-5$
- $2-(x-5) = 2-x+5$

3. Développer une expression littérale :

Développer un produit signifie le transformer en somme algébrique.

Règles de développement

Distributivité simple :

$k(a+b) = ka + kb$
$k(a-b) = ka - kb$

Distributivité double :

$(a+b)(c+d) = ac + ad + bc + bd$

Identités remarquables :

$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \qquad (a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 \qquad (a+b)(a-b) = a^2 - b^2$

Exemples :
- $2(x+5) = 2 \times x + 2 \times 5 = 2x + 10$
- $(x+2)(2x-5) = x \times 2x - x \times 5 + 2 \times 2x - 2 \times 5 = 2x^2 - 5x + 4x - 10 = 2x^2 - x - 10$
- $(1+5x)^2 = 1^2 + 2 \times 1 \times 5x + (5x)^2 = 1 + 10x + 25x^2$

4. Factoriser une expression littérale :

Factoriser une somme algébrique signifie la transformer en produit.

Règles de factorisation

Facteur commun :

$ka + kb = k(a+b) \qquad ka - kb = k(a-b)$

Identités remarquables :

$a^2 + 2ab + b^2 = (a+b)^2 \qquad a^2 - 2ab + b^2 = (a-b)^2 \qquad a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$

Exemples :
- $3x + 3y = 3(x+y)$
- $4a^2 - 3a = 4a \times a - 3a = a(4a-3)$
- $(2x+1)(x-3) - (6x-5)(2x+1) = (2x+1)[(x-3) - (6x-5)] = (2x+1)(-5x+2)$
- $4x^2 - 20x + 25 = (2x)^2 - 2(2x)(5) + (5)^2 = (2x-5)^2$
- $(x+2)^2 - 81 = (x+2)^2 - 9^2 = (x+2-9)(x+2+9) = (x-7)(x+11)$

Equations & inéquations

Définitions

Une **équation** est une égalité dans laquelle intervient un nombre inconnu, représenté par une lettre, appelée **inconnue** de l'équation.
Une **solution** de cette équation est une valeur de l'inconnue pour laquelle l'égalité est vraie. **Résoudre** une équation, c'est en trouver **toutes** les solutions.

Exemple : • -4 est une solution de l'équation $-3x-5=7$ car, lorsque je remplace l'inconnue x par -4 dans l'équation, l'égalité est vérifiée : $(-3)(-4)-5=12-5=7$
•mais 2 n'est pas une solution de l'équation $-3x-5=7$ car, lorsque je remplace x par 2, l'égalité n'est pas vérifiée : $(-3)\times 2-5=-6-7=-11\neq 5$

Règles de calcul sur les égalités

Règle n°1 : On ne change pas l'ensemble des solutions d'une équation en **ajoutant (ou retranchant) un même nombre aux deux membres** de l'équation.
Règle n°2 : On ne change pas l'ensemble des solutions d'une équation en **multipliant (ou divisant) les deux membres** de l'équation **par un même nombre non nul**.

Exemple : Résolvons l'équation $-3x-5=7$:

1. On utilise d'abord la **règle 1**, en ajoutant 5 aux deux membres de l'équation : $-3x-5\underline{+5}=7\underline{+5}$, c'est-à-dire $-3x=12$.
2. On utilise ensuite la **règle 2**, en divisant par -3 chaque membre de l'équation : $\frac{-3x}{-3}=\frac{12}{-3}$, c'est à dire $x=-4$.
3. On conclut : l'équation $-3x-5=7$ admet pour unique solution le nombre -4.

Définition

Une **équation-produit** est une équation qui s'écrit sous la forme $(ax+b)(cx+d)=0$ (*il peut y avoir plus de deux facteurs*)

Règle du produit nul

Un produit de facteurs est nul si, et seulement si, au moins l'un des facteurs est nul. Autrement dit, dire que "$AB=0$" équivaut à dire que "$A=0$ ou $B=0$".

Exemple : résolvons l'équation $(3x-7)(2x+5)=0$;
Un produit de facteurs est nul si, et seulement si, au moins l'un des facteurs est nul.
$3x-7=0$ ou $2x+5=0$
$3x=7$ ou $2x=-5$
$x=\frac{7}{3}$ ou $x=-\frac{5}{2}$
Ainsi, l'équation $(3x-7)(2x+5)=0$ admet deux solutions, qui sont $\frac{7}{3}$ et $-\frac{5}{2}$

Définitions

Une **inéquation** est une inégalité dans laquelle intervient un nombre inconnu, représenté par une lettre, appelée **inconnue** de l'inéquation.
Une **solution** de cette inéquation est une valeur de l'inconnue pour laquelle l'inégalité est vraie. **Résoudre** une inéquation, c'est en trouver **toutes** les solutions.

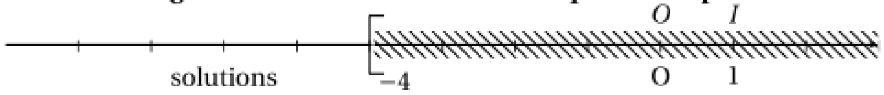
Exemples : $-3x-5>7$ est une inéquation, dont le **premier membre** est $-3x-5$, et dont le **second membre** est 7.
• -6 est une solution de l'inéquation $-3x-5>7$ car, lorsque je remplace l'inconnue x par -6 dans l'inéquation, l'inégalité est vérifiée : $(-3)(-6)-5=18-5=13>7$
• -10 est une autre solution de cette inéquation car, lorsque je remplace l'inconnue x par -10 dans l'inéquation, l'inégalité est vérifiée : $(-3)(-10)-5=30-5=25>7$
• 2 n'est pas une solution de l'inéquation $-3x-5>7$ car, lorsque je remplace x par 2, l'inégalité n'est pas vérifiée : $(-3)\times 2-5=-6-5=-11\not> 5$!!

Règles de calcul sur les inégalités

Règle n°1 : On ne change pas l'ensemble des solutions d'une inéquation en **ajoutant (ou retranchant) un même nombre aux deux membres** de l'inéquation.
Règle n°2 : On ne change pas l'ensemble des solutions d'une inéquation en **multipliant (ou divisant) les deux membres** de l'inéquation **par un même nombre strictement positif**.
Règle n°3 : On ne change pas l'ensemble des solutions d'une inéquation en **multipliant (ou divisant) les deux membres** de l'inéquation **par un même nombre strictement négatif**, à condition de **changer le sens de l'inégalité**.

Exemple : Résolvons l'inéquation $-3x-5>7$

1. On utilise d'abord la **règle 1**, en ajoutant 5 aux deux membres de l'inéquation : $-3x-5\underline{+5}>7\underline{+5}$, qui donne $-3x>12$.
2. On utilise ensuite la **règle 3**, en divisant par -3 chaque membre de l'inéquation, **sans oublier de changer le sens de l'inégalité** (*car* -3 *est négatif*) : $\frac{-3x}{-3}<\frac{12}{-3}$ qui donne $x<-4$.
3. On conclut par une phrase : l'inéquation $-3x-7>5$ admet pour solutions les nombres strictement inférieurs à -4.
4. On peut représenter l'ensemble des solutions sur un axe, en **hachurant la partie de la droite graduée constituée des nombres qui ne sont pas solutions** :



⚠ **Attention au sens du crochet** ! Le crochet n'est pas tourné vers les solutions, car -4 n'est pas solution de l'inéquation $-3x-7>5$.

Proportionnalité

Deux suites sont proportionnelles, si:
> sur un tableau, on passe de l'une à l'autre en multipliant ou en divisant par un même nombre.
> sur un graphique, tous les points sont alignés avec l'origine.

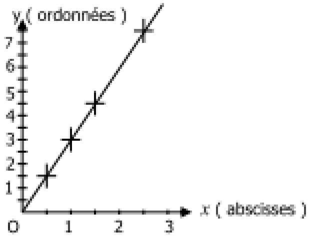
Exemple :

x (abscisse)	0,5	1	1,5	2,5
y (ordonnée)	1,5	3	4,5	7,5

× 3

$\dfrac{\text{nombre d'en bas}}{\text{nombre d'en haut}} = \dfrac{1,5}{0,5} = \dfrac{3}{1} = \dfrac{4,5}{1,5} = \dfrac{7,5}{2,5} = 3$

Ce nombre « constant » (toujours le même) est le **coefficient de proportionnalité**.



<u>La règle de trois</u> (4ème proportionnelle)

<u>Exemple</u> : Un automobiliste a consommé 8 litres d'essence pour un parcours de 150 km.
Quelle distance peut-il parcourir avec 12 L ?

8 L ⟶ 150 Km
12 L ⟶ ? Km

Consommation (en l)	8	12
Distance parcourue (en km)	150	?

$? = \dfrac{\textbf{produit de la grande diagonale}}{\textbf{nombre qui reste}} = \dfrac{150 \times 12}{8} = 225$ km

GRANDEURS COMPOSEES

Une grandeur quotient est une grandeur obtenue en faisant le quotient de deux grandeurs .

- <u>masse volumique</u> - la masse volumique de l' or est de 19,3 g / cm^3 , ça signifie que 1 cm^3 d' or pèse 19,3 g.

volume (cm^3)	1	...
masse (g)	19,3	...

× masse volumique (g/ cm^3)

- <u>débits</u> - La Seine a un débit de 400 m^3/ s , ça signifie que, il s' écoule 400 m^3 d' eau en 1 seconde .

Temps (s)	1	...
volume (m^3)	400	...

× débit (m^3/s)

-

$\boxed{\textbf{échelle} = \dfrac{\text{distance sur le dessin}}{\text{distance réelle (}\textit{même unité}\text{)}}}$

Une carte routière est à l'échelle $\dfrac{1}{1\ 000}$.

Ca signifie qu' une distance de 1 000 cm en distance réelle est représenté par 1 cm sur la carte.

distance réelle (cm)	1000	...
distance sur la carte (cm)	1	...

× échelle

échelle < 1 → réduction
échelle = 1 → reproduction grandeur nature
échelle > 1 → agrandissement

VITESSES - TEMPS

<u>> unités de temps - conversions</u>

1h = 60min = 3600s

1min = 60s = $\dfrac{1}{60}$ h

1s = $\dfrac{1}{60}$ min = $\dfrac{1}{3600}$ h

3 h 33 min = 3 × 60 min + 33 min = 213 min

855 min = 14 × 60 min + 15 min
= 14 h 15 min

$\begin{array}{r|l} 855 & 60 \\ \hline & 14 \\ 15 & \end{array}$

5,8 h = 5 h + 0,8 h
= 5 h + 0,8 × 60 min
= 5h 48 min

2h24 min = 2h + 24min
= 2h + 24 × $\dfrac{1}{60}$ h
= 2h +0,4h
= 2,4 h

<u>> vitesse moyenne</u>

Une voiture roule à la vitesse moyenne de 60 km/h .
Ca signifie qu' elle parcourt 60 km en 1 h.

temps (h)	1	...
distance (km)	60	...

× vitesse (km/ h)

<u>FORMULES</u> $\boxed{V = \dfrac{D}{T}}$ $\boxed{D = VT}$ $\boxed{T = \dfrac{D}{V}}$

vitesse V , distance D , temps T

<u>exemple</u> :
Une voiture met 2h30min pour parcourir 200 km

- **vitesse moyenne** 2h30min = 2,5h

$V_{(\text{km/h})} = \dfrac{D_{(\text{km})}}{T_{(\text{h})}} = \dfrac{200\text{km}}{2,5\text{h}} = 80$ km/h

- **distance parcourue en 1h30min** (= 1,5 h)

$D_{(\text{km})} = V_{(\text{km/h})} \times T_{(\text{h})} = 80\text{km/h} \times 1,5\text{h} = 120$ km

- **temps pour parcourir 540 km** ?

$T_{(\text{h})} = \dfrac{D_{(\text{km})}}{V_{(\text{km/h})}} = \dfrac{540\text{ km}}{80\text{ km/h}} = 6,75\text{h} = 6\text{h}45\text{min}$

- **conversion**

80 km/h = $\dfrac{80\text{ km}}{1\text{ h}} = \dfrac{80000\text{ m}}{3600\text{ s}} \approx 22,2$ m/s

Fonctions linéaires

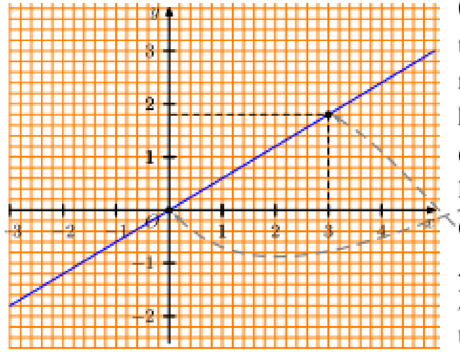
Définition : fonction linéaire

Soit a un nombre quelconque « fixe ».
Si, à chaque nombre x, on peut associer son produit par a (c'est à dire $y = a \times x$), alors on définit **la fonction linéaire** de **coefficient** a, que l'on notera $f : x \longmapsto ax$
Une fonction linéaire de coefficient a représente une situation de **proportionnalité** (dans laquelle le coefficient de proportionnalité est égal à a).
Pour calculer l'image d'un nombre, on le multiplie par a.

Représentation graphique

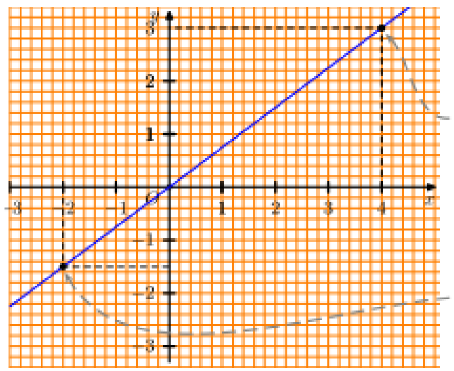
Dans un repère, la représentation graphique d'une fonction linéaire de coefficient a est une **droite passant par l'origine du repère**.

► Représenter graphiquement une fonction linéaire



Ci-contre est représentée graphiquement la fonction linéaire f de coefficient 0,6, que l'on peut noter $f : x \mapsto 0,6x$. Comme f est une fonction linéaire, sa représentation graphique est une droite qui passe par $\boxed{\text{l'origine du repère}}$.
De plus, pour trouver un second point de cette droite, on peut calculer l'image de 3 : $f(3) = 0,6 \times 3 = 1,8$.
Je place $\boxed{\text{le point de coordonnées } (3; 1,8)}$ et je trace la droite.

► Exploiter la représentation graphique d'une fonction linéaire



Ci-contre est représentée graphiquement une fonction linéaire. Pour lire graphiquement l'image du nombre 4, on repère $\boxed{\text{le point de la droite dont l'}\textbf{abscisse}\text{ est 4}}$, puis on lit l'**ordonnée** de ce point. Ici, on peut lire que **l'image de 4 est 3**
Pour lire graphiquement le nombre dont l'image est -1.5 , on repère $\boxed{\text{le point de la droite dont l'}\textbf{ordonnée}\text{ est } -1.5}$, puis on lit l'**abscisse** de ce point. Ici, on voit que **le nombre dont l'image est $-1,5$ est -2.**

FONCTIONS AFFINES

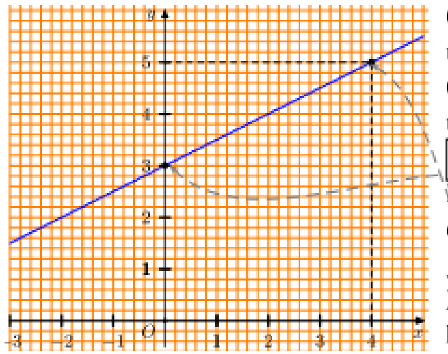
Définition : fonction affine

Soient a et b deux nombres quelconques « fixes ».
Si, à chaque nombre x, on peut associer le nombre $ax+b$, alors on définit **une fonction affine**, que l'on notera $f : x \longmapsto ax+b$.
On dit que $x \mapsto ax$ est la **fontion linéaire associée** à la fonction affine $x \mapsto ax+b$
Pour calculer l'image d'un nombre, on le multiplie par a, puis on ajoute b.
Remarque : Lorsque $b=0$ On obtient $f : x \mapsto ax$, c'est à dire une fonction **linéaire**.

Représentation graphique

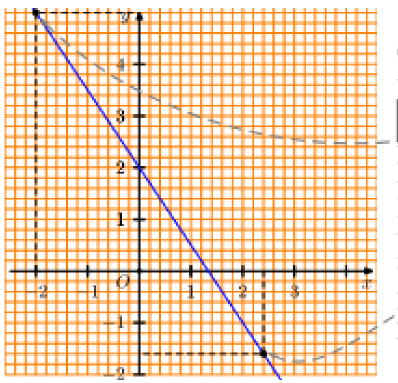
Dans un repère, la représentation graphique d'une fonction affine est une **droite** :
- passant par le point de coordonnées $(0;b)$
- qui est parallèle à la droite représentant la fonction linéaire associée

▶ Représenter graphiquement une fonction affine



Ci-contre est représentée graphiquement la fonction affine $f : x \mapsto 0,5x+3$
Comme f est une fonction affine, sa représentation graphique est une droite qui passe par $\boxed{\text{le point de coordonnées } (0;3)}$.
De plus, pour trouver un second point de cette droite, on calcule - par exemple - l'image de 4 : $f(4) = 0,5\times 4+3 = 5$.
Je place $\boxed{\text{le point de coordonnées } (4;5)}$ et je trace la droite.

▶ Exploiter la représentation graphique d'une fonction affine



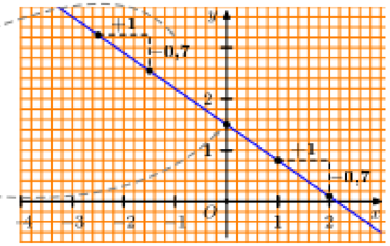
Ci-contre est représentée graphiquement une fonction affine. Pour lire l'image du nombre -2, on repère $\boxed{\text{le point de la droite dont l'}\textbf{abscisse}\text{ est } -2}$, puis on lit l'**ordonnée** de ce point.
Ici, on peut lire que **l'image de -2 est** 5.
Pour trouver le nombre dont l'image est $-1,6$, on repère $\boxed{\text{le point de la droite dont l'}\textbf{ordonnée}\text{ est } -1,6}$, puis on lit l'**abscisse** de ce point. Ici, on peut lire que **le nombre dont l'image est $-1,6$ est 2,4.**

Equation de droite, coefficient directeur, ordonnée à l'origine

Soit (d) la droite qui représente la fonction affine $f : x \longmapsto ax+b$.
On dit alors que a est **le coefficient directeur** de la droite (d), que b est **l'ordonnée à l'origine**, et que $y = ax+b$ est une **équation de la droite** (d).

▶ Interprétation graphique du coefficient directeur :

Soit (d) la droite qui représente graphiquement la fonction affine $x \longmapsto -0,7x+1,5$; le **coefficient directeur** de la droite (d) est donc $\boxed{-0,7}$, son **ordonnée à l'origine** est $\boxed{1,5}$ et son **équation** est $y = -0,7x+1,5$.
Graphiquement, voici comment lire le coefficient directeur et l'ordonnée à l'origine :



Proportionnalité des accroissements

Soit f une fonction affine $x \mapsto ax+b$. Les accroissements de $f(x)$ sont proportionnels aux accroissements de x, et le coefficient de proportionnalité est a.

x	-1	5
$f(x)$	5	2

$+6$; -3

Exemple : Lorsque la variable x augmente de 6 unités $(+6)$, $f(x)$ diminue de 3 unités (-3). Comme les accroissements de $f(x)$ sont proportionnels aux accroissements de x, et le coefficient de proportionnalité est a, on peut en déduire que $a = \frac{-3}{6} = -0,5$.

▶ Déterminer l'expression d'une fonction affine, lorsqu'on connaît deux nombres et leurs images

On veut déterminer la fonction affine $f : x \longmapsto ax+b$ vérifiant $f(-1)=5$ et $f(5)=2$

Méthode n°1 :
De $f(-1)=5$ on tire l'égalité $\boxed{-a+b=5}$
et de $f(5)=2$ on tire $\boxed{5a+b=2}$
On soustrait membre à membre les deux égalités : $(-a+b)-(5a+b) = 5-2$,
ce qui donne $-6a = 3$,
qui donne $\boxed{a = \frac{3}{-6} = -0,5}$.
On reprend l'égalité $-a+b=5$ pour trouver la valeur de b, en remplaçant a par $-0,5$:
cela donne $-(-0,5)+b=5$,
c'est-à-dire $0,5+b=5$
qui nous donne $\boxed{b = 5-0,5 = 4,5}$
En conclusion, la fonction affine recherchée est $f : x \longmapsto -0,5x+4,5$.

Méthode n°2 :
On utilise la propriété de proportionnalité des accroissements :

x	-1	5
$f(x)$	5	2

$+6$; -3

Lorsque x augmente de 6, son image diminue de 3 ; on doit donc avoir $\boxed{a = \frac{\text{Variations de } f(x)}{\text{Variations de } x} = \frac{-3}{6} = -0,5}$.
De plus, de $f(-1)=5$ on tire l'égalité $\boxed{-a+b=5}$,
ce qui nous donne, en remplaçant a par sa valeur, $-(-0,5)+b=5$, c'est-à-dire $0,5+b=5$
d'où l'on tire $\boxed{b = 5-0,5 = 4,5}$
En conclusion, la fonction affine recherchée est
$f : x \longmapsto -0,5x+4,5$.

Systèmes

Définition

► Une **équation linéaire à deux inconnues** x et y est une équation qui peut s'écrire sous la forme $ux+vy=w$, où u, v et w sont trois nombres réels.
Un couple $(x_0;y_0)$ de nombres réels sera un **couple solution** de cette équation si, lorsque l'on remplace x par x_0 et y par y_0, l'égalité est vérifiée.
► Un **système de deux équations linéaires à deux inconnues** x et y est un système qui peut s'écrire sous la forme $\begin{cases} ux+\ vy=w \\ u'x+v'y=w' \end{cases}$ où u, v, w, u', v' et w' sont des nombres réels.
Résoudre un tel système consiste à déterminer, s'il y en a, **tous** les couples qui sont solutions des deux équations **à la fois**.

Exemples :

- le couple $(4;1)$ est un couple solution de l'équation $2x-4y=4$, car $2\times4-4\times1=4$
- le couple $(5;2)$ n'est pas un couple solution de l'équation $2x-4y=4$, car $2\times5-4\times2=2\neq4$
- le couple $(4;1)$ n'est pas un couple solution du système $\begin{cases} 2x-4y=4 \\ x-3y=6 \end{cases}$, car $\begin{cases} 24-41=4 \\ 4-31=1\neq6 \end{cases}$

Résolvons par le calcul le système $\boxed{\begin{cases} 2x-4y=4 \\ x-3y=6 \end{cases}}$ de **deux manières** différentes :

Première méthode : substitution

- **Etape 1 :** On exprime, grâce à l'une des deux équations, une inconnue en fonction de l'autre. Ici il est facile d'exprimer x en fonction de y grâce à la seconde équation :
$$\begin{cases} 2x-4y=4 \\ x=3y+6 \end{cases}$$
- **Etape 2 :** On substitue x par $3y+6$ dans la première équation :
$$\begin{cases} 2(3y+6)-4y=4 \\ x=3y+6 \end{cases}$$
- **Etape 3 :** On développe, on réduit et on résout l'équation d'inconnue y ainsi obtenue :
$$\begin{cases} 6y+12-4y=4 \\ x=3y+6 \end{cases}$$
$$\begin{cases} y=-4 \\ x=3y+6 \end{cases}$$
- **Etape 4 :** On remplace y par sa valeur dans la seconde équation pour trouver x
$$\begin{cases} y=-4 \\ x=3(-4)+6 \end{cases}$$
$$\begin{cases} y=-4 \\ x=-6 \end{cases}$$
- **Etape 5 :** On vérifie que les valeurs trouvées pour x et y conviennent :
$$\begin{cases} 2(-6)-4(-4)=4 \\ (-6)-3(-4)=6 \end{cases}$$
- **Etape 6 :** On conclut : le système admet un unique couple solution, qui est $(-6;-4)$.

Statistiques

Calculs de moyennes

► **Si la série est donnée sous la forme d'une liste**

Voici les notes obtenues à un contrôle par les 21 élèves d'une classe :

8 3 14 17 5 12 11 9 10 15 8 19 4 11 6 9 9 10 10 9 14

Pour calculer la moyenne de cette série de notes, on additionne toutes les notes, et on divise par le nombre total de notes :

$$m=\frac{8+3+14+17+5+\cdots+9+10+10+9+14}{21}=\frac{213}{21}\approx10,14$$

► **Si les valeurs de la série sont regroupées dans un tableau avec effectifs**

Voici les notes obtenues à un autre contrôle par les 25 élèves d'une autre classe :

Notes	2	4	6	7	8	9	10	11	12	14	17
Effectif	1	2	1	2	2	3	4	6	2	1	1

La moyenne est alors dite **pondérée par les effectifs**.
Pour calculer cette moyenne, on commence par effectuer les produits des notes par les effectifs associés, puis on additionne tous ces produits, et on divise la somme obtenue par le nombre total de notes :

$$m=\frac{2+4\times2+6+7\times2+8\times2+9\times3+10\times4+11\times6+12\times2+14+17}{25}=\frac{234}{25}=9,36$$

► **Si les valeurs de la série sont regroupées par classes**

Par exemple, voici la répartition des salaires de 200 salariés d'une entreprise :

Salaires	$1000\leqslant S<1200$	$1200\leqslant S<1400$	$1400\leqslant S<1600$	$1600\leqslant S<1800$	$1800\leqslant S<2000$
Centre	1100	1300	1500	1700	1900
Effectif	36	44	64	40	16

On considère alors qu'une classe donnée sera représentée, dans le calcul, par son centre, et on utilise le centre de la classe pour calculer la moyenne pondérée par les effectifs ; on obtient une valeur approchée du salaire moyen réel.

$$m=\frac{1100\times36+1300\times44+1500\times64+1700\times40+1900\times16}{200}=\frac{291200}{200}=1456$$

Médiane d'une série statistique

La **médiane** $\mathcal{M}$ d'une série statistique est la valeur qui partage la population étudiée en deux sous-groupes de même effectif, chacun tels que :

- tous les éléments du 1^{er} groupe on des valeurs inférieures ou égales à $\mathcal{M}$;
- tous les éléments du $2^{\text{ème}}$ groupe ont des valeurs supérieures ou égales à $\mathcal{M}$.

La médiane et la moyenne sont (en général) **différentes**.

Détermination de la médiane d'une série statistique

► A partir d'un tableau d'effectifs cumulés ou de fréquences cumulées

Voici la série des notes obtenues à un contrôle par les 25 élèves d'une classe :

Notes	2	4	6	7	8	9	10	11	12	14	17
Effectif	1	2	1	2	2	3	4	6	2	1	1
Eff. cum. croissants	1	3	4	6	8	11	15	21	23	24	25

Les notes étant rangées dans l'ordre croissant, la case rouge indique que, de la 12$^{\text{ème}}$ à la 15$^{\text{ème}}$, les notes sont égales à 10.

Or $25 = 12 + 1 + 12$ donc la médiane est la 13$^{\text{ème}}$ note c'est-à-dire 10.

Rang :	1$^{\text{ère}}$	2$^{\text{ème}}$	…	11$^{\text{ème}}$	12$^{\text{ème}}$	13$^{\text{ème}}$	14$^{\text{ème}}$	…	25$^{\text{ème}}$
Notes :	2	4	…	9	10	10	10	…	17
	12 élèves						12 élèves		

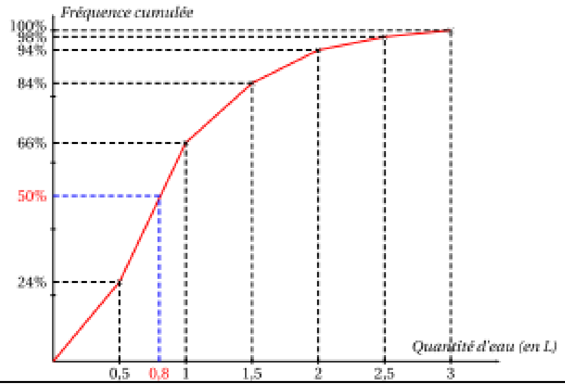
► À partir d'une représentation graphique

Une valeur approchée de la médiane peut être obtenue à l'aide de la courbe polygonale des effectifs cumulés croissants(ECC) ou des fréquences cumulées croissantes (FCC) en lisant la valeur correspondant à la moitié de l'effectif total (ou à une fréquence cumulée égale à 50%) :

À la question "Quelle quantité d'eau buvez-vous par jour?", les cinquante personnes interrogées ont donné des réponses qui ont permis de compléter le tableau suivant :

Quantité d'eau (en L)	[0; 0,5[	[0,5; 1[	[1; 1,5[	[1,5; 2[	[2; 2,5[	[2,5; 3[
Fréquences %	24	42	18	10	4	2
Fréq cumulées croissantes %	24	66	84	94	98	100

La courbe polygonale des effectifs (ou fréquences) cumulés est obtenue en joignant par des segments les points dont l'abscisse est une valeur de la série (ou l'extrémité d'une classe) et dont l'ordonnée est l'effectif (ou la fréquence) cumulé correspondant à cette valeur :

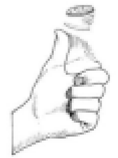


La médiane $\mathcal{M}$ est environ égale à 0,8 L ; en effet, la moitié des personnes interrogées consomme moins de 0,8 L par jour (ou, ce qui revient au même, la moitié des personnes interrogées consomme plus de 0,8 L par jour).

Etendue d'une série statistique

On appelle **étendue** d'une série statistique la différence entre la plus grande valeur de la série et la plus petite. L'étendue est une mesure de **dispersion** des valeurs : plus l'étendue est grande, plus les valeurs sont dispersées.

PROBABILITÉS



PILE ou FACE ?

Quand on tire à Pile ou Face, la pièce a autant de chance de tomber d'un côté que de l'autre, il y a donc une chance sur deux d'obtenir pile, et une chance sur deux d'obtenir face.

Le hasard, ce n'est pas régulier. Une chance sur deux, ce n'est pas une fois sur deux. Mais sur un grand nombre de lancers, il y a de fortes chances qu'il y ait environ une moitié de pile et une moitié de face.

Le calcul des probabilités est la branche des mathématiques qui traite des questions relatives au hasard.

Vocabulaire :

Une **expérience** (lancer un dé par exemple) est **aléatoire** lorsqu'elle a plusieurs résultats ou **issues** (pile ou face) et que l'on ne peut pas prévoir, à priori, quel résultat se produira.

Il y a une chance sur deux d'obtenir face. On dit que la **probabilité** d'obtenir face est $\frac{1}{2}$ qu'on peut exprimer en pourcentages 50 %. La probabilité est **un nombre compris entre 0 et 1**.

$$\boxed{\text{probabilité d'un évènement} = \frac{\text{nombre d'issues favorables}}{\text{nombre de toutes les issues possibles}}}$$

Expérience à une épreuve : tirer une carte dans une jeu de 32 cartes.

32 issues possibles : chaque carte peut être tirée avec la même probabilité $\frac{1}{32}$.

Evènement B : obtenir une dame

7♥	8♥	9♥	10♥	V♥	D♥	R♥	A♥
7♠	8♠	9♠	10♠	V♠	D♠	R♠	A♠
7♦	8♦	9♦	10♦	V♦	D♦	R♦	A♦
7♣	8♣	9♣	10♣	V♣	D♣	R♣	A♣

$P(B) = \frac{4}{32} = \frac{1}{8} = 12{,}5\ \%$

Evènement C : obtenir une dame ou un pique

7♥	8♥	9♥	10♥	V♥	D♥	R♥	A♥
7♠	8♠	9♠	10♠	V♠	D♠	R♠	A♠
7♦	8♦	9♦	10♦	V♦	D♦	R♦	A♦
7♣	8♣	9♣	10♣	V♣	D♣	R♣	A♣

$P(C) = \frac{11}{32} \approx 22{,}2\ \%$

Evènement D : ne pas obtenir une dame

7♥	8♥	9♥	10♥	V♥	D♥	R♥	A♥
7♠	8♠	9♠	10♠	V♠	D♠	R♠	A♠
7♦	8♦	9♦	10♦	V♦	D♦	R♦	A♦
7♣	8♣	9♣	10♣	V♣	D♣	R♣	A♣

$P(D) = \frac{28}{32} = \frac{7}{8} = 87{,}5\ \%$

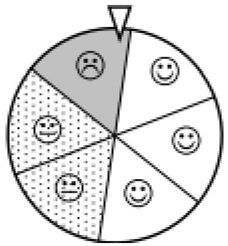
Recours à l'évènement contraire

Evènement D : ne pas obtenir une dame
Evènement B : obtenir une dame

Les évènements B et D sont contraires.
La somme des probabilités de deux évènements contraires est égale à 1.

Or $P(B) = \frac{1}{8}$ donc $P(D) = 1 - \frac{1}{8} = \frac{7}{8} = 87{,}5\ \%$

Expérience à une épreuve : choisir une humeur en faisant tourner la roue.



3 issues possibles : ☺ , 😐 , ☹.

A : être de bonne humeur ☺ : $P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} = 50\ \%$

B : être d'humeur moyenne 😐 : $P(B) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} \approx 33\ \%$

C : être de mauvaise humeur ☹ : $P(C) = \frac{1}{6} \approx 17\ \%$

D : ne pas être de mauvaise humeur

1$^{\text{ère}}$ méthode :

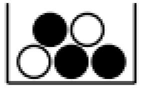
$P(D) = P(A) + P(B) = \frac{3}{6} + \frac{2}{6} = \frac{5}{6} \approx 83\ \%$

2$^{\text{ème}}$ méthode :

recours à l'évènement contraire

$P(D) = 1 - P(C) = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6} \approx 83\ \%$

Expérience à deux épreuves : tirage de deux boules avec remise.



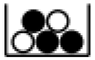
Une urne contient 3 boules noires et 2 boules blanches.
On tire successivement 2 boules **avec remise**.

Dans un arbre des possibles, la probabilité d'une issue auquel conduit un chemin est égal au produit des probabilités rencontrées le long de ce chemin.

arbre des possibles

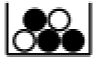
Au 1er tirage

P_1(○) = 2/5
P_1(●) = 3/5

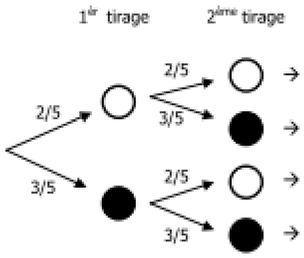


Au 2ème tirage

Puisqu'on remet dans l'urne la boule tirée au 1er tirage, on est dans la même situation qu'au 1er tirage .



P_2(○) = 2/5
P_2(●) = 3/5



→ P(○,○) = $\frac{2}{5} \times \frac{2}{5} = \frac{4}{25}$ = 16 %

→ P(○,●) = $\frac{2}{5} \times \frac{3}{5} = \frac{6}{25}$ = 24 %

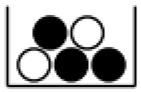
→ P(●,○) = $\frac{3}{5} \times \frac{2}{5} = \frac{6}{25}$ = 24 %

→ P(●,●) = $\frac{3}{5} \times \frac{3}{5} = \frac{9}{25}$ = 36 %

évènement A : obtenir deux noires . P(A) = P(●,●) = $\frac{9}{25}$ = 36 %

évènement B : obtenir une paire . P(B) = P(○,○) + P(●,●) = $\frac{4}{25} + \frac{9}{25} = \frac{13}{25}$ = 52 %

Expérience à deux épreuves : tirage de deux boules sans remise.



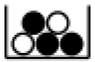
Une urne contient 3 boules noires et 2 boules blanches.
On tire successivement 2 boules **sans remise**.

Dans un arbre des possibles, la probabilité d'une issue auquel conduit un chemin est égal au produit des probabilités rencontrées le long de ce chemin.

arbre des possibles

Au 1er tirage

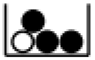
P_1(○) = 2/5
P_1(●) = 3/5



Au 2ème tirage

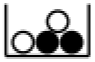
Puisqu'on ne remet pas la boule tirée au 1er tirage, il faut tenir compte du changement de la composition de l'urne.

1er cas: la 1ère boule tirée est blanche.

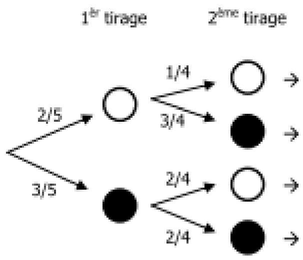


P_2(○) = 1/4
P_2(●) = 3/4

2ème cas : la 1ère boule tirée est noire.



P_2(○) = 2/4
P_2(●) = 2/4



→ P(○,○) = $\frac{2}{5} \times \frac{1}{4} = \frac{2}{20}$ = 10 %

→ P(○,●) = $\frac{2}{5} \times \frac{3}{4} = \frac{6}{20}$ = 30 %

→ P(●,○) = $\frac{3}{5} \times \frac{2}{4} = \frac{6}{20}$ = 30 %

→ P(●,●) = $\frac{3}{5} \times \frac{2}{4} = \frac{6}{20}$ = 30 %

évènement A : obtenir deux noires . P(A) = P(●,●) = $\frac{6}{20}$ = 30 %

évènement B : obtenir une paire . P(B) = P(○,○) + P(●,●) = $\frac{2}{20} + \frac{6}{20} = \frac{8}{20}$ = 40 %

POURCENTAGES

Deux suites sont proportionnelles, si:
> sur un tableau, on passe de l'une à l'autre en multipliant ou en divisant par un même nombre.
> sur un graphique, tous les points sont alignés avec l'origine.

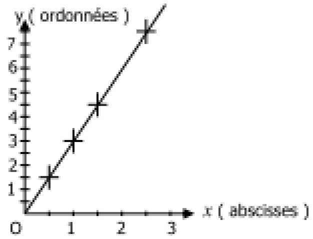
Exemple :

x (abscisse)	0,5	1	1,5	2,5
y (ordonnée)	1,5	3	4,5	7,5

× 3

$\frac{\text{nombre d'en bas}}{\text{nombre d'en haut}} = \frac{1,5}{0,5} = \frac{3}{1} = \frac{4,5}{1,5} = \frac{7,5}{2,5} = 3$

Ce nombre « constant » (toujours le même) est le **coefficient de proportionnalité**.



La règle de trois (4ème proportionnelle)

Exemple : Un automobiliste a consommé 8 litres d'essence pour un parcours de 150 km.
Quelle distance peut-il parcourir avec 12 L ?

8 L ⟶ 150 Km
12 L ⟶ ? Km

Consommation (en l)	8	12
Distance parcourue (en km)	150	?

? = $\frac{\textbf{produit de la grande diagonale}}{\textbf{nombre qui reste}} = \frac{150 \times 12}{8}$ = 225 km

GRANDEURS COMPOSEES

Une grandeur quotient est une grandeur obtenue en faisant le quotient de deux grandeurs .

- masse volumique - la masse volumique de l' or est de 19,3 g / cm ^{3} , ça signifie que 1 cm ^{3} d' or pèse 19,3 g.

volume (cm ^{3})	1	...
masse (g)	19,3	...

× masse volumique (g/ cm ^{3})

- débits - La Seine a un débit de 400 m ^{3} / s , ça signifie que, il s' écoule 400 m ^{3} d' eau en 1 seconde .

Temps (s)	1	...
volume (m ^{3})	400	...

× débit (m ^{3}/s)

-

$$\textbf{échelle} = \frac{\text{distance sur le dessin}}{\text{distance réelle (\textit{même unité})}}$$

Une carte routière est à l'échelle $\frac{1}{1\ 000}$.

Ca signifie qu' une distance de 1 000 cm en distance réelle est représenté par 1 cm sur la carte.

distance réelle (cm)	1000	...
distance sur la carte (cm)	1	...

× échelle

échelle < 1 → réduction
échelle = 1 → reproduction grandeur nature
échelle > 1 → agrandissement

VITESSES - TEMPS

> unités de temps - conversions

1h = 60min = 3600s

1min = 60s = $\frac{1}{60}$ h

1s = $\frac{1}{60}$ min = $\frac{1}{3600}$ h

3 h 33 min = 3 × 60 min + 33 min = 213 min

855 min = 14 × 60 min + 15 min
= 14 h 15 min

$\begin{array}{r|l} 855 & 60 \\ \hline 15 & 14 \end{array}$

5,8 h = 5 h + 0,8 h
= 5 h + 0,8 × 60 min
= 5h 48 min

2h24 min = 2h + 24min
= 2h + 24 × $\frac{1}{60}$ h
= 2h +0,4h
= 2,4 h

> vitesse moyenne

Une voiture roule à la vitesse moyenne de 60 km/h .
Ca signifie qu' elle parcourt 60 km en 1 h.

temps (h)	1	...
distance (km)	60	...

× vitesse (km/ h)

FORMULES $\boxed{V = \frac{D}{T}}$ $\boxed{D = VT}$ $\boxed{T = \frac{D}{V}}$

vitesse V , distance D , temps T

exemple :
Une voiture met 2h30min pour parcourir 200 km

- **vitesse moyenne** 2h30min = 2,5h

$V_{(\text{ km/ h})} = \frac{D_{(\text{ km})}}{T_{(\text{ h})}} = \frac{200\text{km}}{2{,}5\text{h}}$ = 80 km/h

- **distance parcourue en 1h30min** (= 1,5 h)

$D_{(\text{km})} = V_{(\text{ km/h})} \times T_{(\text{ h})}$ = 80km/h × 1,5h = 120 km

- **temps pour parcourir 540 km** ?

$T_{(\text{ h})} = \frac{D_{(\text{ km})}}{V_{(\text{ km/h})}} = \frac{540\text{ km}}{80\text{ km/h}}$ = 6,75h = 6h45min

- **conversion**

80 km/h = $\frac{80\text{ km}}{1\text{ h}} = \frac{80000\text{ m}}{3600\text{ s}} \approx$ 22,2 m/s

POURCENTAGES

ECRITURES EQUIVALENTES
25 %
25 pour 100
25 sur 100
$\frac{25}{100}$
0,25

CALCULS DE BASE

> appliquer un pourcentage : 25 % de 155 = $\frac{25}{100} \times 155 = 38{,}75$

> calculer un pourcentage : 30 objets sur 50 = $\frac{30}{50} \times 100 = 60$ %

VARIATIONS EN POURCENTAGE

On distingue trois types d'exercices basés sur le schéma ci-dessous :

Nombre de départ $\xrightarrow{\text{VARIATION EN \%}}$ Nombre d'arrivée

On donne deux des trois valeurs et il faut retrouver la troisième

Augmentation en pourcentage :

Un objet coûtait 115 € . Le prix est augmenté de 20 %. Quel est le nouveau prix ?	*Le prix d'un objet passe de 125 € à 130 €. Quel est le pourcentage de la hausse ?*	*Un objet coûte 118,25 € après que son prix ait subi une hausse de 7,5 %. Quel était l'ancien prix ?*
Augmenter de 20 % , pour un prix de 100 € , augmentation de 20 € , il coûtera à l'arrivée 120 € (100 + 20) $\boxed{+ 20\ \%}$ 115 ——> **?** 100 ——> 120 $? = \frac{115 \times 120}{100} = 138$ nouveau prix : 138 €	$\boxed{+ ?\ \%}$ 125 ——> 130 100 ——> ? $? = \frac{100 \times 130}{125} = 104$ 104 – 100 = 4 Pour 100 € , augmentation de 4 € donc augmentation de 4 %	Augmenter de 7,5 % , pour un prix de 100 € , augmentation de 7,5 €, il coûtera à l'arrivée 107,5 € (100+7,5) $\boxed{+ 7{,}5\ \%}$ **?** ——> 118,25 100 ——> 107,5 $? = \frac{100 \times 118{,}5}{107{,}5} = 110$ ancien prix : 110 €

Diminution en pourcentage

Un objet coûtait 155 €. Le prix est baissé de 15 %. Quel est le nouveau prix ?	*Le prix d'un objet passe de 160 € à 120 €. Quel est le pourcentage de la baisse ?*	*Un objet coûte 152 € après que son prix ait subi une baisse de 5 %. Quel était l'ancien prix ?*
Diminuer de 15 %, pour un prix de 100 € , diminution de 15 € , il coûtera à l'arrivée 85 € (100 – 15) $\boxed{- 15\ \%}$ 155 ——> **?** 100 ——> 85 $? = \frac{155 \times 85}{100} = 131{,}75$ nouveau prix : 131,75 €	$\boxed{- ?\ \%}$ 160 ——> 120 100 ——> ? $? = \frac{100 \times 120}{160} = 75$ 100 – 75 = 25 Pour 100 € , diminution de 25 € donc diminution de 25 %	Diminuer de 5 % , pour un prix de 100 € , diminution de 5 € , il coûtera à l'arrivée 95 € (100 –5) $\boxed{- 5\ \%}$ **?** ——> 152 100 ——> 95 $? = \frac{100 \times 152}{95} = 160$ ancien prix : 160 €

POURCENTAGES ET COEFFICIENTS MULTIPLICATEURS

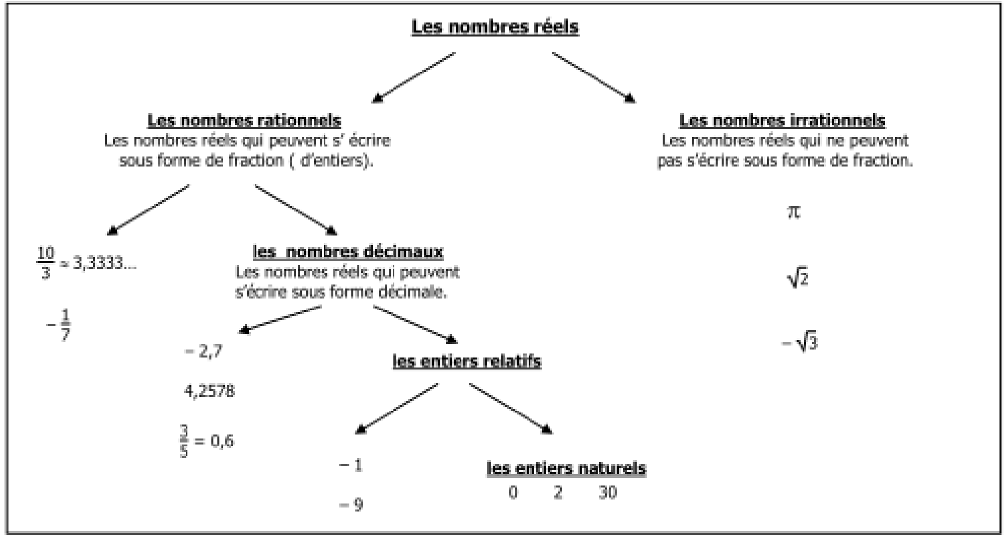
Appliquer un pourcentage : Prendre **5**% , c' est multiplier par $\frac{5}{100} = \mathbf{0{,}05}$

Augmentation en pourcentage : Augmenter de **5**%, c' est multiplier par $1 + \frac{5}{100} = \mathbf{1{,}05}$

Diminution en pourcentage : Diminuer de **5**%, c' est multiplier par $1 - \frac{5}{100} = \mathbf{0{,}95}$

La grande famille des nombres réels

Les nombres relatifs évoqués, rationnels et irrationnels, constituent l'ensemble des **nombres réels**. On les appelle « réels » car on a ensuite inventé d'autres nombres, indispensables pour résoudre d'autres types de problèmes ; ces nombres, difficiles à se représenter à l'esprit, s'appellent les nombres imaginaires ou nombres complexes. Mais cette autre aventure n'est qu'au programme du lycée et de l'université…



Plusieurs écritures peuvent désigner le même nombre.

Par exemple, pour écrire le nombre 7 on peut écrire 7,0 ; 4 + 3 ; 9 – 2 ; $\frac{14}{2}$; $\sqrt{49}$; …

et pour écrire le nombre 2,3 on peut écrire 2,3 ou $\frac{23}{10}$; $2 + \frac{3}{10}$; …

Valeur arrondie d' un nombre réel .

Donner un arrondi d'un nombre réel, c' est écrire , avec la précision demandée, le nombre décimal le plus proche de ce nombre réel.

ATTENTION ! Si une valeur approchée n'est pas demandée, on doit donner une valeur exacte, et employer le symbole d'égalité. Par contre, une valeur arrondie doit toujours être précédée du symbole « ≈ » qui se lit « est à peu près égal à ».

Exemples : 4 < 4,3 < 5 . L' arrondi à l'unité de 4,3 est 4 (4,3 est plus proche de 4 que de 5).
4 < 4,7 < 5 . L' arrondi à l'unité de 4,7 est 5 (4,7 est plus proche de 5 que de 4).

Méthode :

> Pour arrondir à l'unité (à 1 près) , on regarde le chiffre des dixièmes :

- s' il est inférieur à 5 , on garde le chiffre des unités.
  ex : 9,3 le chiffre des dixièmes est 3 donc 9 est l'arrondi à l' unité de 9,3 .
- s'il est égal à 5,6,7,8 ou 9 on ajoute 1 au chiffre des unités
  ex : 19,8 le chiffre des dixièmes est 8 donc 20 est l'arrondi à l'unité de 19,8 .

> Pour arrondir au dixième (0,1 près) , on regarde le chiffre des centièmes

- arrondi au dixième de 9,42 : 9,4
- arrondi au dixième de 9,45 : 9,5

> Pour arrondir au centième (à 0,01 près) , on regarde le chiffre des millièmes, etc…

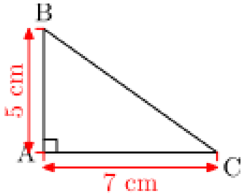
Configuration de Pythagore

1. Pour calculer la longueur d'un côté dans un triangle rectangle :

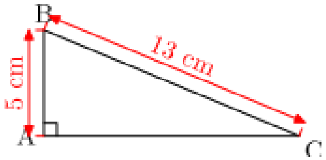
Théorème de Pythagore

Dans un triangle rectangle, le carré de la longueur de l'hypothénuse (*le côté opposé à l'angle droit*) est égal à la somme des carrés des deux autres côtés.

Ex 1 Calculer la longueur de l'hypoténuse :
ABC est un triangle rectangle en A, $AB=5$ et $AC=7$
D'après le théorème de Pythagore, $BC^2 = AB^2 + AC^2 = 5^2+7^2 = 25+49 = 74$ et donc $AB = \sqrt{74} \approx 8,6$.



Ex 2 Calculer la longueur d'un côté de l'angle droit :
ABC est un triangle rectangle en A, $BC=13$ et $AB=5$
d'après le théorème de Pythagore, on a $AC^2 = BC^2 - AB^2 = 13^2 - 5^2 = 169-25 = 144$ et donc $AC = \sqrt{144} = 12$.

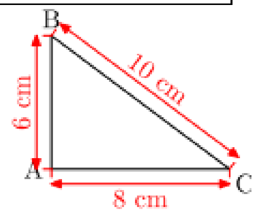


2. Pour démontrer qu'un triangle est rectangle :

Réciproque du théorème de Pythagore

Si, dans un triangle, le carré de la longueur du plus grand côté est égal à la somme des carrés des deux autres côtés, alors ce triangle est rectangle au sommet opposé au plus grand côté

Ex : Dans un triangle ABC, on a $AB=6$, $AC=8$ et $BC=10$.
Le plus long côté est $[BC]$. On calcule : $BC^2 = 10^2 = 100$ d'une part, et $AB^2+AC^2 = 6^2+8^2 = 36+64 = 100$ d'autre part. On constate que $AB^2+AC^2 = BC^2$; d'après la réciproque du théorème de Pythagore, ce triangle est rectangle en A.

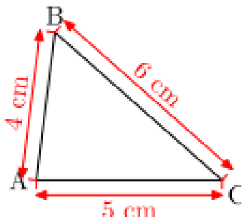


3. Pour montrer qu'un triangle n'est pas rectangle :

Contraposée du théorème de Pythagore

Si, dans un triangle, le carré de la longueur du plus grand côté n'est pas égal à la somme des carrés des deux autres côtés, alors ce triangle n'est pas rectangle.

Ex : Soit un triangle ABC tel que $AB=4$, $AC=5$ et $BC=6$.
Le plus long côté est $[BC]$. On calcule : $BC^2 = 6^2 = 36$ d'une part, et $AB^2+AC^2 = 4^2+5^2 = 16+25 = 41$ d'autre part.
On constate que $AB^2+AC^2 \neq BC^2$. Or, si le triangle était rectangle, le théorème de Pythagore nous dirait que cette égalité est vraie. Comme ce n'est pas le cas, on peut en conclure que le triangle n'est pas rectangle.



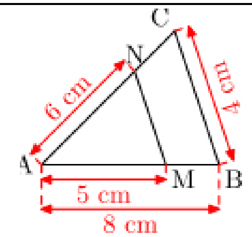
Configuration de Thalès

1. Pour calculer la longueur d'un côté dans un triangle :

Théorème de Thalès

Soient deux droites (MB) et (NC) sécantes en un point A, telles que les droites (MN) et (BC) soient parallèles. Alors les rapports suivants sont égaux : $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$ (autrement dit, les longueurs des côtés des triangles AMN et ABC sont proportionnelles).

Ex : ABC est un triangle, $M \in [AB]$, $N \in [AC]$, $AM=5$, $AN=6$, $AB=8$, $BC=4$; de plus, les droites (MN) et (BC) sont parallèles.
D'après le théorème de Thalès, $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$
et donc $MN = \frac{AM}{AB} \times BC = \frac{5}{8} \times 4 = 2,5$
et $AC = \frac{AN}{AB} \times AM = \frac{6}{8} \times 5 = 3,75$.

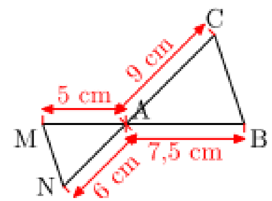


2. Pour démontrer que deux droites sont parallèles :

Réciproque du théorème de Thalès

Si les points M, A et B d'une part, et les points N, A et C d'autre part, sont alignés dans le même ordre, et si les rapports $\frac{AM}{AB}$ et $\frac{AN}{AC}$ sont égaux, alors les droites (MN) et (BC) sont parallèles.

Ex : Les points M, A et B d'une part, et les points N, A et C d'autre part, sont alignés dans le même ordre. De plus, $AM=5$, $AN=6$, $AB=7,5$ et $AC=9$.
On calcule : $\frac{AM}{AB} = \frac{5}{7,5} = \frac{2}{3}$ d'une part, et $\frac{AN}{AC} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$ d'autre part. On constate que $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}$; d'après la réciproque du théorème de Thalès, les droites (MN) et (BC) sont parallèles.

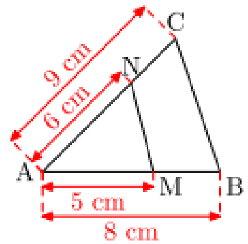


3. Pour démontrer que deux droites ne sont pas parallèles :

Contraposée du théorème de Thalès

Soient deux droites (MB) et (NC) sécantes en un point A. Si les rapports $\frac{AM}{AB}$ et $\frac{AN}{AC}$ ne sont pas égaux, alors les droites (MN) et (BC) ne sont pas parallèles.

Ex : ABC est un triangle, $M \in [AB]$, $N \in [AC]$, $AM=5$, $AN=6$, $AB=8$, $AC=9$.
On calcule : $\frac{AM}{AB} = \frac{5}{8}$ d'une part, et $\frac{AN}{AC} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$ d'autre part. On constate que $\frac{AM}{AB} \neq \frac{AN}{AC}$; Or, si les droites (MN) et (BC) étaient parallèles, le théorème de Thalès nous dirait que cette égalité est vraie. Comme ce n'est pas le cas, on peut en conclure que les droites ne sont pas parallèles.



Trigonométrie dans le triangle rectangle

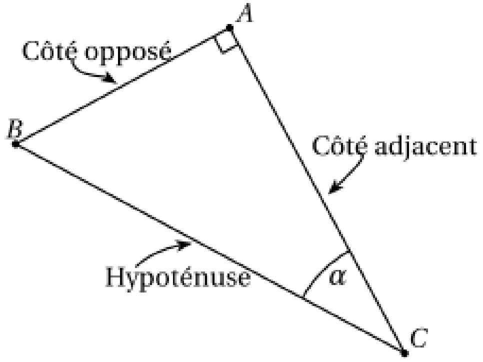
Définition

Soit ABC un triangle rectangle en A ; on notera α la mesure l'angle aigu $\widehat{ACB}$. Alors les rapports de longueurs $\frac{AC}{BC}$, $\frac{AB}{BC}$ et $\frac{AB}{AC}$ ne dépendent **que** de l'angle α, et on a :

$$\cos\alpha = \frac{\text{Côté adjacent}}{\text{Hypoténuse}} = \frac{AC}{BC}$$

$$\sin\alpha = \frac{\text{Côté opposé}}{\text{Hypoténuse}} = \frac{AB}{BC}$$

$$\tan\alpha = \frac{\text{Côté opposé}}{\text{Côté adjacent}} = \frac{AB}{AC}$$



Pour calculer la mesure d'un angle dans un triangle rectangle :

Par exemple, supposons que dans le triangle ABC rectangle en A, on ait $AB = 12$ cm et $AC = 16$ cm. Alors on peut calculer la mesure de l'angle $\widehat{ACB}$ en utilisant la formule de la **tangente** : $\tan\widehat{ACB} = \frac{AB}{AC} = \frac{12}{16} = 0,75$ d'où (*calculatrice*) $\widehat{ACB} \simeq 36,9°$.

Pour calculer la longueur d'un côté dans un triangle rectangle :

Par exemple, supposons que dans le triangle ABC rectangle en A, on ait $AB = 12$ cm et $\alpha = \widehat{ACB} = 30°$. Alors on peut calculer la longueur du côté $[AC]$ en utilisant la formule de la **tangente** : $\tan\alpha = \tan\widehat{ACB} = \frac{AB}{AC}$ d'où $AC = \frac{AB}{\tan\alpha} = \frac{12}{\tan 30°} \simeq 20.8$ cm

Propriétés

Si α est la mesure (en degrés) d'un angle aigu :

- $0 < \cos\alpha < 1$ et $0 < \sin\alpha < 1$
- $\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$
- $\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$
- $\sin(90-\alpha) = \cos\alpha$

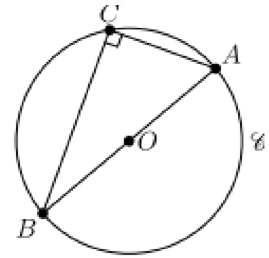
Valeurs exactes des cosinus, sinus et tangentes d'angles remarquables :

Mesure de l'angle (en degrés)	30°	45°	60°
Sinus de l'angle	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
Cosinus de l'angle	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
Tangente de l'angle	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$

Angles inscrits

Propriété : triangle inscrit dans un demi-cercle

Soit $\mathscr{C}$ un cercle.
Si un triangle a pour sommets deux extrémités du cercle $\mathscr{C}$, et si son troisième sommet est sur le cercle $\mathscr{C}$, alors le triangle est rectangle en ce troisième sommet.

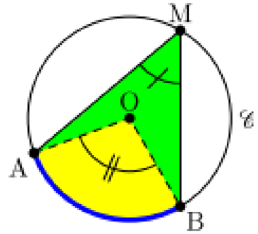


Remarque : cette propriété est un cas particulier du théorème de l'angle inscrit, énoncé plus bas.

Vocabulaire

Soit $\mathscr{C}$ un cercle de centre O.

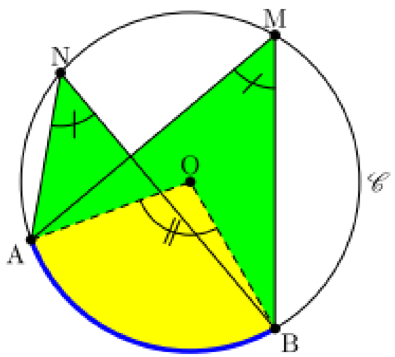
- On dit qu'un angle $\widehat{AMB}$ est **inscrit** dans le cercle $\mathscr{C}$ lorsque son sommet M appartient au cercle $\mathscr{C}$ et lorsque $[MA]$ et $[MB]$ sont des cordes du cercle $\mathscr{C}$.
- On dit que l'angle $\widehat{AMB}$ **intercepte** l'arc $\widehat{AB}$.
- L'angle $\widehat{AOB}$ est **l'angle au centre** associé à l'angle inscrit $\widehat{AMB}$: ces deux angles interceptent le même arc $\widehat{AB}$.



Théorème de l'angle inscrit

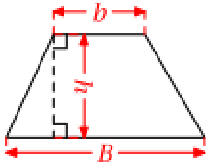
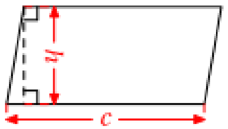
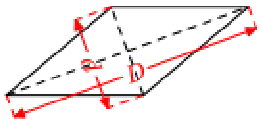
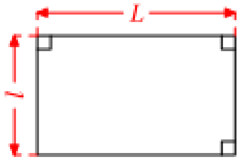
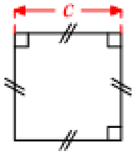
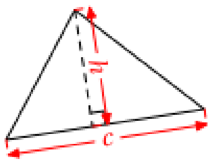
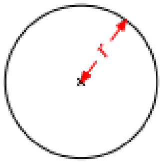
Dans un cercle, la mesure d'un angle inscrit est égale à la moitié de la mesure de l'angle au centre associé : $\widehat{AMB} = \frac{1}{2}\widehat{AOB}$.
En conséquence, si deux angles inscrits interceptent le même arc, alors ces deux angles sont égaux : $\widehat{AMB} = \widehat{ANB}$

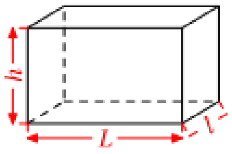
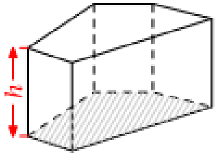
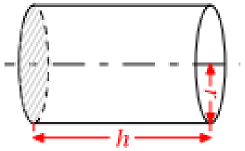
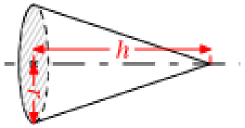
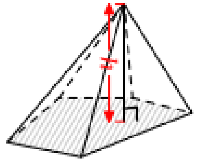
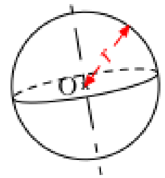
Illustration :



Les angles $\widehat{AMB}$ et $\widehat{ANB}$ sont inscrits dans le cercle $\mathscr{C}$, et interceptent le même arc $\widehat{AB}$. Ces deux angles sont donc de même mesure.

AIRES & VOLUMES

Nom de la figure	Représentation	Aire
Trapèze de petite base b, de grande base B et de hauteur h		$\mathscr{A}=\dfrac{(B+b)\times h}{2}$
Parallélogramme de côté c et de hauteur h relative à ce côté		$\mathscr{A}=c\times h$
Losange de côté c, de grande diagonale D et de petite diagonale d		$\mathscr{A}=\dfrac{d\times D}{2}$
Rectangle de longueur L et de largeur l		$\mathscr{A}=L\times l$
Carré de côté c		$\mathscr{A}=c^2$
Triangle de côté c et de hauteur h relative à ce côté		$\mathscr{A}=\dfrac{c\times h}{2}$
Cercle et disque de rayon r		$\mathscr{A}=\pi r^2$ (*Périmètre* : $\mathscr{P}=2\pi r$)

Nom du solide	Représentation	Volume
Parallélépipède rectangle de longueur L, de largeur l et de hauteur h. Le *cube* de côté c en est un cas particulier ($L=l=h=c$).		$\mathscr{V}=L\times l\times h$ (Pour le cube de côté c : $\mathscr{V}=c^3$)
Prisme – $\mathscr{A}$ est l'aire d'une base et h la hauteur du prisme.		$\mathscr{V}=\mathscr{A}\times h$
Cylindre – h est la hauteur du cylindre, et r est le rayon du disque de base		$\mathscr{V}=\pi r^2\times h$
Cône – r est le rayon du disque de base et h la hauteur du cône.		$\mathscr{V}=\dfrac{1}{3}\times\pi r^2\times h$
Pyramide – $\mathscr{A}$ est l'aire de la base et h la hauteur de la pyramide.		$\mathscr{V}=\dfrac{1}{3}\times\mathscr{A}\times h$
Sphère ou *Boule* de centre O et de rayon r		$\mathscr{V}=\dfrac{4}{3}\times\pi\times r^3$ (Aire : $\mathscr{A}=4\pi r^2$)

Agrandissement-réduction

• Appliquer un **agrandissement** à une figure ou à un solide, c'est multiplier toutes ses dimensions par un nombre k **supérieur à 1**.
• Appliquer une **réduction** à une figure ou à un solide, c'est multiplier toutes ses dimensions par un nombre k **compris entre 0 et 1**.
• Lorsque l'on réduit ou agrandit une figure d'un rapport k, alors l'**aire** de cette figure est **multipliée par** k^2.
• Lorsque l'on réduit ou agrandit un solide d'un rapport k, alors le **volume** de ce solide est **multiplié par** k^3.